

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Tesis doctoral

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LECCIONES DE LIBROS DE
TEXTO SOBRE PROPORCIONALIDAD BASADO EN EL
ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO. IMPLICACIONES PARA LA
FORMACIÓN DE PROFESORES**

María José Castillo Céspedes

Granada, 2022

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LECCIONES DE LIBROS DE
TEXTO SOBRE PROPORCIONALIDAD BASADO EN EL
ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO. IMPLICACIONES PARA LA
FORMACIÓN DE PROFESORES.**

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de la doctora María José Burgos Navarro, que presenta Dña. María José Castillo Céspedes para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo. María José Castillo Céspedes

Una firma manuscrita en tinta negra, que parece ser la del director de la tesis, María José Castillo Céspedes.

Vº Bº de la Directora:

Una firma manuscrita en tinta azul, que parece ser la del director de la tesis, María J. Burgos Navarro.

Fdo. María J. Burgos Navarro

La doctoranda María José Castillo Céspedes y la directora de la tesis Dra. María J. Burgos Navarro, garantizamos al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de la directora de tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores al ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Asimismo, certificamos que:

- María José Castillo Céspedes es co-autora de todos y cada uno de los artículos y capítulos de libro publicados, aceptados para su publicación o en evaluación, compendiados en esta memoria en los capítulos del 3 al 7.
- Los trabajos de elaboración de todos y cada uno de estos artículos han sido parte de la formación de María José Castillo Céspedes como investigadora.
- Todos y cada uno de los artículos compendiados en esta memoria de tesis doctoral son originales y no han sido utilizados por ninguno de sus coautores en otras tesis doctorales.

Granada, 26 de setiembre de 2022.

Directora de la Tesis


Fdo: Dra. María J. Burgos Navarro

Doctoranda


Fdo: María José Castillo Céspedes

Reconocimiento

Esta investigación se realizó en el marco del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e innovación), con el apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España). La Universidad de Costa Rica facilitó apoyo financiero a la doctoranda mediante la adjudicación de una beca para llevar a cabo estudios de Maestría y Doctorado en la Universidad de Granada.

Agradecimientos

Expreso mi profundo agradecimiento a la Universidad de Costa Rica, institución que me ha otorgado la beca que ha financiado totalmente mis estudios de posgrado y ha permitido la realización de esta tesis doctoral. A la Escuela de Matemática de dicha institución, que durante este proceso me ha hecho sentir parte de un equipo muy profesional.

Agradezco a mi directora, María Burgos Navarro por su compromiso, dedicación e interés mostrado en este trabajo, gracias por todo lo enseñado. También gracias por el apoyo personal, por motivarme constantemente, sobre todo en los momentos que más lo necesité.

A Juan D. Godino, que, a pesar de su jubilación, mostró siempre su acompañamiento en la realización de este trabajo, gracias por su anuencia a atenderme cuando lo necesité y por compartir su valioso conocimiento. A la Universidad de Granada, a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática por seguir formándome, en especial a María Burgos, María Gea y Juan D. Godino, por permitirme formar parte del Grupo FQM-126.

Agradezco a los futuros maestros de educación primaria y los futuros profesores de educación secundaria participantes de este estudio, por su buena disposición para aprender en las diferentes acciones formativas. También a la profesora Carolina Morales y la directora Floria Arias por permitirme llevar a cabo una experiencia formativa en el contexto costarricense. Espero que el aprendizaje haya sido mutuo.

Gracias a las personas que se convirtieron en mi familia en Granada, María Fernanda, José, Romi “Honey”, Romina, Luz y muchos otros, por sus consejos y por motivarme siempre a seguir. A mi bella Carmen Gloria por abrirme las puertas y dejarme ser parte de su linda familia. También gracias a mis amigos ticos y familiares que a pesar de la distancia siempre estuvieron presentes. Gracias, Kari “Wuachua”, Papi Arnoldo, Sole, Abuela Zahida y Jorhan.

A Kenner Ordoñez, Arlene Artavia y Susan Céspedes les agradezco la confianza depositada en mí, sin su apoyo no habría sido posible vivir esta experiencia.

Agradezco a mi familia más cercana, por todo su amor. A mi madre Lizeth por ser mi compañera de aventuras, por ser fuerte y valiente y por motivarme a serlo también. Gracias Leonora, por llegar a mi vida justo cuando lo necesité. A Lau por creer en mí, incluso cuando yo no lo hacía, por alegrarte y entristecerte conmigo. A Emilio por convertirte en un hermano. A mi padre José, que desde el cielo velas por mí. Gracias Dios por todo cuanto me diste y quitaste, gracias morenita (Virgen de los Ángeles) por acompañarme eternamente.

Resumen

Esta tesis doctoral se vertebra en tres focos de interés en la Educación Matemática: el análisis de libros de texto, la formación de profesores y la proporcionalidad. Tras una revisión de antecedentes en estos ámbitos de investigación (Capítulo 1), se identifican claramente dos problemáticas. Por un lado, la necesidad de contar con instrumentos para guiar el análisis sistemático de lecciones de libros de texto de matemáticas de educación primaria y secundaria, en particular aquellas centradas en el estudio de la proporcionalidad. Estas herramientas deben emplear criterios específicos y objetivos fundamentados sobre los conocimientos matemáticos y didácticos derivados de la investigación en educación matemática. Por otro, la necesidad de contemplar en la formación de docentes la promoción de la competencia de análisis crítico y reflexivo sobre los libros de texto de matemáticas.

El marco teórico que fundamenta esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En dicho marco se han desarrollado nociones teóricas y metodológicas que permiten abordar ambas problemáticas, en particular, la teoría de la idoneidad didáctica y el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, que se explican en detalle en el Capítulo 2 de esta memoria.

En relación con la primera problemática presentada, en el Capítulo 3, se muestra el proceso de elaboración de dos guías de análisis de libros de texto, una aplicable a cualquier contenido matemático (GALT-matemáticas) y otra enfocada en el tema de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad). Posteriormente, en los capítulos del 4 al 7, se describen el diseño, implementación y evaluación de diversos ciclos de formación con futuros docentes (dos dirigidos a futuros profesores de secundaria y dos destinados a futuros maestros de primaria), que buscan promover su competencia de análisis de idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto, empleando los instrumentos previamente elaborados.

Los resultados, muestran que, incluso cuando disponen de herramientas que los guíen, el análisis profesional de lecciones de libros de texto es una tarea que no está exenta de dificultades para los futuros profesores tanto de educación primaria como de secundaria. Estas dificultades aparecen conectadas a deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de los participantes, que se ve reforzado después con la formación. No obstante, se observa que los participantes pueden superar estas limitaciones con la instrucción adecuada y que la GALT-proporcionalidad apoya el desarrollo de la competencia reflexiva de los participantes. Asimismo, se comprueba que los futuros docentes han alcanzado diferentes niveles de logro de dicha competencia, siendo mejores los resultados, en términos de aprendizaje, en los segundos ciclos de intervención. Al respecto, mencionamos que el análisis retrospectivo de los primeros ciclos de intervención implementados, permitió mejorar los instrumentos para el análisis de las lecciones de libros de texto (la GALT-proporcionalidad) empleado en los siguientes ciclos. De nuestro estudio se derivan estrategias formativas específicas, que se espera, sirvan para orientar a los formadores de profesores en la compleja tarea de caracterizar y promover dicha competencia en los futuros docentes. Otros aportes de esta investigación se exponen detalladamente en el Capítulo 8, junto con una síntesis de las limitaciones encontradas y futuras líneas de investigación.

Abstract

This doctoral thesis is structured around three focuses of interest in Mathematics Education: textbook analysis, teacher training and proportionality. After a review of the background in these areas of research (Chapter 1), two problems are clearly identified. On the one hand, the need for tools to guide the systematic analysis of lessons in primary and secondary mathematics textbooks, particularly those focusing on the study of proportionality. These tools must employ specific and objective criteria based on mathematical and didactical knowledge derived from research in mathematics education. On the other hand, the need to include in teacher training programmes the development of the competence for critical and reflective analysis of mathematics textbooks.

The theoretical framework that underpins this research is the Ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction. Within this framework, theoretical and methodological notions have been developed to address both problems, in particular, the theory of didactical suitability and the model of didactic-mathematical knowledge and competences of the teacher, which are explained in detail in Chapter 2 of this report.

In relation to the first problem presented, Chapter 3 shows the process of developing two textbook analysis guides, one applicable to any mathematical content (GALT-mathematics) and the other focused about proportionality (GALT-proportionality). Subsequently, Chapters 4 to 7 describe the design, implementation, and evaluation of several training cycles with future teachers (two aimed at future secondary school teachers and two aimed at future primary school teachers), which seek to promote their competence in the analysis of the didactical suitability of textbook lessons, using the instruments previously developed.

The results show that, even when tools are available to guide them, the professional analysis of textbook lessons is a task that is not without difficulties for prospective teachers in

both primary and secondary education. These difficulties appear to be connected to deficiencies in the didactic-mathematical knowledge of the participants, which is then reinforced by the training. However, it is observed that participants can overcome these limitations with appropriate instruction and that GALT-proportionality supports the development of the participants' reflective competence. It is also found that the future teachers have reached different levels of achievement of this competence, with better results in terms of learning in the second cycles of intervention. In this respect, it is worth mentioning that the retrospective analysis of the first cycles of intervention implemented allowed us to improve the instruments for the analysis of the textbook lessons (the GALT-proportionality) used in the following cycles. Specific training strategies are derived from our study, which, it is hoped, will serve to guide teacher educators in the complex task of characterising and promoting this competence in future teachers. Other contributions of this research are presented in detail in Chapter 8, together with a summary of the limitations encountered and future lines of research.

Índice

Capítulo 1. Introducción	24
1. Antecedentes y justificación	24
1.1. Investigaciones sobre el análisis de libros de texto	25
1.2. Formación de profesores para el análisis de materiales curriculares	34
1.3. Razonamiento proporcional en la formación de profesores	53
2. Síntesis y problema de investigación	57
2.1. Cuestiones de investigación	61
2.2. Hipótesis de investigación	62
2.3. Objetivos de la investigación	63
Capítulo 2. Marco teórico y metodológico	64
1. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática	64
1.1. Prácticas matemáticas y significado pragmático	65
1.2. Idoneidad didáctica	68
1.3. Modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas	71
2. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad	76
2.1. Significados de la proporcionalidad	76
2.2. Conocimientos sobre la faceta cognitiva	79
2.3. Conocimientos sobre la faceta instruccional (interaccional-mediacional)	80
3. Descripción general de la metodología	81
3.1. Investigación de diseño	82
3.2. La técnica de análisis de contenido	85
Capítulo 3. Desarrollo de guías de análisis de lecciones de libros de texto	87
1. Introducción	87
2. Metodología	88
3. Elaboración de una guía para el análisis de libros de texto	89
3.1. Indicadores de idoneidad epistémica	90
3.2. Indicadores de idoneidad cognitiva	94
3.3. Indicadores de idoneidad afectiva	97
3.4. Indicadores de idoneidad interaccional	99
3.5. Indicadores de idoneidad mediacional	101
3.6. Indicadores de idoneidad ecológica	101
4. Guía para el análisis de lecciones de libros de texto en proporcionalidad	102
4.1. Faceta epistémica	103
4.2. Faceta cognitiva	110
4.3. Faceta afectiva	114
4.4. Faceta instruccional (interaccional y mediacional)	115

4.5. Faceta ecológica	115
5. Síntesis e implicaciones.....	117
Capítulo 4. Primer ciclo de experimentación con futuros profesores de secundaria.....	119
1. Introducción.....	119
2. Metodología, participantes y contexto de aplicación	121
3. Diseño del experimento	122
3.1. Instrumento de recogida de datos.....	123
3.2. Análisis a priori de la lección.....	124
4. Resultados.....	138
4.1. Análisis de la lección a través de la GALT-proporcionalidad	138
4.2. Análisis de la valoración de la idoneidad didáctica de la lección	150
4.3. Análisis de las propuestas de gestión de la lección del libro de texto.....	161
5. Conclusiones.....	166
5.1. Cómo aplican los futuros profesores de secundaria la GALT-proporcionalidad para valorar de manera crítica una lección.....	167
5.2. Cómo consideran los resultados del análisis para proponer mejoras en la gestión de uso.	168
5.3. Implicaciones y limitaciones.....	169
Capítulo 5. Primer ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria.....	172
1. Introducción.....	172
2. Metodología, participantes y contexto de aplicación	175
3. Diseño del experimento	178
3.1. Instrumento de recogida de datos.....	178
3.2. Análisis a priori	179
4. Resultados.....	197
4.1. Análisis didáctico de la lección realizado por los futuros maestros.....	198
4.2. Aplicación de la GALT-proporcionalidad por los futuros maestros.....	205
4.3. Análisis de las reflexiones de los futuros maestros cuando valoran la idoneidad didáctica de la lección.....	219
4.4. Propuestas de gestión de uso y cambios de la lección por los futuros maestros.....	225
5. Conclusiones.....	229
5.1. Análisis didáctico realizado por los futuros maestros	230
5.2. Aplicación de la GALT-proporcionalidad por futuros maestros	231
5.3. Reflexiones sobre la idoneidad didáctica de la lección.....	235
5.4. Propuestas de gestión y modo de uso de la lección	237
5.5. Implicaciones y limitaciones.....	238
Capítulo 6. Segundo ciclo de experimentación con futuros profesores de secundaria.....	241
1. Introducción.....	241

2. Metodología, participantes y contexto de aplicación	243
3. Diseño del experimento	245
3.1. Sesión 1. Exploración inicial.....	246
3.2. Sesión 2. La idoneidad didáctica como recurso para analizar lecciones de libros de texto	247
3.3. Sesión 3. GALT-proporcionalidad y conocimientos didáctico-matemáticos	250
3.4. Sesión 4. Discusión de resultados y puesta en común	254
3.5. Valoración de la experiencia formativa por parte de los participantes	254
4. Resultados.....	255
4.1. Evolución de la competencia reflexiva en el análisis didáctico de la lección.....	255
4.2. Evolución de la competencia para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material.....	273
4.3. Análisis retrospectivo del ciclo de diseño	291
5. Conclusiones.....	294
5.1. Sobre la promoción de la competencia de análisis didáctico de lecciones de libros de texto y la evaluación de la experiencia formativa con relación a este objetivo	295
5.2. Sobre la promoción de la competencia en la identificación de conflictos y reflexión sobre el modo de uso de la lección.....	296
Capítulo 7. Segundo ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria.....	299
1. Introducción.....	299
2. Metodología, participantes y contexto de aplicación	300
3. Diseño e implementación del experimento	302
3.1. Exploración inicial. ¿Qué valoran los futuros maestros en una lección de libro de texto?	303
3.2. Introducción al análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas....	303
3.3. La idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión	304
3.4. Evaluación de la competencia de análisis de idoneidad didáctica	305
4. Resultados.....	306
4.1. Evolución de la competencia reflexiva en el análisis didáctico de la lección.....	306
4.2. Evolución de la competencia para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material.....	323
5. Conclusiones.....	341
5.1. Sobre la evolución de la competencia reflexiva en el análisis de lecciones de libros de texto.....	342
5.2. Sobre la evolución de la competencia reflexiva en la identificación de conflictos y reflexión sobre modo de uso	345
Capítulo 8. Conclusiones	348
1. Conclusiones en relación con los objetivos e hipótesis de investigación.....	349
1.1. Conclusiones en relación con el primer objetivo específico	349

1.2. Conclusiones en relación con el segundo y tercer objetivo específico	356
2. Limitaciones y futuras líneas de investigación.....	368
3. Otras implicaciones científicas de la investigación.....	372
Referencias.....	374
Anexos	403
1. Instrumentos de recogida de datos de los ciclos de intervención	403
1.1. Primer ciclo de experimentación con profesores de secundaria	403
1.2. Primer ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria	419
1.3. Segundo ciclo de experimentación con futuros profesores de secundaria.....	431
1.4. Segundo ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria.....	444
2. Análisis a priori de la lección analizada en el primer ciclo con futuros maestros de primaria	468
3. Publicaciones vinculadas con la tesis doctoral	473
3.1. Artículos de revistas	473
3.2. Actas en congresos científicos	474
3.3. Criterios de calidad de las publicaciones	474

Presentación

El estudio que se desarrolla en esta memoria de tesis doctoral surge de manera natural, para dar continuidad a la investigación que inicié en el Trabajo Fin de Máster en Didáctica de las Matemáticas, en la Universidad de Granada. Partimos, por un lado, de la necesidad de desarrollar guías para el análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas que ofrezcan herramientas que orienten la reflexión, valoración y gestión de uso de dichos recursos educativos en el aula. Por otro, de la potencialidad del constructo denominado idoneidad didáctica (Godino, 2013), desarrollado en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; 2020) para sistematizar el análisis y valoración de procesos instruccionales en base a criterios de idoneidad consensuados por la comunidad científica.

La fundamentación y elaboración de estas guías de análisis de lecciones de libros de texto tiene como finalidad servir al profesor como instrumento para su desarrollo profesional. Pero esto no es algo que se logre sin una formación específica; se requiere el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar en futuros profesores, tanto de primaria como de secundaria, la competencia de análisis de lecciones de libros de texto empleando dichas herramientas.

La formación de profesores siempre ha sido un tema de especial interés para mí. La experiencia primero como estudiante y luego como docente de cursos de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica, me ha permitido percibir retos y necesidades que se han de asumir para mejorar la formación de profesores en Costa Rica. La apertura de la carrera denominada Educación Matemática, en el año 2017, como respuesta de un equipo de profesionales interesados en subsanar muchas de las debilidades que se manifestaban en la formación de futuros profesores de secundaria en dicha universidad, acrecentada la necesidad de contar con profesionales especializados en el área.

Dentro de la investigación que se estaba realizando en el grupo de investigación al que me incorporaba, en la Universidad de Granada, y conscientes de la necesidad de concretar un contenido matemático específico en el que centralizar el estudio de la tesis doctoral, decidimos abordar el análisis didáctico de lecciones de libros de texto en la formación de profesores en el tema de proporcionalidad. Seleccionamos este tópico por su importancia curricular en diferentes etapas y contextos educativos, su transversalidad y las dificultades que supone tanto a estudiantes como profesores. Las primeras revisiones de investigaciones al respecto también ponían de manifiesto que es un contenido que no se aborda de manera adecuada en los libros de texto, por lo que se convertía en un foco importante de investigación.

El plan de investigación contempla, en primer lugar, la optimización de las guías para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas, en base a las facetas y componentes de la idoneidad didáctica para los procesos de instrucción matemática (GALT-Matemáticas), así como su particularización en el tema de la proporcionalidad (GALT-proporcionalidad) en educación primaria y secundaria. En segundo lugar, se aborda el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas con futuros profesores de educación secundaria y primaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad.

El interés y relevancia del problema abordado se justifica por la necesidad de investigar estrategias formativas idóneas que permitan promover en los futuros docentes la competencia de reflexión sobre la adecuación de procesos instruccionales, en particular, de aquellos previstos o planificados por los autores de un libro de texto para abordar la enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido, en nuestro caso, la proporcionalidad.

El marco teórico adoptado en esta investigación es el EOS (Godino et al., 2007; 2020). El enfoque metodológico seguido en el diseño, implementación y evaluación de las intervenciones formativas corresponde a la ingeniería didáctica, entendida en el sentido

generalizado como propone el EOS (Godino, Rivas et al., 2014). Además, se emplea una metodología de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) tanto para la elaboración de las guías, pues se precisa recopilar, analizar y sistematizar conocimientos didáctico-matemáticos resultado de las investigaciones educativas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, como para el análisis de los informes producidos por los futuros docentes en cada intervención.

Durante el curso 2019-2020 se implementaron en la Universidad de Granada (España) dos ciclos de experimentación, uno con 30 futuros profesores de secundaria, estudiantes de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (ICS), y otro con 61 futuros maestros de primaria, estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria (ICP). Posteriormente, en el curso 2020-2021 se llevó a cabo una segunda intervención con 48 futuros maestros de primaria (IICP) en la Universidad de Granada y otro en la Universidad de Costa Rica, con 28 futuros profesores de secundaria, estudiantes de la carrera de Educación Matemática (IICS). Todas las acciones formativas corresponden a estudios de casos con muestras intencionales reducidas.

La memoria está concebida bajo la modalidad de “tesis por compendio de artículos”, por lo que las secciones de resultados de la investigación se corresponden con diversas publicaciones realizadas. La tesis está organizada en los siguientes capítulos.

Capítulo 1. En este capítulo se presenta una síntesis de investigaciones previas relacionadas con tres focos de interés en Educación Matemática que vertebran este proyecto de investigación: el análisis de libros de texto, la formación de profesores y la proporcionalidad como contenido matemático escolar. Asimismo, se define el encuadre del problema de investigación, precisando las cuestiones, hipótesis y objetivos.

Capítulo 2. Corresponde a la descripción general del marco teórico adoptado. Se trata de una síntesis de las herramientas teórico-metodológicas fundamentales del EOS empleadas

en la tesis y que permiten una lectura autónoma de la memoria. Se presta especial atención a la teoría de la idoneidad didáctica, y al modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor. También se describe el enfoque metodológico empleado: la ingeniería didáctica y la técnica de análisis de contenido basadas en el EOS.

Capítulo 3. En este capítulo se describe el proceso de elaboración de las guías de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas) y de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad). Parte de la información incluida en el capítulo se corresponde con los siguientes dos artículos:

- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787.
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022c). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>

Capítulo 4. Describe el diseño, implementación y evaluación del primer ciclo de intervención formativa con futuros profesores de secundaria en España. La información incluida en este capítulo aparece publicada en los artículos:

- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021b). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *ACTA SCIENTIAE*, 23(4), pp. 169–206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, 34(2), 39–71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>

Capítulo 5. En este capítulo se describe el diseño, implementación y evaluación del primer ciclo de intervención formativa con futuros maestros de primaria en España. Parte de la información incluida en este capítulo corresponde a los siguientes artículos publicados, aceptados para su publicación o bien que se encuentran en actual proceso de revisión:

- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad por maestros en formación. *Revemop*, 4, e202204. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>
- Burgos, M., Castillo, M. J. y Godino, J. D. (2022). Análisis didáctico de lecciones de proporcionalidad en la formación de maestros. (Sometido a publicación).
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022b). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, (en prensa).
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022c). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, 36(72), 555–579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>

Capítulo 6. En este capítulo se describe el diseño, implementación y evaluación del segundo ciclo de intervención formativa con futuros profesores de secundaria en Costa Rica. La información incluida en el capítulo se corresponde con un artículo publicado y otro actualmente en proceso de revisión:

- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia de análisis y reflexión sobre la gestión de lecciones de libros de texto por profesores en formación. (En revisión).

Capítulo 7. En este capítulo se describe el diseño, implementación y evaluación del segundo ciclo de intervención formativa con futuros maestros de primaria en España. La información incluida en el capítulo se corresponde con un artículo aceptado para su publicación y otro actualmente en proceso de revisión:

- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 34(2), (en prensa).
- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022). Competencia de análisis y reflexión sobre la gestión de lecciones de libros de texto por maestros en formación (En revisión).

Capítulo 8. Se presenta una síntesis de los resultados de la investigación según los objetivos e hipótesis planteadas en el Capítulo 1, posibles extensiones del uso de las herramientas GALT-Matemáticas y GALT-proporcionalidad, así como las principales líneas abiertas de investigación.

La tesis finaliza con las referencias bibliográficas consideradas en los diferentes capítulos de la tesis. En Anexos se encuentran las tareas diseñadas e implementadas en las intervenciones formativas y se citan las publicaciones vinculadas a la tesis doctoral. Además, se proporcionan los criterios de calidad de las revistas correspondientes con los artículos publicados o aceptados para publicación que aparecen recogidos en los capítulos 3, 4, 5, 6 y 7.

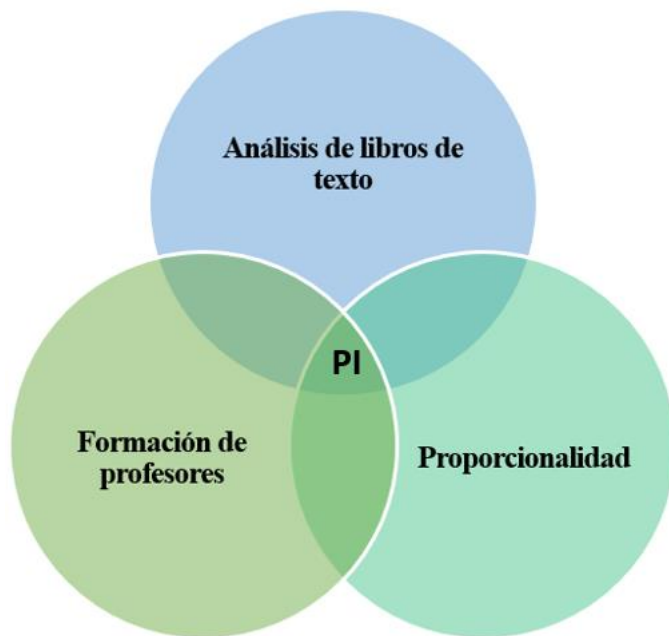
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes y justificación

En esta tesis se consideran tres focos de interés en Educación Matemática: el análisis de libros de texto, la formación de profesores, y la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. Nuestro problema de investigación (PI en la Figura 1.1) surge en la intersección entre estos ámbitos.

Figura 1.1

Focos de interés considerados en la investigación



Fuente. Elaboración propia

Así, en la literatura se encuentran investigaciones que tratan el análisis de libros de texto y la proporcionalidad, otros que consideran la formación de profesores y el análisis de libros de texto y finalmente, aquellos que abordan la formación de profesores y la proporcionalidad.

A continuación, presentamos los antecedentes más relevantes en relación con dichos contextos, que nos lleva a plantear y justificar el problema de investigación originado en la intersección de estos tres focos de interés.

1.1. Investigaciones sobre el análisis de libros de texto

El libro de texto escolar se ha consolidado como problema de investigación educativa en diversas disciplinas (Teive, 2015). Autores como Bel y Colomer (2018) afirman que “la importancia de este material didáctico no ha hecho más que aumentar en contextos como el europeo e iberoamericano, lo que a su vez ha llevado a una mayor preocupación por su estudio desde las esferas académicas” (p.4). En la actualidad, podemos afirmar que esta idea señalada por Bel y Colomer (2018) sigue plenamente vigente. En efecto, a pesar de la situación de pandemia provocada por el COVID-19, en la que los recursos digitales han adquirido especial protagonismo en el ámbito educativo, la trascendencia de los libros de texto como un recurso que estructura contenidos y que orienta la planificación del estudio, sigue reconociéndose por docentes, estudiantes y padres de familia, en diversos países con independencia de la institución de procedencia y de sus diferenciados compromisos ideológicos (Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza [ANELE], 2021).

Ese papel e influencia que poseen los libros de texto sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje motiva que desde la investigación en Educación Matemática se les consideren como objetos de estudios en sí mismos, y que se plantee analizar su calidad como un problema de investigación prioritario (American Association for the Advancement of Science [AAAS], 2000; Fan et al., 2013; Schubring y Fan, 2018).

A continuación, mostramos una síntesis de los antecedentes en este ámbito de investigación. En primer lugar, resumimos estudios generales que proporcionan una visión panorámica de los avances y demandas en el análisis de libros de texto, centrando la atención en el ámbito de las matemáticas y de investigaciones que proponen instrumentos específicos para su análisis. Después se resumen las aportaciones más importantes de estudios sobre libros de texto de proporcionalidad.

1.1.1. Investigaciones sobre análisis de libros de texto de matemáticas

Fan (2013) desarrolla una extensa revisión bibliográfica de investigaciones centradas en libros de texto de matemáticas. El autor propone un marco conceptual en el que los libros de texto constituyen una variable intermedia en el contexto de la educación, por lo que se puede identificar tres áreas generales de investigación: una donde los propios libros de texto constituyen el objeto de estudio (estudios descriptivos); otra que considera los libros de texto como variable dependiente y por tanto, interesa estudiar los factores que afectan su desarrollo y producción; y una tercera que posiciona a los libros de texto como variable independiente, por lo que se investiga cómo otros factores de la educación se ven afectados por estos (estudios correlacionales y causales). Fan (2013) concluye que la mayoría de los estudios considerados son de índole descriptivos y propone que lograr un avance en la investigación sobre los libros de texto de matemáticas debería pasar por realizar estudios que vayan más allá de cómo se ven los libros; por ejemplo, analizar relaciones con otros factores de la educación.

En una línea similar, Fan et al. (2013) realizan una revisión sistemática, categorizando los tipos de investigaciones e identifican futuras líneas de trabajo en el campo. Las categorías de investigaciones según focos de interés incluyen: el rol de los libros de texto, el análisis y comparación de textos, el uso de los libros y otras áreas. La mayoría de los estudios de la categoría análisis de libros de texto, evidenciaron deficiencias de estos en la presentación de contenido matemático y la poca promoción de la resolución de problemas. Las diferencias en los libros de texto de diversas series y países apuntan a la falta de consenso en su desarrollo y la inseparabilidad de los mismos respecto del origen cultural y social, siendo notable la existencia de brechas entre los libros de texto y el plan de estudios previsto.

Para Fan et al. (2013), se pueden reconocer avances en las últimas décadas en la investigación de libros, especialmente en la comparación de textos y plantean como futuras líneas de investigación la necesidad de: indagar sobre la relación del uso del libro y el resultado

de aprendizaje, establecer una metodología avanzada y sofisticada en esta área y realizar más investigaciones con libros de texto electrónicos.

Una descripción más reciente del desarrollo de la investigación de libros de texto de matemáticas la presentan Schubring y Fan (2018), quienes afirman que esta área de investigación ha tenido una atención internacional cada vez mayor al abrirse a nuevos desarrollos como los recursos electrónicos, las reflexiones históricas y las comparaciones internacionales.

Un referente para considerar en relación con la evaluación de la calidad de los libros de texto de matemáticas para su uso en el aula viene determinado por el Proyecto 2061, creado por la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (2000) (AAAS por sus siglas en inglés). El proyecto emplea los objetivos de los estándares nacionales o estatales, así como los Estándares de Currículo y Evaluación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) (NCTM, 2000) como base para evaluar el potencial de los libros de textos para que los estudiantes aprendan un tema. Los investigadores del Proyecto 2061 diseñan criterios de instrucción, en base a una revisión científica de la literatura, que comprenden la revisión de los textos en aspectos como: el propósito de la unidad; la secuencia de actividades; la consideración de los conocimientos previos; la inclusión de situaciones contextualizadas y experiencias de aplicación; el desarrollo de ideas matemáticas, conceptos y procedimientos; la promoción del pensamiento estudiantil, mediante explicaciones razonadas; y la existencia de elementos evaluativos.

Una completa revisión bibliográfica lleva a Monterrubio y Ortega (2012) a concluir que no existe un modelo de valoración de libros de texto de matemáticas para ser usado por los profesores cuando quieren elegir un libro de texto para trabajar en el aula; “los modelos existentes o bien son demasiado generales o bien resultan incompletos” (p. 473). Esto induce a los autores a desarrollar tres instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de

matemáticas: uno exhaustivo (para analizar un texto en profundidad), uno reducido (con el que valorar los textos más rápidamente y analizar varios textos escolares a la vez) y uno transversal (para valorar aspectos que aparecen en distintos organizadores del modelo exhaustivo de modo transversal; por ejemplo, la resolución de problemas, que se puede tratar como un contenido, una actividad o una metodología).

La elaboración de estos modelos de análisis supone el análisis de contenido tanto sobre los resultados de investigaciones de carácter general, como de trabajos que trataban específicamente el análisis de libros de textos de matemáticas, lo que les permite a los autores delimitar unidades de información a partir de las cuales definir indicadores de análisis (Monterrubio y Ortega, 2011; 2012). Estos indicadores refieren a aspectos como: los objetivos; los contenidos, su organización y presentación; conexiones, con la matemática y con otras disciplinas; actividades, su secuenciación en orden de dificultad, su adecuación, temporalización etc.; entorno del libro (destinario, informes externos); las ilustraciones y su manejo; la motivación; la metodología; la inclusión de nuevas tecnologías; entre otros.

Santaolalla (2014) diseña un instrumento con el fin de analizar el tratamiento de los elementos didácticos que componen los libros de texto de matemáticas y valorar si el libro de texto de matemáticas permite desarrollar diferentes estilos de aprendizaje (activo, reflexivo, teórico y pragmático) en los estudiantes de primaria. Dicho instrumento se basa en seis organizadores: aspectos formales; contenidos; metodología; aspectos afectivos; actividades y evaluación, los cuales agrupan elementos asociados a cada estilo de aprendizaje.

Como afirma Santaolalla (2014), tras revisar en su tesis doctoral una amplia gama de investigaciones que se centran en el análisis de libros de texto, “los criterios para analizar un libro de texto pueden ser tan diversos como las inquietudes que muevan a los distintos autores a llevar a cabo una investigación centrada en los textos escolares” (p.216). En este sentido, encontramos autores que centran su análisis concretamente en las tareas (Orrantia et al., 2005;

Wijaya et al., 2015), en los modelos didácticos implícitos (Serradó y Azcarate, 2003), las representaciones (Díaz-Levicoy et al., 2016; González y Sierra, 2004; Martínez y Penalva, 2006), los razonamientos (Stylianides, 2009), la detección de errores (Fernández, Caballero y Fernández, 2013; Kajander y Lovric, 2009) o de conflictos semióticos (Arteaga y Díaz-Levicoy, 2016; Gea et al., 2015; Salcedo et al., 2018), así como en aspectos afectivos (Rey y Penalva, 2002). Cada uno de estos se basa en modelos teóricos específicos.

Conviene diferenciar de las anteriores un conjunto de investigaciones que utilizan elementos teóricos y metodológicos del EOS (Godino et al., 2007) para el análisis de libros de textos, en concreto el análisis ontosemiótico. En estos estudios los autores indagan y establecen el significado de referencia de un concepto o tema particular mediante una revisión de tipo histórico-epistemológico, para a continuación, analizar cómo se desarrolla ese significado en los libros de texto y cuáles son las dificultades potenciales que pueden tener los alumnos. Al respecto se encuentran trabajos en contenidos como la suma y resta de números naturales (Godino, Font y Wilhelmi, 2006), la optimización (Balcaza et al., 2017) o la probabilidad (Vásquez y Alsina, 2015). Más recientemente Morales-García y Navarro (2021) y Fúneme et al. (2021) proponen no sólo reconstruir el significado de referencia (del número natural y de longitud respectivamente) para analizar los libros de texto de matemáticas de educación primaria, sino también valorar la idoneidad epistémica del significado de los objetos de estudio en los libros de texto.

1.1.2. Investigaciones sobre análisis de libros de texto en el tema de proporcionalidad

En esta sección resumimos los resultados de algunas investigaciones que analizan el desarrollo de la proporcionalidad en los libros de textos. Si bien se reconoce que “hay una notable falta de investigación sobre el tratamiento de la proporcionalidad en los libros de texto” (Johnson, 2010, p.4), las investigaciones llevadas a cabo permiten reconocer que el tratamiento que se le suele dar al tema en los libros de textos de matemáticas escolares en diferentes niveles

y latitudes no es adecuado, siendo este un factor que puede explicar los problemas o dificultades que muestran los alumnos en su aprendizaje.

Guacaneme (2001) realiza un análisis descriptivo crítico de varios textos escolares de matemáticas dirigidos a alumnos de séptimo grado (edad de 12 a 13 años). El autor examina el abordaje de temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de la proporcionalidad, como son los de razón, proporción, magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales. En los textos escolares que fueron objeto de análisis en dicho estudio se emplean algunos conceptos o nociones para explicar y caracterizar los tipos de proporcionalidad, sin que estos se definieran explícita o implícitamente. Además, en dichos textos, se presenta la razón sólo como un número (bien sea como división indicada, cociente exacto u operador multiplicativo), sin establecer relaciones explícitas entre un enfoque aritmético de razón y proporción y un contexto de magnitudes para abordar la proporcionalidad (Guacaneme, 2001).

En la metodología de análisis de textos empleada por Guacaneme (2001), el autor da especial énfasis a la estructura de los contenidos, las definiciones, ejemplos y ejercitación. El propio autor reconoce que "...no fue tan sistemática e intensa y, por supuesto, no logramos obtener resultados preexistentes que favorecieran significativamente el desarrollo de la investigación" (Guacaneme, 2001, p. 229).

Un avance significativo en este sentido es el estudio de Dole y Shield (2008) quienes crean un marco de criterios para el análisis de libros de texto basado en la literatura sobre proporcionalidad, estudios sobre las dificultades de los estudiantes con tareas relacionadas a las proporciones y documentos curriculares, que después aplicaron al análisis de dos libros de texto de octavo grado (alumnos de 12 años) en Australia. En base a este marco, los autores elaboran un instrumento adaptado del Proyecto 2061 (AAAS, 2000) que revisan y optimizan más tarde en Shield y Dole (2013) aplicándolo al análisis de cinco series de libros de texto de matemáticas

de secundaria. De modo específico Shield y Dole (2013) reconocen cinco puntos claves para la instrucción exitosa del razonamiento proporcional: utilizar situaciones de la vida real que contrasten comparaciones aditivas y multiplicativas, identificar la estructura multiplicativa en situaciones proporcionales, retrasar el algoritmo de proporción estándar (regla de tres), conectar con el tema de fracciones y utilizar gran cantidad de representaciones. Respecto de la investigación anterior (Dole y Shield, 2008), los autores incorporan indicadores que implican analizar si: (a) la representación apoya la identificación de las relaciones *dentro* y *entre* en una situación proporcional, (b) las conexiones entre la representación simbólica a través de los tipos de problemas se hacen explícitos (es decir, los procedimientos de solución se basan en una representación simbólica consistente para problemas de una misma estructura), (c) la introducción de la “ecuación proporcional” formal se retrasa hasta haber adquirido una amplia experiencia con otras representaciones (Shield y Dole, 2013).

Estos indicadores de análisis propuestos por Shield y Dole (2013) fueron también empleados por Ahl (2016) quien justifica su adopción debido a que “los indicadores, así como los objetivos de aprendizaje, se derivan de décadas de resultados de investigación sobre el razonamiento proporcional” (p. 188). La autora analiza dos series de libros de texto suecos de matemáticas, para los grados 7-9.

Los resultados de las investigaciones de Dole y Shield (2008), Shield y Dole (2013) y Ahl (2016), indican la existencia una brecha entre lo que dice la investigación sobre los temas importantes a tratar y el contenido de los libros, debido principalmente al predominio del aspecto algorítmico y procedimental, la carencia de explicaciones que apoyen la comprensión conceptual, la falta de oportunidades para que los alumnos diferencien las situaciones aditivas de las multiplicativas, empleen representaciones simbólicas o establezcan relaciones con el tema de fracciones.

Johnson (2010) analiza cómo se aborda la proporcionalidad en tres series de libros de texto de matemáticas de enseñanza media en Estados Unidos. El análisis se centra en seis aspectos: si la proporcionalidad se aborda como un tema integrador (es decir, se contempla en muchas áreas del currículo¹) en los textos; si se proponen diversos tipos de problemas proporcionales (valor faltante, comparación de proporciones, cualitativos); si se diferencian los razonamientos aditivos de los multiplicativos y se indica cuando es apropiado o no usar cada tipo de razonamiento; los tipos de estrategias de solución que se promueven en los textos; el nivel de exigencia cognitiva de las tareas propuestas; y finalmente, si existen representaciones visuales relacionadas con la proporcionalidad.

Tras el análisis, la autora encuentra que todos los libros apoyaban la comprensión de los números racionales, y que en algunos de estos la presentación del tema es más procedimental y las tareas poseen un nivel de exigencia cognitiva menor. Johnson (2010) también señala la desconexión entre la literatura de investigación y el contenido de los textos en cuanto a los tipos de problemas, dado que los de tipo cualitativo casi no se presentan. Además, en relación con las estrategias de solución, la autora encuentra que, aunque en la literatura se recomienda posponer el algoritmo de multiplicación cruzada (regla de tres), por ejemplo, introduciendo primero estrategias de acumulación y tasa unitaria, estas estaban prácticamente ausentes.

En el contexto español, Gairín y Oller (2012) analizan el tratamiento de los conceptos de razón y proporción en textos escolares desde el año 1850 hasta el 2010. Dicho análisis se centra en determinar los objetos entre los que se define la razón (entre números o entre cantidades de magnitud), su significado (como fracción, cociente o como factor multiplicativo) y la pertinencia del concepto de razón y la idea de proporción. Los resultados del análisis muestran la inexistencia de razones entre cantidades de una misma magnitud y de definiciones

¹ Tales como Álgebra, medidas, probabilidad, semejanza, porcentajes, números racionales, razones y tasas.

de razón entre cantidades de distintas magnitudes en los textos. Los autores recomiendan que la enseñanza priorice la razón “entre cantidades de magnitud” (especialmente las homogéneas) frente a la razón “entre números”, y que la condición de regularidad se establezca explícitamente como una condición indispensable para su cálculo.

Más recientemente Avila (2019) realiza una investigación documental para determinar fortalezas y debilidades de tres propuestas curriculares (libros de textos) entre 1960 y 2011 para la enseñanza de las fracciones² en la educación primaria mexicana. Para llevar a cabo el análisis la autora identifica sub-constructos del número racional, las representaciones y el lenguaje. En la propuesta introducida en 1993, la noción de fracción se abordaba a través de sus diferentes sub-constructos en situaciones consideradas de interés para los alumnos, aunque se observaba una débil relación explícita con razones, proporciones y porcentajes, así como una falta de formalización. Con la reforma de las matemáticas modernas, se prioriza el modelo parte-todo de fracción.

Por último, en Burgos, Castillo et al. (2020) se realiza un análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria. Considerando las facetas epistémica, cognitiva e instruccional los autores realizan una revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos del tema, que constituye la base para analizar la lección identificando posibles conflictos (epistémicos, cognitivos e instruccionales). Los principales desajustes detectados refieren a: situaciones-problemas asociadas mayoritariamente al enfoque aritmético (normalmente problemas de comparación y valor faltante); no se promueven estrategias progresivas para avanzar de un pensamiento aditivo al multiplicativo; las condiciones de regularidad de los problemas de proporcionalidad no se establecen de modo claro y correcto; la regla de tres se muestra desprovista de argumentos; entre otros.

² Aunque el tema central no es la proporcionalidad, el método que emplea para analizar los textos permite que se estudien algunos aspectos que son de interés en esta investigación. En efecto, de acuerdo con Kieren (1998, citado por Avila, 2019) los sub-constructos del número racional son: medida, cociente, razón y operador multiplicativo.

1.2. Formación de profesores para el análisis de materiales curriculares

Teniendo en cuenta el interés de nuestra investigación, en esta sección presentamos en primer lugar, una revisión de estudios sobre desarrollo de conocimientos y competencias en profesores de matemáticas, prestando especial atención a aquellos que tratan de promover la reflexión sobre la práctica docente. A continuación, se describen los antecedentes sobre experiencias formativas en el análisis de recursos curriculares en general. Seguidamente presentamos estudios teóricos relacionados con los modos de uso de recursos curriculares en el aula por parte de los profesores, algunos de estos específicos del área de matemáticas. Finalmente centramos la atención en los estudios sobre el análisis de recursos materiales sobre matemáticas en la formación de profesores.

1.2.1. Desarrollo de conocimientos y competencias docentes

En Educación Matemática han surgido varios modelos que caracterizan los conocimientos y competencias que debería tener un profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018; Chapman, 2014; Godino et al., 2017; Hill et al., 2008; Shulman, 1986). Dentro de estos enfoques se propone la *reflexión sobre la práctica docente* como una competencia fundamental para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza que ha de promoverse en la formación de profesores (Avalos, 2011; Breda et al., 2018; Chapman, 2014; Dyer y Sherin, 2016; Gellert et al., 2013; Giacomone et al., 2018; Godino et al., 2017; Hart et al., 2011; Ramos-Rodríguez et al., 2017).

La reflexión sobre la práctica docente implica según Schön (1984) la interacción entre el pensamiento y la acción. El profesor reflexivo posee destrezas prácticas que pone en acción y que está dispuesto a someterlas a análisis; se trata de criticar, reestructurar y hacer explícitos los significados implícitos en la propia acción (Schön, 1984). A través de los procesos reflexivos, los docentes evitan actuar impulsivamente y llegan a prever los problemas potenciales que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, adquiriendo

competencia en la resolución de situaciones complejas, por lo que dichos procesos deben potenciarse desde la formación inicial del profesorado (Schön, 1987).

Desarrollar la competencia reflexiva requiere adoptar marcos conceptuales y metodológicos que permitan afrontar este objetivo como son, por ejemplo, el *estudio de clases* (*Lesson Study*, Fernández y Yoshida, 2004), *estudio del concepto* (*Concept Study*, Davis, 2008), *mirar con sentido profesional* (*Professional noticing*, Mason, 2002) o la *competencia de análisis didáctico* propuesta desde el EOS (Godino et al., 2017; Godino et al., 2020).

En la metodología del *estudio de clases* (Fernández y Yoshida, 2004; Hart et al., 2011), los profesores trabajan en equipos colaborativos para reflexionar sobre los objetivos de aprendizaje de sus alumnos. Se trata de investigar las clases mediante observaciones y proponer reformulaciones para valorar si los alumnos pueden aplicar su conocimiento en una nueva situación. Los estudios se centran en analizar cómo los profesores se benefician de su participación en estas experiencias generando oportunidades de mejora en sus conocimientos para la enseñanza de las matemáticas; por ejemplo, al realizar cambios significativos en las lecciones contemplando los intereses de los estudiantes, al predecir preguntas y respuestas de los alumnos y dedicar mayor tiempo a la comprensión conceptual (Hart et al., 2011).

A través del *estudio del concepto* (Davis, 2008; Davis, 2015), los investigadores se comprometen con la práctica de los profesores examinando y elaborando modelos para la comprensión matemática, la explicitación y explicación de las estructuras lógicas y las asociaciones que son inherentes a los conceptos matemáticos.

La competencia *mirar con sentido profesional* (Fernández, 2021; Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares, 2012; Mason, 2002; 2016) implica que el profesor de matemáticas identifique aspectos importantes de una situación de enseñanza, use su conocimiento del contexto para reflexionar sobre las interacciones que surgen en el aula y establezca conexiones entre sucesos, principios e ideas sobre la enseñanza y aprendizaje. En esta línea existen investigaciones que

analizan cómo los futuros maestros interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes, a través de la descripción de estrategias de solución que estos emplean, la interpretación de la comprensión matemática o equivocaciones, para luego tomar decisiones (Fernández, 2021; Fernández et al., 2012; Jacobs et al., 2010; Sun, y van Es, 2015).

Dentro de la *competencia en análisis e intervención didáctica* propuesta por el EOS (Godino et al., 2017), se establecen cinco niveles de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje que permiten describir, explicar y valorar dichos procesos. Se trata de involucrar a los profesores en el análisis de las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, las interacciones realizadas en el proceso de instrucción, los sistemas de normas y meta-normas que regulan dicho proceso, y finalmente el *análisis de la idoneidad didáctica*, orientado a la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y gestión para su mejora progresiva (Font et al., 2010).

Según Giacomone et al. (2018) aunque han existido aportes al campo de formación de profesores sobre la competencia de reflexión, las investigaciones existentes suelen centrarse en la descripción de lo que sucede y por qué sucede, sin proporcionar pautas o instrumentos para los futuros profesores. Esto supone que sean los propios formadores los encargados de guiar específicamente la reflexión profesional de un proceso de estudio.

La preocupación desde el EOS por desarrollar herramientas teórico-metodológicas que orienten el análisis y valoración global sobre los procesos instruccionales (Godino, 2013), ha motivado la proliferación de estudios que han adoptado este marco teórico para promover la competencia reflexiva docente empleando diferentes estrategias y contextos matemáticos (Burgos y Godino, 2022; Burgos, Godino et al., 2018; Breda, 2020; Godino, Aké et al., 2014; Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Font y Godino, 2006; Font et al., 2018; Malet et al., 2021; Nogueira, 2015). De modo específico, numerosas investigaciones han empleado la herramienta idoneidad didáctica, sus facetas, componentes e indicadores, para organizar la reflexión del

profesor y desarrollar la competencia de valoración de los procesos de instrucción previstos, planificados o implementados, para permitirles tomar decisiones críticas de mejora (Breda et al., 2017; Burgos et al., 2020; Esqué de los Ojos y Breda, 2021; Giacomone et al., 2018; Pochulu et al., 2016; Posada y Godino, 2017; Seckel y Font, 2020). Otras investigaciones aplican la idoneidad didáctica en la formación de profesores, como herramienta que permite inferir criterios implícitos en los discursos de los participantes (Breda et al., 2018; Breda et al., 2021; Morales-López y Araya-Román, 2020; Morales-López y Font, 2019; Seckel et al., 2019).

Es importante mencionar que las propuestas metodológicas sobre reflexión docente no son excluyentes, sino que las mismas pueden emplearse en la formación de profesores de manera conjunta, como muestran Hummes et al. (2019). Los autores comprobaron que, en la reflexión del estudio de clases, los participantes emplean de modo implícito criterios de idoneidad didáctica, por lo que concluyen que realizar un estudio de clase, previo a la enseñanza de los criterios de idoneidad como pauta para organizar la reflexión del profesorado, puede ser una buena estrategia formativa.

1.2.2. Análisis de materiales curriculares en la formación de profesores

Diversas investigaciones en el marco de la educación general defienden la necesidad de promover, desde la formación de profesores, un posicionamiento crítico de los docentes sobre el uso efectivo de materiales curriculares (entre los que se encuentra el libro de texto) en el aula (Ball y Cohen, 1996; Beyer y Davis, 2012; Braga y Belver, 2016; Kesidou, 2001; Martínez-Bonafé, 1992; Schwarz et al., 2008). Como sugiere Martínez-Bonafé (1992) es importante

explicitar y consensuar en el equipo docente los criterios profesionales con los que juzgamos la calidad de la enseñanza que permite el material, y tomamos decisiones para su selección y uso. Ésta es una tarea profesional no reglada que requiere formación específica (p.2).

Con el fin de promover la discusión en relación con el potencial pedagógico del material curricular, entre los que se encuentra el libro de texto escolar, Martínez-Bonafé (1992) propuso un cuestionario referido a aspectos como: el modelo pedagógico que sugiere el material, contenidos culturales, secuencia, lógica y estructuración, estrategias didácticas que se modelan, modelo de aprendizaje y enseñanza implícita, evaluación y tareas.

Para Ballesta (1995) el libro de texto forma parte de la estrategia metodológica del profesor, constituyendo un medio didáctico; dado que los resultados que se obtengan en el aprendizaje dependen del profesor y de las estrategias que sobre dicho medio aplique, el mismo no debe ser empleado tal y como llega a sus manos. Este autor considera relevante que exista una evaluación del libro de texto y otros materiales, en la que se tenga en cuenta la forma en cómo estos orientan la práctica. Dentro de los aspectos que el autor propone valorar destacan el contenido que se desee tratar, las actividades y la población a la que se dirige. También considera importante reflexionar sobre las dificultades que surgen con su uso, cuestionando a los diferentes protagonistas (alumnos, profesores, padres de familia), qué aspectos potenciarían y cuáles omitirían, y contrastar el uso de materiales elaborados con otros para comprender las ventajas e inconvenientes de los mismos.

Para Ballesta (1995) y Martínez-Bonafé (2008) los libros de texto escolares, al ser el reflejo de las disposiciones curriculares, pueden generar control técnico sobre la práctica de la enseñanza de los profesores. Desde una perspectiva cultural, los materiales no deben contemplarse como una amenaza que les restan protagonismo o profesionalidad a los profesores, sino como recursos necesarios para la enseñanza. Sin embargo, dada la amplitud de fuentes de información que existen, el profesor no debe limitarse al uso del libro de texto exclusivamente (Ballesta, 1995).

Ball y Cohen (1996) rechazan las posturas rígidas reformistas, que plantean que “los buenos docentes no siguen los libros de texto” (p.6), debido a que estas han llevado a muchos

docentes a repudiar el libro de texto. Contrariamente plantean que su selección y adopción debe ser un componente esencial de un enfoque sistémico del desarrollo profesional. En línea con la opinión de Ball y Cohen (1996) sobre que “los docentes podrían involucrarse con los materiales curriculares de manera que generaran aprendizaje si los materiales se integraran en un programa de desarrollo profesional destinado a mejorar su capacidad para enseñar” (p.8), Kesidou (2001) propone utilizar con profesores en formación y en servicio la herramienta de análisis de materiales curriculares del Proyecto 2061 (AAAS, 2000). En el contexto del proyecto de desarrollo profesional implementado por Kesidou (2001) en el que se buscaba que los profesores de ciencias en servicio desarrollaran habilidades de selección y adaptación de materiales curriculares para su uso en sus aulas, se evidenció que estos fueron más críticos conforme avanzó la experiencia. Los participantes pasaron de centrarse en criterios superficiales y familiares para ellos (por ejemplo, que se incluyeran dibujos e ilustraciones) a referirse directamente a los Criterios de Análisis de Instrucción del Proyecto 2061. Además, las evaluaciones de los libros de textos fueron en general consistentes con las valoraciones preliminares desarrolladas por el personal del proyecto (Kesidou, 2001). Posteriormente estos criterios fueron aplicados en el contexto de formación de profesores de ciencias por autores como Schwarz et al. (2008) y Beyer y Davis (2012).

La investigación de Schwarz et al. (2008) con profesores de primaria y secundaria de ciencias en formación, se preocupa por una problemática ampliamente reconocida en distintas disciplinas como lengua (Grossman y Thompson, 2008)³ o matemáticas (Nicol y Crespo, 2006); a saber, la dependencia que los profesores principiantes (con poca experiencia práctica) suelen tener de los materiales curriculares; no sólo para guiar su enseñanza sino también para

³ El estudio de Grossman y Thompson (2008) se realizó con maestros de inglés en su primer año de práctica, mostrando que algunos de ellos no criticaron los materiales con anticipación a su uso, ni los adaptaron a sus necesidades. Se reconoce, que las necesidades, la falta de conocimientos y experiencia de los maestros novatos pueden influir en el modo de uso de los materiales, en este caso usándolos sin criticarlos. Consecuentemente, la formación del profesorado debería de atender la problemática de análisis crítico de los materiales curriculares.

apoyar sus conocimientos científicos, lo cual puede tener efectos negativos debido a que frecuentemente los materiales curriculares no poseen una buena calidad. En este caso, los resultados fueron menos alentadores ya que, aunque algunos docentes adoptaron y aplicaron con precisión ciertos criterios, otros los consideraron como poco útiles o comprensibles, basando sus decisiones en juicios propios (Schwarz et al., 2008).

Los autores explican que muchos de los maestros consideraron el procedimiento de análisis curricular como un trabajo demasiado detallado, frustrante e incluso poco útil para sus objetivos de enseñanza. También observaron que en general, los docentes suelen tener un enfoque intuitivo y holístico y no un enfoque analítico y crítico para interactuar con los materiales. Para Schwarz et al. (2008), los instrumentos diseñados y empleados para ayudar a los maestros a adquirir una postura crítica y razonada deben tener significados accesibles a los maestros y mostrarse relevantes para su práctica futura. Es decir, ha de procurarse que los maestros tengan oportunidad de dotar de sentido a los criterios de análisis participando de su uso. A la vez que proponen que estos criterios pertenezcan a un marco coherente y global.

Al igual que Schwarz et al. (2008), Beyer y Davis (2012) también utilizaron en su estudio un enfoque basado en criterios, para guiar a futuros maestros de primaria de ciencias en el análisis de materiales del plan de estudios, que les permitiera hacer adaptaciones productivas en la planificación de un proceso de instrucción. No obstante, Beyer y Davis (2012) proponen un modo diferente del uso de criterios de análisis; se trata de un enfoque por andamios, entendidos como apoyos temporales que permiten a los alumnos participar en tareas complejas que son difíciles de llevar a cabo por sí mismos, pero que después pueden desvanecerse gradualmente. De esta forma, los autores propusieron a los participantes emplear los criterios basados en la reforma para analizar tres planes de lecciones. Luego debían analizar dos planificaciones de lecciones de sus propias prácticas, pero en este caso podían elegir los criterios que iban a emplear para su análisis. Finalmente, se les solicitó analizar una lección sin

ningún apoyo. Según los autores un aspecto crítico en la formación fue brindar la oportunidad a los maestros de aplicar uno de los criterios en múltiples planes de lecciones.

En su experiencia, Beyer y Davis (2012) también decidieron omitir la rúbrica de puntuación que forma parte de los criterios del Proyecto 2061. Estas modificaciones les permitieron obtener mejores resultados a los de Schwarz et al. (2008) en cuanto al uso de los criterios. Los autores concluyen que los maestros en formación pueden beneficiarse del uso de criterios de análisis, desarrollando mejores capacidades para aplicar su conocimiento y posibilitando la identificación de fortalezas y debilidades de los materiales para realizar cambios oportunos. Sin embargo, también encontraron que los maestros suelen tener dificultades de comprensión de algunos de los criterios para el análisis de los materiales, expresando interpretaciones alternativas a los mismos (Beyer y Davis, 2012). En este estudio, los autores corroboran los resultados de investigaciones anteriores que mostraban como “el grado de utilización de determinados criterios por parte de los profesores en formación depende de si la tarea de análisis fomenta explícitamente su uso o no” (p. 154). En efecto, encuentran que los participantes no emplean los criterios aprendidos recientemente si no se les proporciona recordatorios explícitos para usarlos en las tareas de análisis. Por ello, recomiendan que los apoyos a los profesores en formación (por ejemplo, de advertencias para que consideren criterios particulares en sus análisis) deben desaparecer gradualmente, según vayan siendo capaces de completar aspectos cada vez más complejos de la tarea por sí mismos.

Por su parte, Braga y Belver (2016) establecieron criterios para juzgar la calidad didáctica, fortalezas y debilidades de los libros de texto, de acuerdo a varias dimensiones: aspectos formales (calidad didáctica de las imágenes y relación con los mensajes), metodología (individualista/grupal, estrategias de evaluación, actividades), mensajes (selección cultural, valores, estereotipos, ideologías), implicaciones para la profesión docente (justifica las opciones didácticas, adaptaciones, reflexión), uso que se le da al material por parte del usuario,

análisis del desarrollo del medio o material (conceptualización, diseño, marketing, selección, distribución). Basados en esas dimensiones los autores diseñaron un guion de análisis que incluye preguntas abiertas de reflexión, las cuales emplearon como instrumento en una acción formativa sobre análisis de libros de texto escolares con estudiantes del grado de Pedagogía. Los resultados evidencian las dificultades de los participantes para entender qué se pretendía analizar, debido principalmente a que estaban acostumbrados a no cuestionar la naturaleza del conocimiento académico incluido en los textos (Braga y Belver, 2016). Los autores concluyen las enormes potencialidades de llevar a cabo estas acciones formativas que resultan ser experiencias motivadoras y que permiten la reflexión de los futuros docentes.

1.2.3. Modos de uso de materiales curriculares por profesores

Autores como Törnroos (2005) y Thompson (2014) afirman que los libros de texto de matemáticas son un factor influyente en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes y su rendimiento, lo que implica que su análisis puede producir información valiosa a la hora de buscar explicaciones sobre el rendimiento de los alumnos en matemáticas. Törnroos (2005) considera necesario agregar a los tres niveles del modelo curricular: curriculum previsto, implementado y alcanzado, un nivel extra que considere a los libros de texto como un factor que afecta las oportunidades de aprendizaje matemático:

esto puede hacerse añadiendo un nivel, el "currículo potencialmente implementado", como etapa intermedia entre el currículo previsto y el implementado. El currículo potencialmente implementado abarca los libros de texto y otros materiales didácticos escritos utilizados en clase (p. 317).

Esta misma idea la enfatiza Thompson (2014) cuando afirma que “los libros de texto son un puente entre el plan de estudios previsto de las normas y su promulgación en el aula” (p.142). Ambos autores concuerdan en que comprender la información existente en los libros de texto se vuelve un factor clave tanto para valorar las oportunidades y los logros de los

alumnos, como para realizar cambios prudentes en la forma de emplearlo como un recurso potencial en el aula. Por este motivo, es relevante considerar cómo los usan los maestros y qué lleva a aprender a los estudiantes (Thompson, 2014; Törnroos, 2005).

Una propuesta teórica reconocida en Educación Matemática sobre el uso de libros de texto es la que plantea Remillard (2005), al proponer un marco para caracterizar los modos de uso de los materiales curriculares por parte de los profesores. En dicho marco se asume que el profesor debe ser un usuario del curriculum, donde este interpreta y transforma activamente los materiales para diseñar su instrucción y se asume que existe una relación interactiva y dinámica entre el maestro y los materiales curriculares (Remillard, 2005).

El marco teórico propuesto por Remillard (2005) considera cuatro componentes: (a) el maestro, (b) el plan de estudios, (c) la relación participativa entre ellos y (d) el plan de estudios resultante planificado y promulgado. En relación con la enseñanza, se asume que los profesores deben comprometerse con el diseño curricular y se contemplan el currículo planificado o previsto y el currículo aplicado o experimentado (aquello que tiene lugar en el aula). Producto de la relación participativa que se asume entre el docente y los materiales curriculares, los procesos de diseño antes, durante y después de la instrucción en el aula, quedan determinados por los aportes del profesor y del currículo.

Tanto Remillard (2005) como Brown (2009) ponen de manifiesto que no todos los profesores interactúan con los libros de texto de la misma forma, dado que existen múltiples factores que pueden influir en el modo de uso. En el modelo *Design Capacity for Enactment Framework* propuesto por Brown (2009) se relacionan factores claves que median la relación entre los docentes y los materiales o recursos disponibles. Asimismo, este autor define el concepto *pedagogical design capacity* como la habilidad de un docente para percibir las posibilidades de los materiales y tomar decisiones sobre cómo usarlos. De acuerdo con Brown (2009) el modo en que los profesores usan los materiales, para su planificación o en su práctica,

depende no sólo de los recursos físicos disponibles, como puede ser el libro de texto, sino también de sus recursos personales, es decir, sus conocimientos, objetivos y creencias.

En esta línea, los estudios de Choppin (2011) y Taylor (2013) evidencian como el considerar la complejidad de la práctica llevó a los profesores, participantes de procesos de desarrollo profesional a largo plazo, a realizar adaptaciones sobre los materiales curriculares que empleaban como recursos didácticos, en particular la optimización de su secuencia de instrucción y de algunas tareas (Choppin, 2011). Taylor (2013) indica que las adaptaciones de los materiales más eficaces a la hora de facilitar el aprendizaje son aquellas que surgen cuando los maestros consideran las necesidades y conocimientos de los estudiantes en un momento dado. La tarea de ajustar los materiales implica que el profesor evalúe qué se debe cambiar y porqué, así como realizar cambios que concuerden con el planteamiento de los autores del material y los suyos propios (Taylor, 2013). Consecuentemente, dicha tarea es según el autor la de mayor complejidad para los profesores, "puede ser mucho más fácil utilizar un texto como un guión o desecharlo por completo que tomar lo que hay, evaluar su relevancia para un grupo particular de estudiantes y luego modificarlo en consecuencia" (p.314).

Siguiendo a Brown (2009), Taylor (2013) afirma que a medida que el profesor adquiere mayor habilidad para identificar las posibilidades de los materiales y tomar decisiones oportunas, tendrá más capacidad para adaptar el currículo. Por tanto, es relevante que los docentes evalúen primero la idoneidad y accesibilidad de estos materiales para sus alumnos, para que puedan modificarlos después en consecuencia. Dicho autor sugiere, que deben promoverse oportunidades para que los maestros desarrollen una trayectoria de uso efectivo del currículo, lo que supone pasar de usar los materiales tal y como se presentan, a adaptar los mismos.

Más recientemente Shower (2017) estudia que factores pueden influir en que los profesores sean *desarrolladores del currículo* y no meros transmisores a nivel de aula.

El desarrollo del currículum docente ocurre a través del desarrollo docente y el uso del currículum oficial de una institución a través de diversas estrategias. Sus desarrollos pueden involucrar suplementos y adaptaciones de temas y materiales curriculares recibidos. Por ejemplo, agregan temas de lecciones desde fuera del libro del curso y les enseñan a través de su propio material. Enseñan lecciones relevantes del libro de cursos, pero las complementan con su material para facilitar el aprendizaje. El desarrollo del currículum de los docentes también puede incluir saltos de las lecciones del libro, saltos de actividades dentro de las lecciones del libro, cambios en el orden de las lecciones, cambios en el orden de las actividades dentro de las lecciones y actividades de adaptación dentro de las lecciones del libro (Shawer, 2017, p.298).

En su investigación con profesores en ejercicio Shawer (2017) observó que la conveniencia de uso del libro de texto, la calidad de los libros, la presión del trabajo, la formación previa y experiencia docente, el conocimiento del contenido, los estilos de enseñanza y sus propias creencias, fueron los factores determinantes para que los participantes fuesen o no desarrolladores del currículum. Según Shawer (2017) la calidad de la formación y la experiencia de los profesores podrían haber influido, de modo que los *transmisores* no hayan alcanzado habilidades de desarrollo curricular, generando en ellos dependencia del libro de texto porque esto les generaba mayor seguridad. Por el contrario, los *desarrolladores* y *creadores* del currículum dejaron en claro que tienen buen conocimiento del contenido de la materia, así como conocimientos pedagógicos y curriculares, pero también sienten confianza y seguridad en su desempeño (Shawer, 2017). La calidad de los libros también fue un factor influyente, de modo que los *desarrolladores* del currículum suelen usar buenas actividades, mientras que los *transmisores* no tienen en cuenta la calidad del libro de texto (Shawer, 2017). En base a esto, el autor propone que la formación en la valoración de la calidad de los materiales es un factor importante que ha de tenerse en cuenta en los programas de formación docente. De

manera específica, Shaver (2017) propone que se forme a los profesores para que complementen las lecciones de libro de texto con otro material, las adapten y propongan nuevos temas. Así mismo manifiesta que “los programas de formación inicial y continua pueden sensibilizar a los profesores para que consideren la calidad de los libros de texto y los criterios de evaluación de estos antes de utilizarlos” (p. 311).

Otro factor que influye en el uso de los materiales curriculares viene determinado por las creencias del profesor (Brown, 2009). Al respecto, Lloyd (2002) plantea que hay pocos estudios que analizan las convicciones de los docentes sobre el currículo y la relación de estas con otras creencias (sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje) y cómo se desarrollan en la formación del profesor. De acuerdo con este autor, cuando los docentes trabajan con materiales curriculares se reflejan sus creencias sobre el plan de estudios, las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza, por lo que es posible que, al involucrarlos en experiencias de reflexión sobre el diseño y los usos de los materiales curriculares, puedan desarrollar creencias ricas sobre el papel de estos recursos en la enseñanza de la matemática e incluso generar cambios en las creencias y prácticas docentes. No obstante, Lloyd (2002) advierte que los docentes necesitan orientación para tomar decisiones pedagógicas razonadas sobre el uso de materiales curriculares y cómo incorporarlos en su instrucción.

...Deberíamos tomarnos más en serio el poderoso papel que los materiales curriculares pueden desempeñar en el aprendizaje de los docentes a lo largo de sus carreras. La mayoría de los profesores se basan en uno o dos libros de texto primarios para guiar su instrucción en el aula. Si los profesores pueden aprender a utilizar sus libros de texto para su propio desarrollo personal, estarán mejor preparados para aprender de los tipos de materiales que seguirán apareciendo en los entornos escolares en el futuro y trabajar de forma productiva con ellos. (Lloyd, 2002, p.157)

Con relación al modelo sobre las interacciones docentes con los materiales curriculares propuesto por Remillard (2005), Rezat (2012) indica que, aunque considera el papel de los estudiantes como un factor influyente en el currículo promulgado, dicho modelo no conceptualiza explícitamente a los alumnos como usuarios activos del material. Para Rezat (2012) la investigación debe considerar el modo en que los alumnos usan el texto, ya que el curriculum promulgado también se ve influenciado por estos usuarios. De este modo, el conocimiento del profesor debe incluir los modos de uso de los libros de texto por parte de los alumnos y no sólo limitarse a analizar las oportunidades de aprendizaje que estos ofrecen (Rezat, 2012).

El modelo de Rezat (2012) considera tanto a los docentes y a los estudiantes como usuarios activos de los recursos. Así, en relación con los modos de uso por parte del profesor de matemáticas, Rezat (2012) señala dos usos predominantes observados en la investigación: como fuentes de tareas y problemas, y como guía para la instrucción, estando este último relacionado con las decisiones sobre qué enseñar, qué enfoque de instrucción seguir y cómo presentar el contenido. Así mismo, afirma que algunos docentes cuando planifican un proceso de instrucción dependen en gran medida de los libros de textos, por lo que con frecuencia el contenido matemático que finalmente se aborda en el aula se ve fuertemente influenciado por el texto.

Más recientemente, Remillard y Kim (2017) proponen una terminología concreta para referirse al *conocimiento de las matemáticas integradas en el currículo* (KCEM, por sus siglas en inglés), el cual se entiende como aquel conocimiento que los profesores activan al leer e interpretar tareas matemáticas, diseños instruccionales y representaciones en materiales curriculares. Este autor lo enmarca como un aspecto específico de la enseñanza en donde se activan los modelos de conocimiento didáctico de contenido propuestos por Shulman (1987).

Con la intención de definir un marco para identificar las demandas matemáticas al trabajar con materiales curriculares para diseñar procesos de instrucción, en el que se asume que existe una relación dinámica e interactiva entre los recursos curriculares y el profesor, Remillard y Kim (2017) proponen las siguientes cuatro dimensiones:

- Dimensión 1: *Ideas matemáticas fundamentales*. Los materiales integran ideas y conceptos matemáticos que se muestran a través de diversos medios como pueden ser los objetivos de aprendizaje, tareas, modelos o sugerencias pedagógicas. Por tanto, los docentes deben reconocer esas ideas fundamentales implícitas, lo que implica emplear su conocimiento para valorar la idoneidad matemática general y específica de cada idea y contemplar su adaptación al contexto.
- Dimensión 2: *Representaciones y conexiones entre ellos*. El uso de representaciones en los materiales curriculares es usual. Consecuentemente, el docente debe ser capaz de reconocer y comprender las conexiones entre diferentes representaciones de la misma idea matemática.
- Dimensión 3: *Complejidad relativa del problema*. Los materiales suelen contener multiplicidad de tareas y preguntas relacionadas. Al utilizar materiales curriculares, los profesores deben ser capaces de determinar qué problemas son apropiados para sus estudiantes, evaluando y comprendiendo su complejidad. También deben poder categorizar y ordenar las tareas según el nivel de dificultad, identificar posibles dificultades o errores de los alumnos asociados a resolver una tarea específica.
- Dimensión 4: *Secuencia del aprendizaje matemático*. Los materiales curriculares reflejan vías de aprendizaje sobre las ideas y habilidades matemáticas a lo largo de un tiempo determinado. El profesor debería reconocer estas vías de aprendizaje y comprender cómo se trabajan los objetivos dentro de un conjunto de ideas que se desarrollan con el tiempo. Para esto, los profesores necesitan reconocer cómo ha sido

integrado un concepto particular en los grados anteriores y posteriores, es decir, entender cómo se relacionan las ideas matemáticas enseñadas durante un período de tiempo amplio.

Según Remillard y Kim (2017) estas dimensiones permiten identificar las formas en que las ideas matemáticas se integran en los recursos curriculares y sirven para comprender aquellos conocimientos que los profesores deben activar para planificar con los recursos curriculares. Por tanto, pueden orientar también el apoyo que se debe dar a los profesores para el uso de los materiales curriculares.

1.2.4. Análisis de recursos materiales de matemáticas en la formación de profesores

En esta sección describimos los resultados de investigaciones sobre el análisis de materiales curriculares de matemáticas en la formación docente, que son importantes para nuestro trabajo.

El estudio de Remillard (2000) se centra en analizar la influencia de los libros de texto de matemáticas en el aprendizaje de los docentes. Los resultados muestran que, aunque el libro de texto proporcionó información sobre los temas a tratar, así como conceptos matemáticos, representaciones y tareas que los maestros utilizaron en sus planificaciones, estos recursos por sí mismos no generaron aprendizaje o reflexión en los maestros. La adaptación a los alumnos y al contexto y la toma de decisiones fue lo que generó crecimiento en los maestros (Remillard, 2000). En base a sus resultados la autora sugiere que las actividades de desarrollo profesional y de formación docente deben ayudar a los docentes a hacer un uso productivo de los materiales. De modo específico recomienda que se trabaje la toma de decisiones para adaptar y transformar los materiales, a la vez que se profundicen y amplíen los conocimientos matemáticos para mejorar sus habilidades en la valoración de tareas, objetivos y en general en el análisis crítico de los libros (Remillard, 2000).

La investigación de Lloyd y Behm (2005) se centra en el análisis de libros de texto de matemáticas por parte de futuros maestros de primaria. En dicho estudio se propuso a los participantes la tarea de comparar y contrastar fragmentos de dos secciones de lecciones de libros de texto sobre geometría que tienen diferencias en cuanto al enfoque para abordar el contenido (una tradicional y otra orientada a la reforma en USA). Los autores citan a Simon (1994) para plantear algunas distinciones entre cada enfoque. Por un lado, la propuesta de instrucción tradicional se caracteriza porque no existen situaciones para que los estudiantes comuniquen ideas matemáticas o negocien significados; normalmente se presenta un resumen de ideas seguidas de aplicación en contextos específicos, los conceptos suelen ser presentados por el docente siendo este responsable de validar las ideas o bien se atribuye al texto, las aplicaciones se limitan a poner práctica las ideas presentadas. Por otro, la propuesta enfocada en la reforma sí incluye situaciones para que los propios estudiantes comuniquen ideas y negocien, se promueve la resolución de problemas y posteriormente la abstracción o generalización de ideas, la validez de las ideas reside en la comunidad del aula, y las aplicaciones implican la exploración de nuevas ideas previamente desarrolladas.

Lloyd y Behm (2005) solicitan inicialmente a los participantes analizar los materiales sin ninguna guía o estructura, para que los participantes desarrollaran sus propias ideas sobre qué buscar al examinar los materiales. Posteriormente, se proponen preguntas específicas de comparación de ambos materiales (por ejemplo, cuál les gusta más, cuál se usa normalmente en el aula, qué cambios realizarían, entre otras). Lloyd y Behm (2005) encontraron que los futuros maestros se centraron en características tradicionales que les resultaban familiares tales como: la presencia de reglas, ejemplos, problemas prácticos. Además, cuando los participantes comparaban los materiales, manifestaban su preferencia por la propuesta tradicional y se concentraban en señalar aspectos que no estaban presentes en la propuesta basada en la reforma (como ejemplos o fórmulas), es decir, los futuros docentes se preocuparon más por la claridad

de la información que por considerar de forma profunda los tipos de comprensión que los alumnos podían o no desarrollar llevándolos a hacer interpretaciones erróneas de las lecciones (Lloyd y Behm, 2005). Los autores plantean como posibles mejoras a su intervención: involucrar a los maestros en mayor profundidad en el análisis de la comprensión matemática que los alumnos puedan obtener de los materiales y del propósito o calidad de las interacciones que en ellos se promuevan, así como involucrar a los participantes en la toma de decisiones curriculares, por ejemplo, solicitándoles que realicen cambios en los materiales. Finalmente, Lloyd y Behm (2005) afirman que estas acciones en la formación de profesores son significativas para el aprendizaje de los maestros, debido a que en el análisis de los materiales se ponen en juego tanto el conocimiento de la materia como concepciones pedagógicas. Asimismo, resulta un contexto rico en donde es posible trabajar las creencias que los maestros tienen sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, invitándolos a explorar algunas de sus propias creencias incuestionables (Lloyd y Behm, 2005).

Nicol y Crespo (2006) investigaron cómo cuatro futuros maestros de primaria canadienses analizan e interpretan un libro de texto y cómo, posteriormente, lo utilizan en un entorno de prácticas. En primer lugar, los autores plantean a los futuros maestros analizar el libro de texto fijándose en aspectos como las teorías de aprendizaje, los métodos de enseñanza o la manera de introducir el contenido, entre otras características. Posteriormente proponen a los participantes realizar un análisis más profundo desde una perspectiva matemática y pedagógica. Al respecto, observan que los participantes realizan análisis más descriptivos (se centran en indicar cómo se secuencian las lecciones, cómo se introducen los temas y los tipos de problemas propuestos) que analíticos.

En cuanto a los modos de uso de los libros de texto por parte de los participantes, los clasificaron en tres tipos: adhesión (el docente se adhiere completamente a la propuesta en el libro de texto), elaboración (el docente considera el libro como el principal recurso, pero

elabora y amplía las propuestas de este) y creación (el docente considera el libro como un recurso entre muchos otros, se apoya en estos para extraer ideas que le permiten crear sus propias unidades didácticas). Al respecto, las autoras plantean la necesidad de indagar cómo puede promoverse que los maestros principiantes puedan adoptar modelos de adaptación del texto, basado en juicios pedagógicos y no en un modelo de adhesión.

De modo similar a los resultados encontrados por Remillard (2000), Nicol y Crespo (2006) percibieron que fueron las oportunidades de adaptarlos, cambiarlos y darles sentidos en la práctica, lo que promovió que los participantes se cuestionaran su propia comprensión de las matemáticas y cómo podrían enseñarla. También encontraron que los futuros maestros suelen buscar en los textos respuestas a múltiples cuestiones. Los futuros maestros pensaban que estos les ayudarían a controlar y gestionar la enseñanza y aprendizaje e incluso a aprender conceptos y principios matemáticos que debían enseñar; sin embargo, resultó que el análisis de los textos les planteaba más preguntas que respuestas (Nicol y Crespo, 2006).

En este sentido, las autoras advierten que aprender de un libro los conceptos no es suficiente para que estos adquieran la comprensión conceptual que se espera de los futuros maestros. Esto refuerza la idea de que a pesar de que los materiales curriculares no están necesariamente diseñados para el aprendizaje docente (Ball y Cohen, 1996) los mismos posibilitan el planteamiento de preguntas a los futuros docentes, por lo cual “los formadores de docentes podrían considerar cómo el uso y el análisis de textos tradicionales pueden ser oportunidades para iniciar y apoyar el aprendizaje de los docentes en formación” (Nicol y Crespo, 2006, p. 352). Finalmente, las autoras invitan a reflexionar formas en las que desde la formación docentes se motive a aprender de los textos y no generar un rechazo al uso de estos.

Más recientemente Yang y Liu (2019) exploran las críticas que maestros taiwaneses de matemáticas realizan a una serie de libros de texto de geometría para los grados 8 (13 a 14 años) y 9 (14 a 15 años de edad). Los resultados mostraron que los participantes prestaron más

atención en sus críticas a aspectos relacionados con las prácticas docentes; es decir características que reflejaban sus hábitos de enseñanza y creencias, así como la estructura y extensión de los contenidos. En general se mostraron críticos con relación a si los materiales permitían al alumno aprender la generalidad de las matemáticas con representaciones accesibles, si el contenido se aborda desde diferentes puntos de vista y con diferentes tipos de problemas, y si los niveles de dificultad de las tareas eran variados. Estos autores clasificaron estas críticas considerando las posibles creencias asociadas, a raíz de lo que proponen adaptar estas categorías para ser empleadas en la promoción de la competencia de análisis de materiales curriculares en la formación de profesores.

1.3. Razonamiento proporcional en la formación de profesores

A pesar de la importancia que tiene el estudio de la proporcionalidad en los currículos de Educación Primaria y Secundaria, y su presencia transversal a diversas materias (Lamon, 2007; Lesh et al., 1988; Weiland et al., 2021), razones y proporciones no suelen recibir un tratamiento adecuado en los textos (Ahl, 2016; Burgos, Castillo et al., 2020; Shield y Dole, 2013). A pesar de que, diversos autores defienden la pertinencia de iniciar el estudio de la proporcionalidad con una aproximación informal-cualitativa previa a su formalización y algoritmización (Fernández-Lajusticia, 2001), en la mayoría de los textos de matemáticas escolares de primaria, se observa un uso indiscriminado y descontextualizado de la regla de tres, que evita argumentar sobre las condiciones que permiten aplicar este procedimiento al resolver una determinada situación-problema. Esto influye en que la enseñanza efectivamente implementada en la práctica educativa esté sesgada hacia el aspecto algorítmico obstaculizando un adecuado razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2012; Lamon, 2007).

Numerosos estudios muestran que tanto estudiantes como profesores de diferentes etapas educativas encuentran dificultades con el razonamiento proporcional (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Buforn et al., 2018; Fernández et al., 2013; Hilton y Hilton, 2019; Izsák

y Jacobson, 2017; Riley, 2010; Weiland et al., 2019). En particular, los profesores en formación y en ejercicio, no vinculan la proporcionalidad con las fracciones (Sowder et al. 1998), tienen dificultades para discernir situaciones directamente proporcionales y diferenciarlas de otras relaciones que no lo son (Izsák y Jacobson, 2017; Lim, 2009; Nagar et al., 2016; Weiland et al., 2019), en particular para diferenciar situaciones aditivas y multiplicativas (Hilton y Hilton, 2019). También muestran limitaciones para interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Livy y Vale, 2011) y para comprender los significados de razón y proporción (Buforn et al., 2018).

Un conocimiento limitado sobre los múltiples procedimientos de resolución (flexibilidad) en problemas de proporcionalidad y para justificar cuál de los métodos es más eficaz (Berk et al., 2009), lleva a profesores en formación y en ejercicio a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (Riley, 2010), y a recurrir a explicaciones procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de valor faltante en los que se establece una relación de proporcionalidad (Post et al., 1991). Además, con frecuencia, los profesores centran la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional (aplicación de reglas y algoritmos) sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (Lamon, 2007).

Son menos los estudios que se han realizado sobre proporcionalidad inversa en profesores (Weiland et al., 2019). Los profesores suelen confundir problemas inversamente proporcionales con los directamente proporcionales o afines (Arıcan, 2019a; Orrill et al., 2010; Weiland et al., 2019) y aplicar el método de multiplicación cruzada para resolver distintos problemas de proporcionalidad inversa (Cabero-Fayos et al., 2020). El estudio de Arıcan (2019a) también sugiere que para los futuros profesores identificar relaciones directamente proporcionales puede ser más fácil que reconocer relaciones inversamente proporcionales.

Por último, autores como Buforn y Fernández (2014), Burgos y Godino (2018; 2022), Burgos, Beltrán-Pellicer et al. (2018), Burgos, Godino et al. (2018), Fernández et al. (2012; 2013) y Rivas et al. (2012) ponen de manifiesto como un conocimiento limitado del contenido de la proporcionalidad, influye negativamente en la adquisición de otras competencias como *mirar con sentido profesional* o el *análisis ontosemiótico* de tareas. Por ejemplo, en el estudio de Fernández et al. (2012) encontraron que los futuros docentes de educación primaria tienen dificultades en identificar si las estrategias que usan los estudiantes de primaria eran correctas o no al resolver situaciones proporcionales y no proporcionales, debido a que ellos mismos no discriminan ambas situaciones. Se concluye la importancia y significatividad de involucrar a los profesores en formación y en ejercicio en actividades de formación y crecimiento profesional dirigidas al conocimiento de la proporcionalidad y al desarrollo de habilidades y conocimientos pedagógicos para enseñar el tema (Ben-Chaim et al., 2012; Hilton y Hilton, 2019).

Si bien, existen estudios que proponen recomendaciones generales para la formación docente y desarrollo profesional basados en los avances de la investigación en el área (Sowder et al., 1998), o como producto de implementar intervenciones formativas y obtener resultados positivos (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Izsák y Jacobson, 2017), son pocas las investigaciones que se han propuesto clarificar cuáles son los conocimientos que se requieren para la enseñanza eficaz del tema de proporcionalidad de modo que sean operativos en la formación de profesores (Weiland et al., 2021). Weiland et al. (2021) en base a la revisión de estudios académicos previos (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Izsák y Jacobson, 2017; Sowder et al., 1998; entre otros) crearon un marco de la comprensión del razonamiento proporcional que deberían tener los profesores para su enseñanza (ver Tabla 1.1).

Tabla 1.1

Descripciones observables sobre conocimientos necesarios para una comprensión sólida del razonamiento proporcional para maestros

Recurso de conocimiento	Descripciones observables
Comparación de cantidades	Establece la razón como una comparación de dos cantidades
Porciones	Atiende a la naturaleza adherida de las cantidades en la relación.
Comparación multiplicativa	Comparte la descripción de la relación de las cantidades que es multiplicativa.
Covarianza	Reconoce que, como una cantidad varía en un número racional, la otra cantidad debe covariar para mantener una relación constante
Razón como medida	Identifica una cantidad extraíble creada a partir de la combinación de las dos cantidades (por ejemplo, sabor o velocidad) o analiza el efecto de cambiar un atributo en términos de su efecto en la relación
Razones	Describe las razones como parte: parte o parte: todo
Razones \neq Fracciones	Establece que la razón no es realmente lo mismo que una fracción
Unidad de medida	Utiliza la relación entre las dos cantidades para desarrollar relaciones compartidas como la cantidad por uno o la cantidad por x.
Equivalencia	Describe la proporción como una relación de igualdad entre razones o fracciones.
Razón constante	Reconoce la relación multiplicativa invariante entre dos cantidades.
Escalando hacia arriba abajo	Utiliza la multiplicación para escalar ambas cantidades para obtener de una relación en una clase de equivalencia a otra.
Particionamiento y mosaico	Divide o itera un conjunto continuo o un conjunto de objetos discretos en partes de igual tamaño, incluye estrategias de construcción progresiva.
Conocimiento del horizonte	Demuestra conocimiento que se extiende a las matemáticas más allá de las proporciones.
Pensamiento relativo	Demuestra razonamiento multiplicativo sobre el cambio en una cantidad relativa a sí mismo u otra cantidad.
Situación proporcional	Reconoce si una situación implica razonamiento proporcional.
Piezas variables	Utiliza el concepto de un número fijo de grupos cuyas unidades o tamaño pueden cambiar.
Distorsión	Describe, "que las cosas no deben distorsionarse" en contextos de similitud.
Fluidez en la representación simbólica	Maneja y emplea representaciones simbólicas de manera significativa.
Reglas	Comparte una regla verbal o escrita establecida de una manera que transmite una relación generalizable.

Nota. Traducido y adaptada de Weiland et al. (2021, p.14)

Weiland et al. (2021) señalan que dicho marco no constituye una lista exhaustiva de conocimientos, sino que prioriza puntos de vista de la Educación Matemática basados en investigaciones previas que probablemente ayudarán al profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

2. Síntesis y problema de investigación

A continuación, basándonos en la revisión de antecedentes, precisamos aquellos vacíos o carencias que justifican el problema de investigación que tratamos de abordar:

- Pocos estudios proponen un instrumento para guiar el análisis global de lecciones de libros de texto fundamentado desde la propia Didáctica de las Matemáticas.

Como hemos puesto de manifiesto, son escasos los estudios que analizan globalmente la lección de un libro de texto en un tema matemático en específico (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Además, estos en general no proponen un instrumento de análisis para realizar una observación global y sistemática (Monterrubio y Ortega, 2012; Santaolalla, 2014) sino que se apoyan en la técnica de análisis de contenido. Por un lado, en las pocas investigaciones que ofrecen instrumentos para el análisis de libros de texto de matemáticas, los fines para los que fueron diseñados (elegir el libro más adecuado para un centro escolar, analizar si un libro promueve diferentes estilos de aprendizaje) pueden restar importancia al análisis exhaustivo de la actividad matemática. Por otro, las investigaciones que se centran en el estudio de aspectos más concretos, como pueden ser las representaciones o las tareas matemáticas, y proponen metodologías de análisis (Martínez y Penalva, 2006; Orrantia et al., 2005; entre otros), no consideran otros factores que en nuestra opinión han de considerarse si el interés es analizar una lección de manera integral, comprendiendo la multitud de aspectos que afectan a los procesos instruccionales.

Esto nos lleva a reconocer la necesidad de diseñar un instrumento específico para el análisis de una lección de libro de texto de matemáticas, que se fundamente en un marco sólido desarrollado en Didáctica de las Matemáticas, en nuestro caso, el EOS, que ofrece constructos teórico-metodológicos específicos para la valoración de procesos instruccionales.

- No existe un instrumento para guiar el análisis de una lección de libro de texto de proporcionalidad, que considere aspectos más allá del contenido matemático en sí mismo y que permita la reflexión global.

No es posible ni parece aconsejable guiar el análisis de una lección de libro de texto sin tener en cuenta el contenido matemático que se enseña y se pretende que se aprenda. Por este motivo, es importante particularizar la guía de análisis de lecciones de libros de texto, desarrollando un instrumento específico para lecciones de proporcionalidad, que contemple los resultados de investigaciones y los conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional. En esta línea existen avances en el establecimiento de criterios que incorporan resultados en dicho ámbito de investigación (por ejemplo, Avila, 2019; Jhonson, 2010; Shield y Dole, 2013). No obstante, estos suelen centrarse en estudiar el tratamiento de la proporcionalidad desde un aspecto matemático, sin considerar otros factores influyentes (como la motivación, secuenciación de contenidos, entre otros) en el proceso de instrucción pautado por el autor del libro de texto. Además, los estudios encontrados, aun cuando se centran sólo en aspectos matemáticos, abordan meramente aspectos parciales que caracterizan a la actividad matemática.

- No se han encontrado estudios que traten el análisis global de lecciones de libros de texto en un tema matemático en concreto (como la proporcionalidad), como una competencia a fomentar en los programas de formación de profesores de matemáticas.

Los diferentes estudios sobre la formación de profesores en el análisis de libros de texto reconocen que el profesor debe tener un posicionamiento crítico ante el uso de los materiales, ser capaz de evaluar, identificar fortalezas y debilidades y adaptar los materiales para promover oportunidades de aprendizaje óptimas a los estudiantes (Beyer y Davis, 2012; Grossman y Thompson, 2008; Nicol y Crespo, 2006; Remillard, 2005; Schwarz et al., 2008; Shaver, 2017). En definitiva, la investigación sugiere que el uso de materiales curriculares es un proceso complejo que implica la lectura, interpretación, adecuación y diseño (Brown, 2009; Remillard, 2005, Remillard y Kim, 2017).

Dada la importancia de llevar a cabo estas tareas en la práctica profesional, se acepta que desde la formación de profesores se debe promover el desarrollo de conocimientos y competencias que permitan al docente realizarlas con éxito. Se reconoce también la potencialidad de trabajar sobre el uso y análisis de textos para adquirir conocimientos matemáticos y didácticos por parte de los docentes en formación (Ball y Cohen, 1996; Braga y Belver, 2016; Nicol y Crespo 2006).

La multiplicidad de factores que influyen en la interacción entre los profesores y los materiales curriculares (Brown, 2009), por ejemplo, los propios conocimientos y creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje y el currículo, que tengan los profesores, puede explicar que tomar un posicionamiento crítico, interactivo y dinámico ante su uso, no esté exento de dificultades tanto para maestros en formación como en servicio. A ello, se suma que las implicaciones que los libros tienen en la profesionalidad docente dependen no sólo de sus propias características sino también del modo de uso que se le dé al material (Braga y Belver, 2016).

Así, preparar a los futuros docentes para realizar análisis críticos y reflexivos de lecciones de libros de texto supone un gran reto para los formadores de profesores. Afortunadamente, desde la investigación en el área se proponen recomendaciones que

los formadores de profesores pueden tener en cuenta en esta tarea. Por ejemplo, parece haber cierto consenso en que para valorar los materiales deben emplearse criterios específicos y objetivos que funcionen como herramientas que ayuden a los futuros profesores a realizar con éxito esta tarea (Beyer y Davis, 2012; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008). También se considera importante involucrar a los futuros docentes en experiencias de reflexión que permitan trabajar sus creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje y los propios materiales curriculares (Lloyd, 2002).

Los formadores de profesores deben buscar formas de ayudar a los futuros docentes a que sientan más confianza en sus capacidades y reduzcan la dependencia de los libros de texto (Santaolalla, 2014). Se trata de promover en ellos la capacidad de análisis para que puedan detectar puntos débiles en un texto y posteriormente complementarlo o adaptarlo considerando las necesidades de sus alumnos y del contexto. Se trata de promover, lo que para Nicol y Crespo (2006) es el paso de un modelo de uso de adherencia a uno de creación/adaptación, para Taylor (2013) una trayectoria de uso efectivo del currículo, o según Shaver (2017) que sean desarrolladores del currículo.

Los modelos de reflexión deben incorporar los resultados de la investigación, para formar a los docentes en conocimiento del contenido y pedagógicos y, en la medida de lo posible, incluir la experiencia profesional para que razonen sobre las experiencias docentes y el desarrollo de su propia enseñanza en consecuencia (Shaver, 2017).

Queda definido el reto de crear una herramienta que le parezca útil al profesor no sólo para analizar lecciones de libros de texto, sino también para realizar adaptaciones y reflexionar sobre su uso, que incluya criterios objetivos basados en la investigación, que aborde conocimientos didácticos y matemáticos y por supuesto formar en el uso efectivo de dicha herramienta.

En esta investigación pretendemos abordar esta problemática múltiple. Además, entendemos que centrarnos en el tema de proporcionalidad, supone un reto adicional, por su importancia dentro de las matemáticas escolares, las dificultades que ocasiona tanto a estudiantes como a profesores y las escasas investigaciones sobre el tipo de conocimientos que tienen y requieren los profesores de matemáticas para garantizar una adecuada enseñanza y aprendizaje del tema (Weiland et al., 2021). Como sugieren Hilton y Hilton (2019) resulta importante que se identifiquen formas efectivas de promover el desarrollo suficiente de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional, de forma que los docentes puedan tener una comprensión sólida para planificar experiencias de enseñanza y aprendizaje que promueva el razonamiento en sus estudiantes. Creemos que el análisis de lecciones de libros de texto, además de como propia competencia a desarrollar en los docentes, permite diagnosticar, evaluar y desarrollar conocimientos didáctico-matemáticos que un profesor debe tener para enseñar un contenido, en particular la proporcionalidad, de modo óptimo.

A continuación, describimos las cuestiones y las hipótesis de investigación planteadas.

2.1. Cuestiones de investigación

Las cuestiones a las cuales pretendemos dar respuesta con el proyecto de investigación se centran en la problemática del análisis de libros de texto y sus implicaciones en la formación de profesores. Sin embargo, la atención se centrará en el análisis específico de lecciones de libros de texto planteadas en el tema de la proporcionalidad.

- 1. ¿Qué instrumentos de análisis didáctico se han desarrollado en investigaciones previas para realizar un análisis sistemático de libros de texto de matemáticas?*
- 2. ¿Qué elementos se deben tener en cuenta para realizar un análisis didáctico sistemático de los libros de texto de matemáticas usados en educación primaria y secundaria?*

3. *¿Qué elementos se deben tener en cuenta para realizar un análisis didáctico sistemático de lecciones sobre proporcionalidad en libros de primaria y secundaria?*
4. *¿Qué tipo de estrategias formativas se deberían diseñar e implementar para capacitar a los futuros profesores de educación primaria y secundaria en el análisis crítico y constructivo de lecciones de libros de texto de matemáticas?*

2.2. Hipótesis de investigación

En atención al análisis didáctico de lecciones de libros de texto sobre proporcionalidad y las implicaciones para la formación de profesores de primaria y secundaria, pretendemos aportar conocimientos fundamentados sobre las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: Los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para valorar críticamente una lección de libro de texto de proporcionalidad.

Hipótesis 2: Un conocimiento didáctico-matemático insuficiente de la proporcionalidad impide que los futuros profesores de matemáticas reflexionen críticamente sobre la gestión de uso de las lecciones de libro de texto de proporcionalidad.

Hipótesis 3: Los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para discriminar objetos matemáticos e identificar conflictos semióticos en una lección de libro de texto.

Hipótesis 4: Es posible progresar en estas dificultades mediante el diseño e implementación de intervenciones con futuros profesores de matemáticas destinadas a desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad.

Hipótesis 5: El análisis retrospectivo de las intervenciones con futuros profesores de matemáticas, permitirán mejorar el instrumento para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria.

2.3. Objetivos de la investigación

Este proyecto de investigación centra la atención en el siguiente objetivo general:

OG: Promover en los futuros profesores de educación primaria y secundaria la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, utilizando como recurso las lecciones de libros de matemáticas en el tema de proporcionalidad.

El mismo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

OE1: Desarrollar instrumentos para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas que tenga en cuenta las facetas y componentes de la idoneidad didáctica, tanto para los procesos de instrucción matemática en general (GALT-Matemáticas) y en el tema de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad).

OE2: Diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas con futuros profesores de educación secundaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad.

OE3: Diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas con futuros profesores de educación primaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

1. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Si bien la existencia de diversas teorías para abordar problemas didáctico-matemáticos puede ser positivo, es posible que surjan resultados contradictorios que dificulten el progreso de la disciplina, si cada una de estas teorías trata problemas parciales con supuestos teóricos distintos (Godino et al., 2020). La necesidad de comprender, comparar, coordinar e integrar teorías usadas en Didáctica de las Matemáticas, fue un problema clave que marcó el origen del EOS, un enfoque teórico desarrollado por Godino y colaboradores (Font et al., 2013; Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; 2020). Dicho marco teórico asume una concepción amplia de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecno-científica, al considerar que debe abordar cuestiones descriptivas, explicativas y predictivas, propias del conocimiento científico, así como prescriptivas y valorativas, asociadas al conocimiento tecnológico (Godino et al., 2020).

El EOS propone un programa de investigación en educación matemática que tenga en cuenta: la especificidad del contenido matemático involucrado en los procesos de enseñanza y aprendizaje; la descomposición analítica de los problemas de investigación en las diferentes facetas implicadas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica); la identificación, a partir de los conocimientos descriptivos y explicativos obtenidos en la investigación, de criterios que faciliten en la práctica docente el estudio de contenidos matemáticos específicos (Godino et al., 2021). Además, para cada uno de estos problemas, el EOS define los principios teóricos básicos y métodos de investigación para abordarlos (Godino et al., 2020).

A continuación, sintetizamos las principales nociones teóricas que son fundamentales en nuestra investigación.

1.1. Prácticas matemáticas y significado pragmático

En el EOS se definen una serie de nociones básicas que, basadas en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y en principios didácticos socio-constructivista e interaccionistas, permiten describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino y Batanero, 1998; Godino et al., 2007; 2020). Así, el punto de partida para el análisis de la actividad matemática lo constituyen las nociones de *práctica matemática* y *sistema de prácticas* (Font et al., 2013). Práctica matemática es “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1998, p. 182). Las prácticas pueden ser personales (idiosincráticas de una persona) o institucionales (reconocidas por un conjunto de personas involucradas en una misma clase de problemas) (Godino et al., 2020).

En los sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas, participan y emergen *objetos matemáticos*. Un objeto matemático “es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización” (Godino et al., 2020, p.50). En el EOS se propone una tipología de objetos matemáticos primarios que son clasificados según su función y naturaleza en: *lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.), *situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios), *conceptos* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, número, función), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y *argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos).

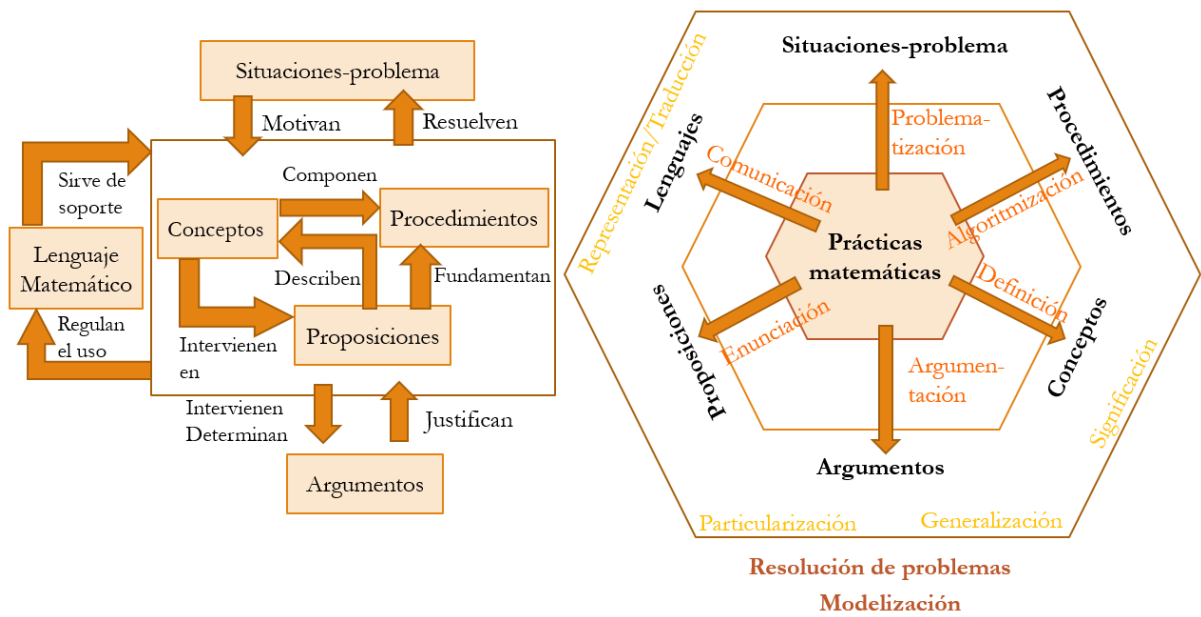
Un *proceso matemático* en el EOS es toda secuencia de acciones desarrollada durante un cierto tiempo para conseguir un objetivo, normalmente la resolución de un tipo de situaciones-problema o la comunicación de su solución. Así, se entiende que los objetos

matemáticos (lenguajes, problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos matemáticos de *comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación*. Otros procesos como los de *modelización o resolución de problemas*, pueden entenderse como *mega procesos*, dado que involucran a algunos o varios de los anteriores (ver Figura 2.1).

La noción de *configuración ontosemiótica* se introduce para identificar los tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, la misma “permite articular las nociones de práctica, objeto y proceso” (Godino et al., 2020, p. 51).

Figura 2.1

Objetos y procesos matemáticos en el EOS



Fuente. Adaptada de Font et al. (2013, p.117) y Godino et al. (2007, p.132)

Cuando se planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático (por ejemplo, la proporcionalidad) para los estudiantes de un determinado nivel educativo (por ejemplo, estudiantes de sexto curso de educación primaria) el profesor debe delimitar, en primer lugar, lo que dicho objeto representa para las instituciones matemáticas y didácticas. Acudirá, a los textos matemáticos y didáctico-matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares y, en general, a lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas

inherentes al objeto cuya instrucción se persigue. Con todo ello, el profesor determinará el sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia del objeto* (por extensión, contenido matemático). Por otro lado, el *significado institucional pretendido* viene dado por el sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción. Así, considerando una lección de un libro de texto, como proceso de instrucción potencial o planificado sobre un determinado objeto, el significado institucional pretendido viene descrito por medio de la secuencia de prácticas matemáticas y didácticas que propone el autor para el estudio del tema en cuestión (en nuestro caso la proporcionalidad).

Desde el EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Así, el sistema de prácticas que manifiesta el estudiante a propósito de la resolución de tareas matemáticas en las que aparece involucrado el objeto, determina el *significado personal logrado* por el estudiante.

Para explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas, se introduce en el EOS la noción de *conflicto semiótico*, entendida como toda “disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa” (Godino et al., 2007, p.113). Cuando la discordancia se produce entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el pretendido o implementado en una lección de libro de texto o por un profesor) se dice que se trata de un *conflicto epistémico*. Si la disparidad tiene lugar entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se dice que se trata de un *conflicto cognitivo*. Aquel desajuste que surge entre las prácticas de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se entiende como *conflicto interaccional* (Godino et al., 2007; Godino et al., 2011).

1.2. *Idoneidad didáctica*

La teoría de la idoneidad didáctica surge en el marco del EOS, a partir de la necesidad de contar con una herramienta teórico-metodológica que sirva de punto de partida para una teoría de diseño instruccional y que oriente al profesorado en la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación de la práctica (Godino, 2013).

La *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción se entiende como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Breda et al., 2017; Godino et al., 2016). Supone la articulación coherente y sistémica de las seis facetas o dimensiones (Godino et al., 2007): epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

La *idoneidad epistémica* refiere a la enseñanza de una ‘buena matemática’ (Breda et al., 2017). Un proceso de instrucción matemática tiene mayor grado de idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales pretendidos o implementados representan bien a un significado de referencia. Así, una alta idoneidad desde el punto de vista epistémico requiere, entre otros aspectos: la presencia de diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión (Godino et al., 2017); que se incluya una muestra representativa y bien articulada de situaciones-problema; que aparezcan involucradas diversas representaciones; que se presenten de manera clara y adecuada las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales para el tema; que las tareas propuestas permitan a los estudiantes diversas maneras de abordarlas y requieran que éstos interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones. El grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas sea adecuado al entorno (todo lo que está fuera del aula y que condiciona la actividad que se desarrolla en la

misma) en que se desarrolla define su *idoneidad ecológica* (Godino, 2013). Un adecuado grado de idoneidad ecológica, requiere que los contenidos y su desarrollo se corresponden con las directrices curriculares, que estos contribuyan a la formación socio-profesional de los estudiantes y aparezcan relacionados con otros contenidos disciplinares, y que se fomente la educación en valores y el pensamiento crítico matemático con experiencias didácticas innovadoras.

La *idoneidad cognitiva* refiere al grado en que los significados pretendidos (implementados) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos (implementados). Un adecuado grado de idoneidad cognitiva, requiere que los contenidos presentados en el proceso instruccional tengan una dificultad manejable para el nivel educativo al que se dirige, así como que las situaciones propuestas respondan a distintos niveles de dificultad. Es importante también que se promueva el uso de diversas estrategias de resolución y que se advierta a los alumnos de posibles dificultades y errores.

La *idoneidad afectiva* se relaciona con factores que dependen de la institución y del alumno. Un alto grado de idoneidad afectiva requiere la existencia de elementos motivadores (ilustraciones, humor, etc.) y la selección de situaciones que respondan a los intereses de los alumnos y que permitan valorar la utilidad del contenido. Además, se deben promover actitudes de perseverancia y responsabilidad hacia las matemáticas, en particular, la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.

La *idoneidad mediacional*, supone el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales, que la secuenciación de contenidos y actividades es la adecuada, y se dedique tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión. La *idoneidad interaccional* es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Con frecuencia

emplearemos el término *instruccional* para referirnos de forma conjunta a los aspectos mediacionales e interaccionales del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para cada una de las facetas o dimensiones que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se identifica un sistema de componentes, subcomponentes e indicadores empíricos generales, que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática, aportando criterios de idoneidad para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje:

Por criterio de idoneidad se debe entender una norma de corrección que establece cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje. Estos criterios deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste está orientado a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor (Breda et al., 2018, p. 264).

Estos criterios de idoneidad deben enriquecerse y adaptarse de acuerdo con el contenido matemático específico que se pretende enseñar (Breda et al., 2017), pero también al tipo de proceso de instrucción que se requiere analizar. De esta forma, la noción de idoneidad didáctica ha sido utilizada para valorar procesos de instrucción de aula (Aroza et al., 2016; Castro y Velásquez, 2014; Godino, Bencomo et al., 2006; Posadas y Godino, 2017), o para analizar materiales curriculares, libros de texto y videos educativos (Barbosa y Barbosa, 2021; Beltrán-Pellicer et al., 2018; Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020; Fúneme et al., 2021; Morales-García y Navarro, 2021; Pino-Fan et al., 2013; Ruz et al., 2020). Otros estudios se centran en adaptar los criterios para valorar un contenido específico como proporcionalidad, funciones o ecuaciones cuadráticas (Aroza et al., 2016; Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021; Posadas y Godino, 2017).

Valorar la idoneidad de un proceso instruccional específico (previsto, planificado o implementado) supone emitir un juicio sobre el grado de cumplimiento de los criterios de idoneidad, lo cual implica la observación de indicadores empíricos. En nuestro caso, la

consideración de la lección de un libro de texto como proceso instruccional previsto o planificado, permite aplicar el constructo idoneidad didáctica y su desglose en componentes e indicadores, como herramienta para llevar a cabo su análisis sistemático. Por este motivo, en el Capítulo 3 de esta memoria, el sistema de componentes e indicadores de idoneidad didáctica de Godino (2013) se revisan y particularizan para desarrollar una Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas) como recurso para guiar la reflexión de los docentes en formación o en ejercicio sobre los procesos de instrucción planificados en lecciones de libros de texto. También adaptamos la GALT-Matemáticas al tema de la proporcionalidad, lo que lleva a generar una nueva guía (GALT-proporcionalidad) en la que se introducen indicadores explícitos para el contenido de proporcionalidad que afectan fundamentalmente a las facetas epistémica, cognitiva e instruccional (interaccional-mediacional). Dichos indicadores se fundamentan en una revisión teórica exhaustiva de resultados de investigaciones y en juicios de expertos asumidos por la comunidad académica (Breda et al., 2017) en relación con la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

1.3. Modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas

En el modelo CCDM propuesto desde el EOS se asume que el profesor debe tener un *conocimiento matemático común* relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, y *ampliado* que le permita articularlo con los niveles superiores. Además, sobre cada contenido matemático, el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático*, que en el modelo CCDM, se sistematiza en seis subcategorías atendiendo a las facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje: el conocimiento especializado de la dimensión matemática, que le permitiría ante una situación matemática determinada, reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica); el conocimiento de los aspectos cognitivos de los estudiantes, que le permitiría comprender sus dificultades, errores, conflictos de aprendizaje (faceta cognitiva); el conocimiento de los aspectos afectivos, emociones y actitudes de los

alumnos (faceta afectiva); el conocimiento de las interacciones que pueden surgir en el aula y de los recursos y medios para potenciar el aprendizaje de los alumnos (faceta instruccional); finalmente, el conocimiento curricular, contextual, social, entre otros que influyen en el aprendizaje (faceta ecológica) (Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2015).

En el EOS se articula de manera natural la idea de conocimiento y de competencia (Godino et al., 2017). En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo-declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio-procedimental, indicando la posesión de una capacidad o competencia. Ambos tipos de prácticas están imbricados, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos, los cuales se pueden referir a la descripción de los instrumentos usados o a resultados previamente obtenidos que deben ser activados.

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica* que, en esencia, consiste en “diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico⁴ y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora” (Breda et al., 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, los conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, necesita conocimientos para elaborar juicios valorativos razonados de lo que ha sucedido y elaborar propuestas de mejora para futuras implementaciones. Esta competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de

⁴ El análisis didáctico se entiende como “el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular -o de aspectos parciales del mismo -con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas” (Godino, Bencomo et al., 2006, p. 4).

matemáticas está articulada por medio de cinco subcompetencias, asociadas a herramientas conceptuales y metodológicas del EOS: *competencia de análisis de significados globales* (identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución); *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas* (reconocimiento de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas); *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas* (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos); *competencia de análisis normativo* (reconocimiento de la red de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso instruccional); *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* (reflexión global sobre la práctica didáctica, valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras)⁵.

Estas competencias permiten al profesor llevar a cabo un análisis completo de un proceso instruccional que según Font et al. (2010), debe incluir los siguientes cinco niveles:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.

Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.

Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.

Nivel 4. Identificación de normas.

Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica.

“Sin embargo, la profundización en el análisis de algunos de los niveles está muy condicionada por el tipo de episodio” (Font et al., 2010, p.91). En nuestro caso, dado que el proceso instruccional que se analiza viene planificado mediante la lección de un libro de texto es posible aplicar tres de estos niveles: el análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, de los objetos y procesos matemáticos y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción (vinculados respectivamente a las competencia de análisis de

⁵ La descripción detallada de todas estas subcompetencias se puede encontrar en Godino et al. (2017).

significados globales, el análisis ontosemiótico y el análisis de la idoneidad didáctica antes mencionadas).

Font et al. (2018) consideran que para que la formulación de competencia sea operativa, es necesario caracterizar su desarrollo, es decir, definir niveles e indicadores de desarrollo. Según estos autores, en los diferentes estudios empíricos realizados, que usan como referente teórico el EOS, es posible identificar algunas regularidades:

1) Los profesores o futuros profesores, cuando han de opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. 2) Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM). 3) Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva). 4) La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad. Estas tendencias se relacionan con el modelo CCDM ya que algunas de ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica. 5) Los niveles de profundidad del análisis realizado por los profesores varía desde análisis superficiales a expertos, en función de las herramientas teóricas usadas para realizarlos (Font et al., 2018, p.28).

De este modo Font et al. (2018) afirman que en las intervenciones formativas que motivan la promoción de alguna de las competencias del CCDM, es posible identificar tres tipos de análisis (descriptivo, explicativo y valorativo), a los cuales se les asocian niveles de profundidad en el análisis según los siguientes cuatro valores:

N0: Narrativa superficial (el lector no se hace una idea de lo que pasó en el episodio), N1: Narrativa que capta los elementos esenciales (el lector se hace una idea de lo que pasó en el episodio), N2: Análisis detallado de aspectos de la narrativa siguiendo un modelo de análisis (por ejemplo, si se hace una descripción de la actividad matemática se identifican algunas prácticas, objetos primarios y procesos), N3: Análisis experto de la narrativa de acuerdo con un modelo (por ejemplo, se hace una descripción pormenorizada de la actividad matemática se identifican exhaustivamente las prácticas, objetos primarios y procesos). (Font et al., 2018, p. 29)

Basándose en estos niveles, Morales (2019) propone una caracterización para el desarrollo de la subcompetencia de valoración de idoneidad didáctica (ver Tabla 2.1) que consideramos importante en nuestra investigación.

Tabla 2.1

Niveles de desarrollo de la subcompetencia valoración de idoneidad didáctica

<i>Subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción</i>		
Valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante criterios de idoneidad, para plantear propuestas de mejora.		
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Se valora utilizando de manera implícita algún criterio de idoneidad didáctica y se hace una propuesta de mejora con cierto sentido.	Se realiza una valoración pormenorizada de aspectos del proceso de instrucción, siguiendo un modelo previamente dado (por ejemplo, se hace una valoración coherente usando los criterios de idoneidad didáctica del EOS de manera correcta) y se hace una propuesta razonada que mejora los criterios con menos valoración buscando un mejor equilibrio entre los diferentes criterios.	Se realiza un análisis experto exhaustivo del proceso de instrucción, de acuerdo con un modelo previamente dado (por ejemplo, se hace una valoración del episodio en la que se aplican, exhaustiva y correctamente los CI y se tiene en cuenta el equilibrio entre ellos para rediseñar la secuencia de manera que se mejoren los criterios con menos valoración).

Nota. Tabla adaptada de Morales (2019, p.242).

2. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad

De acuerdo con el marco teórico del EOS, la reconstrucción del significado de referencia global de un objeto matemático, en nuestro caso la proporcionalidad, debe tener en cuenta los conocimientos sobre las diferentes dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta sección, incluimos una síntesis de conocimientos (fundamentalmente epistémicos, cognitivos e instruccionales) que servirán de referencia para concretar indicadores de idoneidad didáctica. En cuanto a los conocimientos de la faceta ecológica, será relevante considerar el conocimiento de las disposiciones curriculares correspondientes según el contexto.

2.1. Significados de la proporcionalidad

Desde la perspectiva epistémica, la proporcionalidad puede ser considerada según cuatro enfoques o significados parciales (Aroza et al., 2016):

Informal-cualitativo, centrado en una aproximación cualitativa a la proporcionalidad. Supone la presencia de tareas que impliquen la comparación perceptiva de las relaciones proporcionales entre formas de figuras dibujadas a escala sin considerar las relaciones de tipo cuantitativo entre las razones de los segmentos (Ruiz y Lupiáñez, 2009), o bien la comparación multiplicativa de los números (Behr et al., 1992).

Geométrico, centrado en las razones y proporciones entre segmentos, escalas y semejanza de figuras. Las tareas relacionadas con escalas, ampliaciones y reducciones de figuras preservando la forma, como las contempladas en Ben-Chaim et al. (2012) y Brousseau (1997), permiten avanzar desde la aproximación intuitiva y cualitativa (pre-proporcional) a un significado cuantitativo esencialmente multiplicativo (proporcional).

Aritmético, centrado en la noción de razón y proporción. Una razón establece una comparación multiplicativa entre un par ordenado de cantidades de magnitudes (homogéneas o heterogéneas), cada una de las cuales viene expresada mediante un número real y una unidad

de medida. Una proporción es la igualdad de dos razones. El enfoque aritmético de la proporcionalidad es el predominante en la mayoría de las propuestas curriculares e investigaciones. En este, se distinguen esencialmente dos categorías de problemas para la proporcionalidad simple directa (Cramer y Post, 1993a).

- Problemas de comparación. En un problema de este tipo, se dan cuatro cantidades (a, b, c, d) , y se quiere determinar una relación de orden entre las razones o productos de esas cantidades. Si la relación entre las cantidades de magnitudes es de proporcionalidad directa, la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a, b, c y d son números enteros cualesquiera, y las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son relaciones multiplicativas entre los números a, b y c, d , respectivamente. En este caso, se trata de comparar fracciones que relacionan cantidades de la misma magnitud o bien cantidades de magnitudes diferentes.
- Problemas de valor faltante. En un problema de valor faltante, la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido (valor faltante). Por ejemplo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donde a, b y c son números enteros conocidos y x es el valor que se pretende determinar.

Estas categorías pueden generalizarse a otras relaciones de proporcionalidad como la inversa (Martínez et al., 2017).

Algebraico, centrado en las nociones y propiedades de la función lineal, $y = kx$, en el caso de la proporcionalidad directa o racional, $y = \frac{k}{x}$; $x \neq 0$, en el caso de la proporcionalidad inversa. En cada caso k , corresponde a la constante de proporcionalidad, siendo la razón constante entre dos cantidades en la relación de proporcionalidad directa y el producto de cualquier par de cantidades correspondientes en la proporcionalidad inversa (Lamon, 2007).

Para Lamon (2007) en el caso de la relación directa, el razonamiento proporcional refiere al reconocimiento de la razón constante entre elementos del mismo espacio de medida y la relación funcional entre espacios de medida. Si la relación es inversamente proporcional, dicho razonamiento se basa en la comprensión de que existen dos operadores escalares, uno inverso multiplicativo del otro, y que el producto de medidas correspondientes es constante. Supone la habilidad de reconocer una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como la capacidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades (Lamon, 2007).

Godino, Beltrán-Pellicer et al. (2017) proponen la categorización de los significados de la proporcionalidad *aritmético*, *proto-algebraico* y *algebraico-funcional*, en base a los diversos niveles de algebrización (Godino, Aké et al., 2014), implicados en las prácticas matemáticas asociadas a tareas prototípicas de cada significado. El significado *aritmético* corresponde a un “nivel 0” de algebrización, debido a que en las prácticas matemáticas sólo intervienen valores numéricos particulares y operaciones aritméticas sobre dichos valores, es decir, no intervienen objetos ni procesos algebraicos. Para el significado *proto-algebraico* (centrado en las nociones de razón y proporción) se distinguen dos niveles; un “nivel 1” de algebrización, basado en el reconocimiento del valor unitario (aplicación del método reducción a la unidad), y en el uso de representaciones diagramáticas de soluciones, así como un “nivel 2”, en el que, en la solución de un problema de valor faltante, se plantea y resuelve una ecuación del tipo $Ax=B$, (Godino, Aké et al., 2014). El significado *algebraico-funcional* se vincula a un “nivel 3” de algebrización y se caracteriza por la aplicación de la noción de función y sus propiedades (monotonía, aditiva, multiplicativa...) para resolver situaciones de proporcionalidad. Estos significados se amplían y articulan en Burgos y Godino (2020) contemplando la progresión desde la educación primaria hasta la educación superior.

2.2. Conocimientos sobre la faceta cognitiva

Desde una perspectiva psicológica-cognitiva, según Inhelder y Piaget (1958), el razonamiento proporcional es una relación de segundo orden que implica una relación de equivalencia entre dos razones. Requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo que permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción).

Según muestran diversas investigaciones interesadas por las dificultades que presentan alumnos de diferente nivel educativo al resolver situaciones de proporcionalidad (Arican, 2019a; Fernández y Llinares, 2012; Silvestre y Ponte, 2011), son múltiples los factores que influyen en el nivel de éxito de los alumnos al resolver las tareas. Entre ellos mencionan: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras (los números son múltiplos entre sí) y no enteras, las unidades de las magnitudes involucradas en la situación, la manera en que se formula la tarea, la familiaridad con el contenido, la cantidad de magnitudes involucradas en un mismo problema, entre otros. De manera específica, se observa que los problemas que involucran números naturales pequeños, aquellos en los que aparecen relacionados los primeros o segundos términos de una razón y en los que existe una relación de divisibilidad entre sus términos, resultan más fáciles para los alumnos (Fernández y Llinares, 2011; Karplus et al., 1983; Misailidou y Williams, 2003; Silvestre y Ponte, 2011; Tournaire y Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2009).

Algunos autores consideran que el hecho de que en la enseñanza de las matemáticas se le otorgue demasiada atención, a veces de manera exclusiva, a los problemas de valor perdido que describen proporciones directas, lleva a los estudiantes y profesores a asociar características del formato de la tarea con un método de solución y a no considerar con cuidado las relaciones descritas (Izsák y Jacobson, 2017; Van Dooren et al., 2008).

Los estudiantes de diferentes etapas educativas muestran dificultades para distinguir situaciones que parecen proporcionales pero que no lo son (De Bock et al., 2002; Izsák y Jacobson, 2017) Así, uno de los errores comúnmente cometidos por alumnos y profesores, ampliamente reconocido en la literatura, *ilusión de linealidad*, consiste en tratar una situación como si fuera de proporcionalidad directa cuando no lo es (Van Dooren et al., 2008). Es común que éstos caractericen erróneamente la proporcionalidad basándose en la aplicación sólo de condiciones necesarias como la regla “más en A, más en B” (Degrande et al., 2018; De Bock et al., 2002; Izsák y Jacobson, 2017; Modestou y Gagatsis, 2007; Nagar et al., 2016; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren et al., 2008).

Las dificultades y errores de los alumnos en el reconocimiento y resolución de situaciones-problemas proporcionales puede depender del tipo de función ($y = kx$, $y = k/x$, $y = ax + b$; con a y b distintos de cero) que se incluya en las tareas, de las características específicas de las funciones (por ejemplo, su monotonía) y del tipo de representación empleado (De Bock et al., 2015, De Bock et al., 2017). Por ejemplo, los estudiantes tienen mayor dificultad al asociar las representaciones gráficas con la representación algebraica y viceversa, mientras que cuando se involucran representaciones tabulares los alumnos responden con mayor precisión a las tareas (De Bock et al., 2015; De Bock et al., 2017). Asimismo, diversos estudios ponen de manifiesto que el reconocimiento de relaciones inversamente proporcionales y la resolución de problemas que implican este tipo de relación pueden resultar más difíciles para los alumnos que las que implican relaciones de proporcionalidad directa (Arican, 2019b).

2.3. *Conocimientos sobre la faceta instruccional (interaccional-mediacional)*

Desde una perspectiva instruccional, diversos autores proponen anticipar una aproximación informal, intuitiva y cualitativa al concepto de razón y proporción previa a su formalización y algoritmización; promover estrategias de construcción progresiva del razonamiento proporcional que permita al alumno avanzar desde un conocimiento de estructura

aditiva, hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa (Fernández, 2001; Fiol y Fortuny, 1990; Streefland, 1985).

Un uso indiscriminado de la regla de tres puede llevar a no desarrollar un razonamiento proporcional adecuado, y en particular a no distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son (Fernández y Llinares, 2012). Por esto, antes de presentar este algoritmo a los estudiantes, se les debería ofrecer la oportunidad de desarrollar y argumentar sus propias estrategias (Mochón, 2012; Shield y Dole, 2013).

Burgos y Godino (2020) plantean la necesidad de considerar la diversidad de significados sobre la proporcionalidad (aritméticos, proto-algebraicos y algebraicos), en la planificación y gestión de procesos enseñanza y aprendizaje del tema tanto en educación primaria como secundaria. Dichos significados han de articularse para alcanzar distintos grados de formalización y generalidad, garantizando una evolución del procedimiento aritmético hacia el algebraico-funcional. Estos autores establecen conexiones entre el significado aritmético y el proto-algebraico primero mediante el método de reducción a la unidad, para después trabajar con las proporciones y la ecuación de proporcionalidad, punto en el cual se suele degenerar el significado de la proporcionalidad al reducirse a la técnica de regla de tres. Finalmente, refieren al empleo de las secuencias de números proporcionales y su representación tabular para conectar el significado aritmético y el proto-algebraico con el algebraico que se centra en la noción de función.

3. Descripción general de la metodología

Dado que el objetivo de nuestra investigación se centra en promover en futuros profesores de educación primaria y secundaria la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, utilizando como recurso las lecciones de libros de matemáticas en el tema de proporcionalidad, emplearemos por un lado, la ingeniería didáctica (Godino, Rivas et al., 2014) en la planificación y desarrollo de acciones formativas y

por otro, el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) tanto en la elaboración de las guías de análisis de lecciones de libros de texto, como para el análisis de los protocolos de respuesta de los participantes.

Se propone un enfoque metodológico esencialmente cualitativo, caracterizado por el análisis sistemático de datos cuya interpretación permite explicar fenómenos sociales, como el de una experiencia educativa (Strauss y Corbin, 1990).

Describimos en esta sección, de manera breve ambas metodologías.

3.1. Investigación de diseño

Dado que un problema central de nuestra investigación es el diseño, implementación y posterior evaluación de intervenciones formativas para desarrollar en los futuros profesores competencias específicas, el enfoque metodológico corresponde a la ingeniería didáctica fundamentada en el uso de herramientas del EOS (Godino, Rivas et al., 2014). Dicho enfoque constituye una propuesta que amplía la concepción tradicional de la ingeniería didáctica (Artigue, 1989), como una metodología de investigación de diseño (Cobb et al., 2003; Kelly et al., 2008) en las que se distinguen cuatro fases de investigación:

1) *Estudio preliminar* de las distintas dimensiones. Descripción de los significados institucionales del objeto y de las restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio (dimensión epistémica-ecológica); análisis de los significados personales y de la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los estudiantes con relación al proceso de estudio (dimensión cognitiva-afectiva); descripción de los patrones de interacción entre profesor y estudiantes, y de los recursos empleados, valorando el tiempo dedicado a las acciones formativas (dimensión instruccional).

2) *Diseño del experimento*. Selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas (considerando los comportamientos deseables de los estudiantes) y planificación de las intervenciones controladas del docente.

3) *Implementación*. Observación de las interacciones entre personas y los recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.

4) *Análisis retrospectivo*. Derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación, se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y su idoneidad didáctica.

La ingeniería didáctica en el sentido generalizado que se propone desde el EOS queda articulada con las investigaciones de diseño instruccional (Cobb et al., 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008), en tanto se persigue que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. Se utiliza la propuesta y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, por lo que incluye, en ciclos sucesivos, tanto el diseño como la implementación en contextos reales de clase y la evaluación de resultados. Además, el equipo investigador reflexiona tras cada implementación para readaptar el diseño inicialmente propuesto, si es necesario.

Según Godino et al. (2017) las situaciones empíricas desarrolladas en diferentes contextos que se ocupan del diseño e implementación de ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias propuestas en el modelo CCDM, se caracterizan por:

- Emplear varias sesiones, momentos de trabajo individual y grupal, presencial o no presencial, discusiones e institucionalización.
- Presentar el problema didáctico a abordar, explorar los significados iniciales de los participantes respecto de la competencia a abordar.
- Proponer la lectura y discusión de un documento introductorio que describe el instrumento propuesto a los profesores en formación, ejemplificando su uso y mostrando el tipo de resultado a obtener.

- Emplear tareas donde el profesor aplica el instrumento a nuevos casos para adquirir la competencia con el tiempo.

El diseño de estos ciclos formativos pretende enseñar a los participantes algunos (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo propuesto por el EOS (Font, et al., 2010). En las implementaciones con futuros maestros de primaria que se llevan a cabo en esta tesis, el diseño contempla tanto el análisis didáctico (identificación de prácticas, objetos, procesos y conflictos) de la lección de libro de texto, como el análisis y valoración de la idoneidad didáctica con el uso de la guía (GALT-proporcionalidad). Esta decisión didáctica se fundamenta en las recomendaciones de Beyer y Davis (2012) sobre el aprendizaje por andamios. Dado que los futuros maestros de primaria suelen tener mayores limitaciones de conocimientos matemáticos, es recomendable que estos participantes tengan mayor apoyo para llevar a cabo el análisis de la lección de libro de texto, por lo que se incluye de modo explícito esta tarea previa. En el caso de los futuros profesores de secundaria, no se les solicita previamente esta tarea, aunque, este tipo de análisis se describe y explica como parte de la formación teórica que reciben los participantes antes de llevar a cabo la valoración de la idoneidad didáctica de la lección de libro de texto.

También como parte del diseño del experimento en todas las experiencias formativas se realiza un análisis a priori de las lecciones de libros de texto seleccionadas para su uso. Para llevar a cabo este análisis, que constituye el referente⁶ desde el punto de vista experto, con el que valorar los informes de los participantes, se siguió la siguiente dinámica: en primer lugar cada investigador (la doctoranda, la directora de tesis y un experto colaborador) realizan de manera independiente el análisis de la lección completando las tablas de la GALT-proporcionalidad con una valoración numérica y una justificación sobre dicha valoración; en

⁶ Dado que los indicadores de la GALT-proporcionalidad son el reflejo de normas establecidas en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad (Breda et al., 2018) este análisis actúa como referente de una valoración con carácter institucional de la lección.

segundo lugar, el equipo investigador se reúne para confrontar estas valoraciones y decidir un juicio común. Después de acordar las valoraciones se procede a identificar las principales fortalezas y debilidades, así como conflictos de la lección.

Como señalan Molina et al. (2011), la calidad de los estudios de diseño se puede asociar a la evaluación de la fiabilidad, replicabilidad y utilidad de estos. La fiabilidad implica que el análisis y los criterios asumidos en este sean explícitos y que las argumentaciones y conclusiones se basen en razones que se han ido construyendo en el desarrollo del estudio y si el análisis ha sido criticado por otros investigadores. La replicabilidad en las investigaciones consiste en la posibilidad de repetir el estudio en otros contextos “realizando estudios posteriores que utilicen el modelo obtenido como material conceptual a ser organizado, el modelo elaborado será sustituido por otro más avanzado” (Molina et al., 2011, p.79). En la investigación de diseño, es esa replicabilidad lo que otorga validez externa al estudio (Molina et al., 2011). Por último, es fundamental explicitar los aportes e implicaciones de la investigación.

3.2. La técnica de análisis de contenido

Este estudio aborda también una problemática de tipo valorativo, para la que el EOS propone como herramienta la idoneidad didáctica. “Se trata de la realización de meta-análisis para identificar principios, valores y medios asumidos por la investigación básica y aplicada sobre los cuales haya un cierto grado de consenso para ser aplicados en la práctica educativa” (Godino et al., 2021, p.13).

En consecuencia, para obtener los indicadores de idoneidad didáctica y elaborar las guías de análisis de libros de texto, se sigue una metodología basada en el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) en tanto permite procesar y revisar dimensiones cualitativas, describir tendencias y características del contenido, así como formular inferencias válidas a partir de ciertos datos. Se trata de hacer

adaptaciones de instrumentos ya existentes para su aplicación en áreas de contenidos particulares, y además “fundamentar” los indicadores de manera explícita, bien en los resultados de investigaciones o bien en juicios expertos asumidos por la comunidad académica, frecuentemente plasmados en las directrices curriculares nacionales e internacionales (Godino et al., 2012, p. 333).

Como sugieren Godino et al. (2012), este método permite mejorar de manera progresiva los instrumentos de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción matemática utilizando la técnica de análisis de contenido.

La técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) también se aplica en las diferentes experiencias formativas para analizar los protocolos de respuesta de los futuros profesores participantes de cada intervención.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE GUÍAS DE ANÁLISIS DE LECCIONES DE LIBROS DE TEXTO

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787.
 - Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022c). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>
-

1. Introducción

Partiendo de que el análisis de libros de texto debe ser una de las competencias contempladas en la formación de profesores y de que son escasos los trabajos previos que contemplan un análisis global de la lección de un libro de texto para un tema en concreto (como el de proporcionalidad), consideramos relevante establecer guías que permitan al futuro profesor o profesora en ejercicio contar con pautas para analizar la idoneidad didáctica de una lección de un libro de texto para abordar un tema de matemáticas. Tales instrumentos deben ser de utilidad en la toma de decisiones fundamentadas sobre el uso de la lección de un libro de texto en el aula, como recurso para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de algún contenido matemático.

Los objetivos que nos planteamos son:

- Describir la elaboración de una Guía de Análisis de Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas (GALT-Matemáticas) utilizando herramientas de análisis didáctico del EOS (Godino et al., 2007) y teniendo en cuenta las investigaciones claves con relación al análisis de libros de texto.

- Describir la elaboración de una Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Matemáticas en el tema de Proporcionalidad (GALT-proporcionalidad), partiendo de la GALT-Matemáticas anteriormente mencionada y teniendo en cuenta los resultados de investigaciones didácticas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad.

2. Metodología

Las investigaciones sobre el análisis de libros de texto en educación sirven de referencia para identificar y organizar normas de idoneidad didáctica bien consolidadas en la comunidad científica. El análisis de contenido (Cohen et al., 2011) requiere delimitar unidades de análisis en los textos seleccionados —en nuestro caso, las investigaciones referentes al análisis de libros de texto— que se clasifican según las facetas y componentes de la teoría de idoneidad didáctica. Seguidamente se comparan con los criterios e indicadores propuestos por Godino (2013) y por Godino et al. (2012) para valorar si la información contenida en estas unidades reitera, complementa o agrega elementos nuevos respecto a los indicadores ya preestablecidos. Fue necesaria la adaptación de algunos indicadores de idoneidad y componentes en determinadas facetas que dejaban de ser pertinentes dada la naturaleza del contenido (lección de libro de texto) que sería analizado. Como resultado de este análisis, en las siguientes secciones haremos referencia a las principales ideas que tratan los trabajos hallados y revisados, especificando en qué caso dichas “normas” ya estaban recogidas en los indicadores originales, cuándo complementaban algún indicador o bien cuándo establecían criterios nuevos que debían ser incorporados. De esta confrontación, surge una versión mejorada y ampliada de los componentes e indicadores de idoneidad originales.

Para el caso de la GALT-proporcionalidad, el análisis de contenido se realiza sobre investigaciones claves con relación al análisis de libros de textos y a los aportes teóricos que permitan formular indicadores de idoneidad en cada una de las facetas para el tema de proporcionalidad. Partiendo del trabajo de Aroza et al. (2016), así como de una revisión y

síntesis de otras investigaciones relevantes que aportan conocimientos didáctico-matemáticos sobre proporcionalidad (Fernández y Llinares, 2011; Fiol y Fortuny, 1990; Freudenthal, 1983; Lamon, 2006, 2007; Ruiz y Valdemoros, 2006; Shield y Dole, 2013; entre otras) se adapta el instrumento GALT-Matemáticas a este contenido en concreto.

3. Elaboración de una guía para el análisis de libros de texto

Para el análisis del libro de texto se parte de los componentes e indicadores propuestos por Godino (2013) y Godino et al. (2012), que se formularon con la intención de “analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico” (Godino, 2013, p. 17), lo que supone considerar cuestiones de interacción entre profesor-alumno y alumno-alumno, así como aspectos de temporalización y ambiente de aula. Dado que nuestro objeto de estudio es la lección de un libro de texto entendida como proceso de instrucción planificado, se hace necesario adecuar o reformular algunos de los criterios y componentes de dichos trabajos previos al nuevo contexto.

Para este trabajo se adopta el sistema de categorías según componentes y subcomponentes en cada una de las facetas propuesta por Godino et al. (2019). La nueva organización supone especiales cambios en las facetas epistémicas y cognitivas, que lleva a situar en primer plano la noción de significado parcial de un objeto matemático. De esta forma se consideran hasta cuatro niveles de categorías, de las cuales la categoría de nivel 1 indica cada una de las facetas, la de nivel 2 los componentes de estas, la de nivel 3 los subcomponentes y, finalmente, la categoría de nivel 4 los indicadores de idoneidad.

La revisión de los antecedentes ha permitido comprobar que varias de las guías encontradas para el análisis de libros de texto proponen indicadores, pero no llegan a formular un criterio explícito de idoneidad, como sí ocurre con la teoría de la idoneidad didáctica. Por ello, de los antecedentes se tienen en cuenta aquellos aspectos que establecen un criterio y que complementan a los ya considerados por Godino (2013).

A continuación, precisamos para cada una de las dimensiones de la teoría de la idoneidad didáctica los indicadores adaptados a los intereses de esta investigación, así como los cambios o consideraciones efectuados para elaborar las distintas tablas que configuran la GALT-Matemáticas.

3.1. Indicadores de idoneidad epistémica

Significados. Desde el punto de vista pragmático del EOS, los significados se definen en términos de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos que una persona moviliza ante cierta clase de situaciones problema.

- En relación con las *situaciones problema* propuestos en el texto, se analizan si las tareas son heterogéneas respecto a su tipología, es decir, si son matemáticas realistas, rutinarias, de aplicación, de deducción (Braga y Belver, 2016) y si tratan cuestiones diversas (numéricas, teóricas, gráficas) (Monterrubio y Ortega, 2012). También se valora si las situaciones poseen diferentes niveles de dificultad (Braga y Belver, 2016), su duración de resolución (Martínez-Bonafé, 1992) y si existe una cantidad adecuada de ejercicios diferentes (Monterrubio y Ortega, 2012). Estas consideraciones se han tenido en cuenta al analizar si existe una muestra representativa de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.
- *Lenguaje.* Se incorpora la inclusión de registros de tipo manipulativo que sean alternativas al lápiz y papel (Braga y Belver, 2016). También se contempla que se promueva la construcción, perfeccionamiento y uso de representaciones para organizar, interpretar y registrar ideas (Godino et al., 2012) como una ampliación al indicador previo.
- *Reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos).* Al indicar que se presenten de un manera clara y correcta, adaptadas al nivel educativo al que se dirige, se están contemplando cuestiones como: que los mismos se introducen con aclaraciones

intuitivas al principio y luego más formales o generales (Martínez y Penalva, 2006), y que se presentan con precisión y siguen una lógica didáctica y matemática adecuada (AAAS, 2000). Los cambios en estos subcomponentes, según a Godino (2013), han sido meramente organizativos.

- *Argumentos.* A partir de las consideraciones de la AAAS (2000) y Godino et al. (2012), se ha agregado como un indicador no contemplado que las proposiciones y procedimientos se expliquen y argumenten. Además, se incorpora y adapta el indicador que permite analizar si se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.

Relaciones. Se considera relevante que en el texto se expresen los conceptos básicos del contenido y sus relaciones, por medio de mapas o redes conceptuales, por ejemplo (Martínez-Bonafé, 1992).

Procesos. Se considera relevante que se organice y consolide el pensamiento matemático a través de la *comunicación* (NCTM, 2000) y describa verbalmente los razonamientos y las estrategias personales (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2006). Se hace necesario que los estudiantes trabajen con tareas matemáticas cuya discusión sea enriquecedora, dado que “las tareas de procedimiento para las cuales se espera que los estudiantes tengan enfoques algorítmicos bien desarrollados generalmente no son buenos candidatos para tal discurso” (NCTM, 2000, p. 60). Deben promoverse problemas y tareas interesantes, en las que el estudiante escriba en matemáticas y reflexione sobre su trabajo para ayudarlo a consolidar su pensamiento.

- Teniendo en cuenta las aportaciones de AAAS (2000) y de Martínez y Penalva (2006), se decide contemplar la *modelización* de una manera más explícita. Un modelo matemático refiere a “una representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo. Los modelos matemáticos se pueden

utilizar para aclarar e interpretar el fenómeno y para resolver problemas” (Martínez y Penalva, 2006, p. 70).

- En el subcomponente *generalización* se analiza si se proponen tareas que permitan analizar y describir patrones, realizar generalizaciones matemáticas, trabajar la abstracción y generalización, el razonamiento, la elaboración de hipótesis y la prueba (NCTM, 2000; Onrubia et al., 2001; Stylianides, 2009).

Conflictos epistémicos. Hemos considerado importante incluir un componente específico sobre conflictos epistémicos que analizará si el libro de texto contiene errores de concepto, ambigüedades, problemas con enunciados absurdos que falten datos o con indicaciones incompletas, enunciados de problemas con error en los datos o que contienen órdenes contradictorias o errores en la clave de respuestas del libro (Fernández, Caballero y Fernández, 2013).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la Tabla 3.1 recoge los indicadores finales contemplados en la faceta epistémica según los componentes y subcomponentes citados.

Tabla 3.1

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica

Compo- nentes	Subcompo- nentes	Indicadores
Significados	Problemas	-Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones problema que permitan contextualizar, ejercitar, ampliar y aplicar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos. -Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
	Lenguajes	-Se usa un amplio repertorio de representaciones (verbal, gráfica, materiales, icónicas, simbólicas...) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas. -Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige. -Se promueve la construcción, perfeccionamiento y uso de representaciones para organizar, interpretar y registrar ideas.

Relaciones	Conceptos	<ul style="list-style-type: none"> -Se presentan los conceptos fundamentales del tema en forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. -Se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que generar o negociar definiciones.
	Proposiciones	<ul style="list-style-type: none"> -Se presentan las proposiciones fundamentales del tema en forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. -Se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que generar o negociar proposiciones.
	Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> -Se presentan los procedimientos fundamentales del tema de manera clara y correcta, y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen. -Se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos.
	Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> -Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuada según el nivel educativo a que se dirigen. -Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. -Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. -Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.
Procesos	Comunicación, argumentación	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueven situaciones en las que el alumno tenga que argumentar (describir, explicar, verificar) y formular conjeturas sobre relaciones matemáticas, investigarlas y justificarlas. -Se proponen situaciones que permitan al estudiante comunicarse usando el lenguaje matemático para expresar sus ideas con precisión. -Se proponen situaciones en las que el alumno pueda analizar y evaluar el pensamiento matemático y estrategias de los demás. -Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo).
	Modelización	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueve el uso de tecnología y el uso de funciones para modelar patrones de cambio cuantitativo.
	Generalización	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueven situaciones en las que los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y numéricos.

-Los contenidos, situaciones problema y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje, etc. se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades.

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 119).

3.2. Indicadores de idoneidad cognitiva

La consideración de los significados personales y relaciones hacen referencia a aprendizajes de sujetos individuales y pueden no ser aplicables en el análisis de una lección del libro de texto. Sin embargo, incorporamos estos indicadores, ya que pueden ser de utilidad al reflexionar sobre procesos de instrucción efectivamente implementados.

Significados personales (aprendizaje). Se propone la distinción entre comprensión y competencia y se contemplan indicadores nuevos para algunos componentes.

- *Comprensión.* Se considera relevante ofrecer experiencias que permitan la comprensión de las ideas relacionadas con los conceptos y que los estudiantes los utilicen en situaciones-problemas (Ballesta, 1995). Ello implica valorar la presencia equilibrada en los tres tipos de contenidos (conceptual, procedimental, actitudinal) en las actividades propuestas y si se incluyen tanto tareas rutinarias como preguntas novedosas que requieran comprensión relacional (Ballesta, 1995; Santaolalla, 2014). Esto aparece recogido en un nuevo indicador en el subcomponente *comprensión*.
- *Competencia.* Las competencias según el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014a) se consideran como capacidades para aplicar los contenidos de forma integrada en la realización de actividades y la resolución correcta de problemas complejos. Una de las competencias que se tienen en consideración desde el currículo es la competencia matemática. Interesa en este caso valorar si se plantean experiencias que permitan valorar si el alumno desarrolla la competencia comunicativa, argumentativa y fluencia procedimental, así como habilidades específicas de la

competencia matemática (formular, plantear, interpretar y resolver situaciones en contextos reales, donde los alumnos usen sus propias representaciones y estrategias personales para comunicar los resultados obtenidos).

Relaciones. Diversos autores coinciden en que los conceptos matemáticos deben ser presentados de manera que se puedan crear las interconexiones necesarias para que su aprendizaje sea significativo (Santaolalla, 2014). En este componente se analiza si las experiencias propuestas permiten valorar si el alumno establece conexiones entre los diferentes objetos matemáticos y entre sus correspondientes significados.

Conocimientos previos. Se valorará si se especifican (o retoman y consolidan) los conceptos y las competencias que sean requisitos previos, para que los estudiantes establezcan las conexiones adecuadas entre los distintos contenidos y, de esta forma, afronten el aprendizaje con garantías de éxito. Al analizar si el nivel de dificultad de los contenidos pretendidos es manejable en sus diversos componentes, se estudia si los conceptos, procedimientos, proposiciones se presentan en un grado creciente de complejidad (Monterrubbio y Ortega, 2012).

Conflictos cognitivos. Se considera si se valora el error como fuente de aprendizaje o si el autor prevé las posibles dificultades que pueden presentar los alumnos en el abordaje del tema (Braga y Belver, 2016). Ello implica contemplar si el libro de texto incluye propuestas de actividades para detectar las ideas, los errores o las dificultades previas que los estudiantes tengan en relación con dichos contenidos.

Evaluación. En este componente se valorará si el libro de texto incluye diversidad de instrumentos de evaluación, coevaluación y autoevaluación que se apliquen en variedad de contextos, como en la resolución de problemas o en la elaboración de proyectos y no solamente en pruebas de lápiz y papel. Se amplía el indicador previo de Godino (2013), dándole relevancia a la consideración de los procesos de generalización y modelización, analizando si se contempla

el avance de los alumnos de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización (Onrubia et al., 2001).

Tabla 3.2

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes	Indicadores
Significados personales (Aprendizaje)	<p>Comprensión</p> <p>-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno/lector comprende los conceptos, procedimientos, proposiciones y las mismas situaciones.</p> <p>Competencia</p> <p>-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno desarrolla la competencia comunicativa, argumentativa, fluencia procedimental y matemática (formular, plantear, interpretar y resolver situaciones en contextos reales)</p>
Relaciones	-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno establece relaciones o conexiones entre los objetos matemáticos y entre sus correspondientes significados.
Conocimientos previos	<p>-Se contempla en el texto los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema.</p> <p>-Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.</p>
Diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo
Conflictos Cognitivos	-Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.
Evaluación	<p>-Se valora el error como fuente de aprendizaje.</p> <p>-Se prevé posibles conflictos cognitivos de los alumnos.</p> <p>-Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.</p> <p>-Se promueve que los resultados de las evaluaciones se difundan y usen para tomar decisiones.</p> <p>-Los diversos modos de evaluación incluidos en el texto son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva).</p> <p>-La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.</p>

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 121).

Desde el NCTM (2000) se destaca la importancia de desarrollar las habilidades de metacognición, entendidas como las habilidades de reflexión que implican que los estudiantes sean conscientes de lo que hacen y que monitoricen y autoevalúen sus progresos, así como ajusten sus estrategias cuando resuelven problemas. Esto nos lleva a incluir como indicador la

existencia de preguntas o situaciones de evaluación que promuevan tales reflexiones, esto es, que permitan al alumno pensar sobre lo que ha hecho, sobre la solución que ha otorgado, sobre lo que ha aprendido. Se considera si el libro de texto facilita espacios que permitan al estudiante tomar conciencia de la naturaleza y propósitos de las tareas, controlar su propio aprendizaje, ser consciente de sus propios estilos de aprendizaje y autoevaluarse tomando conciencia de sus errores (Córdova, 2006; MEC, 2006; Monterrubio y Ortega, 2012). Estos indicadores quedan recogidos en la Tabla 3.2.

3.3. *Indicadores de idoneidad afectiva*

Los modelos de instrucción y el material didáctico, entre ellos los libros de texto, tienen una fuerte influencia en la configuración de actitudes y creencias (Santaolalla, 2014). Si bien no existe un consenso para delimitar los aspectos que se deben considerar al definir el dominio afectivo, la mayoría de los autores incluyen las emociones, actitudes, creencias y valores (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). Por ello, se han considerado en esta faceta a tales componentes. La Tabla 3.3 recoge los indicadores de idoneidad afectiva.

Las *actitudes* describen orientaciones o predisposiciones hacia ciertas sensaciones emocionales (positivas o negativas) moderadamente estables (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). En este componente de la GALT-Matemáticas, se tendrá en cuenta si existen situaciones que motivan al alumno a argumentar en condiciones de igualdad y valoran sus explicaciones e ideas (AAAS, 2000), así como tareas que promuevan la colaboración y participación activa y el respeto a estrategias y soluciones distintas a las propias (Santaolalla, 2014). También se considerará si el libro de texto promueve que los alumnos desarrollen una actitud de flexibilidad en la exploración de ideas matemáticas y métodos alternativos en la resolución de problemas (Rey y Penalva, 2002; Santaolalla, 2014).

Las *emociones* se entienden como cambios rápidos en los sentimientos que se suceden de forma consciente, preconscious o inconsciente durante la actividad matemática, y que

pueden variar de leves a intensas (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). En esta componente se valora que los contenidos estén relacionados con problemas sociales o de la vida social del alumnado (Braga y Belver, 2016), incluyan aspectos motivacionales mediante el humor, el juego o conexiones con la historia de las matemáticas y con otras disciplinas, que planteen situaciones de la vida real a través de la resolución de problemas, el lenguaje adecuado, etc. (Monterrubio y Ortega, 2012; Rey y Penalva, 2002).

Tabla 3.3

Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueve la participación activa en actividades, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática. -La argumentación se favorece en situaciones de igualdad, el valor de un argumento no depende de quién lo dice. -Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> -Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos. -Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías, adivinanzas, etc. -Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista. -Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas. -Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia y el miedo a las matemáticas.
Creencias	<ul style="list-style-type: none"> -Se analizan y se consideran las creencias sobre las matemáticas, sobre la metacognición de los estudiantes, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.
Valores	<ul style="list-style-type: none"> -Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.
Evaluación afectividad	<ul style="list-style-type: none"> -Se proponen actividades de evaluación que permitan valorar los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje.

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 122).

Se considera si las tareas y contenido son de interés para el alumno, si se valoran las ideas originales y el trabajo útil (Santaolalla, 2014) y se contempla en este componente si se

promueven espacios que permitan fomentar la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020; Santaolalla, 2014).

Las *creencias* implican asignar algún tipo de validez externa al sistema de configuraciones cognitivas; son altamente estables y en gran parte cognitivas y estructuradas (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). Será importante valorar si se consideran este componente sobre las matemáticas, sobre su enseñanza, sobre la metacognición de los estudiantes y en general del contexto social donde se desarrollan (Santaolalla, 2014; Rey y Penalva, 2002).

Vinculado al componente valores, entendidos como verdades personales y aspectos apreciados por los individuos, se contempla si el libro de texto promueve que el alumno valore las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Finalmente, siguiendo a Monterrubio y Ortega (2012) quienes plantean la necesidad de analizar si se valoran aspectos sociales y cívicos y actitudinales en general, en la guía hemos considerado introducir la evaluación afectiva como un nuevo componente, respecto a los considerados en Godino et al. (2012), Godino (2013) o Beltrán-Pellicer y Godino (2020).

3.4. Indicadores de idoneidad interaccional

En esta faceta se abordan cuestiones que refieren a la interacción autor-estudiante, entendiendo que, al menos en el texto tradicional, la interacción no es bidireccional. En este sentido, se valora si se hace una presentación clara y bien organizada de los contenidos y si se enfatizan los conceptos clave del tema a través de algún mecanismo. También se observa si el vocabulario utilizado es comprensible, si las ilustraciones son adecuadas en cuanto a calidad gráfica y finalidad, y si se presentan ejemplos variados y claros a lo largo de la teoría (Monterrubio y Ortega, 2012).

La interacción entre alumnos se contempla por medio de la presencia de tareas o situaciones que promuevan el diálogo y comunicación entre los alumnos, considerando agrupaciones flexibles (Braga y Belver, 2016).

La existencia de situaciones que permiten a los alumnos ser espontáneos, dinámicos, participativos e inquietos (Santaolalla, 2014), desarrollando la autonomía intelectual para enfrentarse a problemas reales y situaciones nuevas (Rey y Penalva, 2002) se incluye en el componente de autonomía.

Tabla 3.4

Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Componentes	Indicadores
Interacción autor-alumno	<ul style="list-style-type: none"> -El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) -Se promueven situaciones en las que se busque llegar a consensos con base al mejor argumento. -Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. -Se promueve o facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la exposición.
Interacciones discentes	<ul style="list-style-type: none"> -Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes puntos de vista utilizando argumentos matemáticos. -Se plantean situaciones en las que los estudiantes deban convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> -Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> -Se incluyen formas de evaluación que permita la observación sistemática y continua del progreso cognitivo de los alumnos. -La evaluación es vista como un proceso al servicio de la enseñanza y el aprendizaje (sirve de feedback a los estudiantes). -Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas...). -Se incluyen actividades de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. -La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje).

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 123).

En el componente de evaluación formativa se considera la presencia de formas de evaluación continua a lo largo de la lección y no únicamente al final (AAAS, 2000;

Monterrubio y Ortega, 2012) que sirvan de feedback a los estudiantes. También se analiza si el libro de texto contempla el uso de diversas técnicas de evaluación coherentes con las metas de aprendizaje (Godino et al., 2012). La Tabla 3.4 incluye los indicadores finalmente considerados para cada uno de estos componentes de la idoneidad interaccional.

3.5. Indicadores de idoneidad mediacional

En esta faceta se consideran dos componentes: recursos materiales y tiempo. En cuanto al uso de recursos materiales se valora en qué medida el libro de texto promueve la incorporación de materiales complementarios al propio libro (Braga y Belver, 2016); si se proponen tareas adecuadas que requieran del uso de calculadora, ordenador, internet y si se explicitan, y son diversas, las fuentes usadas (Martínez-Bonafé, 1992). Con relación al componente tiempo, se considera si el espacio temporal es adecuado para cubrir los contenidos de mayor dificultad y si en general la temporalización de actividades y contenidos es factible. La Tabla 3.5 incluye los indicadores finalmente contemplados.

Tabla 3.5

Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores
Recursos materiales	-Se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. -Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones. -Se explicitan las fuentes usadas y si son diversas.
Tiempo	-Se plantea el espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión. -La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos es adecuada.

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 125).

3.6. Indicadores de idoneidad ecológica

La dimensión ecológica contempla en primer lugar el grado en que los contenidos, objetivos, situaciones se adecuan a las directrices curriculares (AAAS, 2000; Monterrubio y

Ortega, 2012). Para una educación en valores se valora que el recurso educativo evite la transmisión de estereotipos, elementos racistas, sexistas, homofóbicos, discriminatorios, etc., tanto en el texto como en las imágenes (Braga y Belver, 2016). También se tiene en cuenta si se aborda la diversidad y si se ofrecen distintos puntos de vista sobre un mismo fenómeno cultural (Martínez-Bonafé, 1992).

Por último, en el componente de conexiones intra e interdisciplinares se analiza en qué medida el texto indica vínculos con aprendizajes anteriores y posteriores (Martínez-Bonafé, 1992), conexiones con la historia de las matemáticas (Monterrubio y Ortega, 2012) y la presencia de temas transversales en los contenidos y en las situaciones (Braga y Belver, 2016). Todos estos criterios de idoneidad aparecen recogidos en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6

Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	-Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura a la innovación	-Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.
Adaptación socio-profesional	-Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	-Se contempla la formación en valores democráticos (respeto a la diversidad, tolerancia, integración, cooperación, conciencia ecologista, pacifista, otros valores y prejuicios) y se dan oportunidades para que los alumnos realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).
Conexiones intra- e interdisciplinares	-Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra- e interdisciplinares (temas transversales, historia de la matemática, otros).

Fuente. Elaborada por los autores a partir de Godino (2013, p. 126).

4. Guía para el análisis de lecciones de libros de texto en proporcionalidad

En esta sección, se describe la adaptación de la GALT-Matemáticas al tema de proporcionalidad. Prestamos especial atención a las facetas epistémica y cognitiva ya que son estas donde surgen cambios importantes en cuanto a la adaptación o inclusión de algunos

indicadores. No obstante, se incluyen también algunas consideraciones relevantes en el resto de las facetas.

4.1. Faceta epistémica

En la Tabla 3.7 incluimos el conjunto de indicadores para los distintos componentes y subcomponentes de la idoneidad epistémica establecidos en Godino, Burgos et al. (2019). A continuación, se describen los resultados de las investigaciones que fundamentan la adaptación de indicadores de Godino (2013), Aroza et al. (2016) o la inclusión de nuevos indicadores en la guía.

Tabla 3.7

Indicadores de idoneidad epistémica en el tema de proporcionalidad

Componentes	Indicadores
Significados	<p>Problemas</p> <ul style="list-style-type: none"> -Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de razón, proporcionalidad y porcentajes (involucra resolver y formular problemas). -Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la razón, proporcionalidad y porcentajes. -Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea. -La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas. -Las situaciones involucran el uso de razones internas y externas. -Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional. -Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad y porcentajes. <p>Lenguajes</p> <ul style="list-style-type: none"> -Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de razón, proporcionalidad y porcentajes. -Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige. -Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la razón, proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas. -Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes.

Componentes	Indicadores
	<p>Conceptos</p> <p>-Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo, razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional, relación proporcionalidad directa entre magnitudes y los conceptos involucrados.</p> <p>-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar definiciones de razón, proporcionalidad y porcentajes.</p> <p>-Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.</p>
	<p>Proposiciones</p> <p>-Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de razón, proporcionalidad y porcentaje de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.</p> <p>-Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.</p> <p>-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.</p>
	<p>Procedimientos</p> <p>-Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de razón, proporcionalidad y porcentajes para el nivel educativo correspondiente.</p> <p>-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.</p>
	<p>Argumentos</p> <p>-Las proposiciones y procedimientos del contenido de razón, proporcionalidad y porcentaje se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.</p> <p>-Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.</p>
Relaciones	<p>-Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.</p> <p>-Se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes (se trata la razón entre números, entre cantidades de una misma magnitud, entre cantidades correspondientes, etc.)</p> <p>-Se identifican, articulan y desarrollan los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.</p>
Procesos	<p>Comunicación, argumentación</p> <p>-Se promueven diversas situaciones de razón, proporciones y porcentajes donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.</p> <p>Modelización</p>

Componentes	Indicadores
	-Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo) en los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.
	Generalización
	-Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y numéricos, incluso mediante el uso de expresiones algebraicas (función lineal) relacionados con los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.
Conflictos epistémicos	-Los contenidos, situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. de proporcionalidad y porcentajes se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades; se explicitan las condiciones que motivan la condición de proporcionalidad directa, se diferencia la razón de fracción.

Significados. Para este componente de la faceta epistémica, se tienen en cuenta los subcomponentes de problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, a los que hacemos referencia a continuación.

Problemas. Como hemos mencionado, se distinguen esencialmente cuatro significados institucionales para la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico-funcional (Aroza, 2016). Con el segundo indicador del subcomponente problemas se valora que la lección del libro de texto incluya una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares, etc.), en las que se trabajen dichos significados de la proporcionalidad.

Se incluye un tercer indicador con relación a la presencia de situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea. Dado que el razonamiento proporcional supone la capacidad para diferenciar las comparaciones aditivas de las multiplicativas (Behr et al., 1992; Lamon, 2006; Vergnaud, 1983), investigaciones centradas en el análisis de lecciones de libros de texto en el tema de proporcionalidad (Shield y Dole, 2013), consideran este aspecto como uno de los puntos clave para una instrucción de calidad. Por otro lado, para diversos investigadores, el razonamiento

proporcional consiste en reconocer la proporción como una comparación en términos multiplicativos (Cramer y Post, 1993a; 1993b; Lamon, 2007). Por este motivo, el siguiente indicador contempla si se hace explícita la relación multiplicativa en situaciones proporcionales en diferentes tipos de problemas (Shield y Dole, 2013).

Siguiendo las recomendaciones de investigadores como Freudenthal (1983) y Ruiz y Valdemoros (2006), quienes consideran que el pensamiento proporcional cuantitativo implica el manejar indistintamente razones internas y externas (es decir, relaciones establecidas entre diferentes valores de la misma magnitud y entre valores de diferentes magnitudes) al resolver problemas matemáticos, se ha incluido un indicador que permite valorar si las situaciones propuestas por el autor involucran su uso. El penúltimo indicador en este subcomponente, relativo a la presencia de situaciones que involucren el cálculo mental responde a consideraciones curriculares (MECD, 2014b).

Lenguaje. Además de que se utilicen diferentes tipos de expresión para modelizar problemas, realizando procesos de traducción entre las mismas, que el nivel del lenguaje sea adecuado a los alumnos a que se dirige y que se fomente que los alumnos utilicen e interpreten las diferentes formas de representaciones de la proporcionalidad y porcentajes, se incluye un cuarto indicador que permite valorar si se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes. La importancia de este aspecto según Shield y Dole (2013) reside en que la estructura de las situaciones proporcionales es una relación entre dos magnitudes y que al considerar esta relación pueden darse los dos tipos de análisis (Vergnaud, 1983).

Conceptos. El primer indicador en este subcomponente contempla la necesidad de presentar de forma clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad, según el nivel educativo; para el caso de secundaria sería necesario distinguir entre razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional, entre otros (Aroza et al., 2016). Este aspecto recibe especial

atención en el enfoque aritmético de la proporcionalidad que tiene un carácter predominante en varias propuestas curriculares e investigaciones (Ben-Chaim et al., 2012; Fernández y Puig, 2002; Hart, 1988; Lamon, 2007; Shield y Dole, 2013). Para Fernández y Puig (2002) el estatuto lógico de la razón es de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos previos, ya que proviene de una relación de equivalencia. Por otro lado, es importante prestar atención a los conceptos de razón y fracción destacando sus diferencias, ya que la creencia de que estos conceptos son sinónimos puede llevar a potenciales conflictos, frecuentemente identificados en la literatura (Freudenthal, 1983). Al contemplar en el libro de texto este indicador, debe tenerse en cuenta tales aspectos, así como distinguir si los conceptos más relevantes se definen de manera explícita y si los términos implicados en su definición también se precisan.

El último indicador de este subcomponente permite valorar si se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre las magnitudes, característica clave de los conceptos involucrados en el tema de proporcionalidad y del razonamiento proporcional (Cramer y Post, 1993a; 1993b; Lamon, 2007).

Proposiciones. En la lección del libro de texto, se deben presentar las proposiciones fundamentales sobre razón, proporcionalidad y porcentajes de manera clara y adecuada, así como aquellas proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional: correspondencia biunívoca, monotonía y presencia de una constante de proporcionalidad (Fiol y Fortuny, 1990). Rivas (2013) propone: (a) percatarse que una razón requiere que exista una relación entre dos cantidades, (b) dicha relación debe ser siempre verdadera en el sentido que los cambios sobre una de las cantidades implican cambios en la otra cantidad (covariación), (c) dicha covariación debe ser constante, un cambio sobre la primera cantidad implica poder encontrar un cambio sobre la segunda cantidad y (d) que esa relación entre las cantidades es de tipo multiplicativa. Todas estas consideraciones deben

tenerse presentes al valorar el segundo indicador. Además, se considera un tercer indicador para analizar si se proponen situaciones donde los alumnos tengan que aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.

Procedimientos. En este subcomponente se valora que se presenten de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales con relación a razón, proporcionalidad (obtención de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, planteamiento y resolución de la ecuación proporcional, definición y manipulación de la función lineal) y porcentajes. Es importante también que se incluyan situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.

Argumentos. En este subcomponente se consideran dos indicadores: que las proposiciones y procedimientos con relación a la razón, proporcionalidad y porcentaje se expliquen de forma adecuada al nivel educativo correspondiente; que se favorezca la justificación de los enunciados y proposiciones mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. A este respecto, mencionamos que para Lamon (2007) “el razonamiento proporcional significa aportar razones que sustenten afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (a, b, c, d) en un contexto que simultáneamente involucre la covarianza de cantidades y la invariancia de razones o productos” (p. 637).

Relaciones. Existen conexiones imprescindibles que deben trabajarse en el tema de proporcionalidad: por un lado, la relación con el tema de fracciones y números racionales (Freudenthal, 1983; MECD, 2014b; Shield y Dole, 2013); por otro, el vínculo entre el bloque aritmético y de magnitudes, conexión que muchas veces no se hace explícita en el tratamiento del tema en los libros de texto debido a que se considera la razón como un número únicamente (Gairín y Oller, 2012; Guacaneme, 2001).

El último indicador en esta componente hace hincapié en la interrelación entre los diversos significados de la proporcionalidad que construyen el significado global para este

contenido. El significado global, que se sigue tanto de los contextos de uso intra-matemáticos (aritmético, algebraico-funcional, geométrico, probabilístico, estadístico) como extra-matemáticos (ámbitos científico-técnico y artístico, vida cotidiana) debe permitir un tránsito flexible entre los distintos significados parciales (Wilhelmi, 2017). Además, el estudio del tema de proporcionalidad basado exclusivamente en uno de estos enfoques puede generar obstáculos epistemológicos (Aroza et al., 2016), de ahí la importancia de contemplar relaciones entre estos.

Procesos matemáticos. En este componente se consideran los subcomponentes de *modelización* y *generalización*. Los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal, que puede “considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad” (Fiol y Fortuny, 1990, p. 83). Por este motivo se ha precisado en el indicador referido al proceso de modelización, valorar si se promueve que el alumno utilice el modelo matemático de la función lineal. En este sentido, autores como Bolea et al. (2001) y Obando et al. (2014), describen el razonamiento proporcional como aquel que comprende una función lineal en un sistema de dos variables y permite extraer conclusiones de una situación que puede caracterizarse por una razón constante entre cantidades de magnitudes.

Partiendo de que la generalización constituye un rasgo característico del pensamiento algebraico, y la consideración del razonamiento proporcional como ruta de acceso al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2010; Lim, 2009), se incluye un indicador para valorar si la lección promueve situaciones donde los estudiantes tengan la oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas sobre patrones numéricos y geométricos que permitan avanzar desde el tratamiento aritmético de la razón y proporción hasta el algebraico basado en la función lineal.

Conflictos epistémicos En este componente se tiene en cuenta la existencia de acciones que constituyen potenciales obstáculos epistemológicos para el desarrollo del razonamiento

proporcional. Una de ellas consiste en obviar las condiciones necesarias y suficientes para determinar si una relación es o no de proporcionalidad directa (Bosch, 1994; Fiol y Fortuny, 1990; Rivas, 2013). Además, el uso de situaciones pseudo-proporcionales, referidas a problemas cuya estructura lingüística es similar a uno de proporcionalidad (Modestou et al., 2008), puede generar conflictos al asumirlos como proporcionales. Así, un error comúnmente reconocido consiste en la “ilusión de la linealidad”, esto es, aplicar procedimientos lineales en la resolución de problemas no lineales (Van Dooren et al., 2003).

4.2. *Faceta cognitiva*

En la Tabla 3.8 incluimos el conjunto de indicadores de esta faceta para los componentes y subcomponentes establecidos en Godino et al. (2019). A continuación, hacemos referencia a los resultados de investigaciones que fundamentan el ajuste o incorporación de nuevos indicadores respecto a Godino (2013) o Aroza et al. (2016).

En el caso del análisis de una lección del libro de texto puede ser más complicado o incluso menos pertinente aplicar los componentes de significados personales, relaciones y procesos matemáticos ya que hacen referencia a aprendizajes de sujetos individuales. Se pueden identificar, no obstante, algunos conflictos cognitivos potenciales relacionados con los conocimientos previos requeridos. También es posible observar si el autor de la lección tiene en cuenta posibles adaptaciones a diferencias individuales y propone actividades de evaluación.

Significados personales. Se consideran dos subcomponentes: *comprensión* y *competencia*. El primero de ellos valora si el proceso instruccional promueve la comprensión de los conceptos de covariación, invariancia, comparación, así como de los cambios absolutos y relativos, el sentido de razón y las relaciones matemáticas involucradas en situaciones proporcionales. Las nociones de comparación y covariación (relación existente entre dos magnitudes, de manera que todo aumento o disminución de una de ellas se traduce en un aumento o disminución de la otra) constituyen la base del razonamiento proporcional y son los soportes conceptuales de la

razón y la proporción (Lesh et al., 1988). Aspectos como los cambios absolutos y relativos (aditivos/multiplicativos), el sentido de razón (relación multiplicativa) e invariancia (entre razones) están fuertemente relacionados con la adquisición del razonamiento proporcional (Cramer y Post, 1993a; 1993b; Lamon, 2007).

Tabla 3.8

Indicadores de idoneidad cognitiva en el tema de proporcionalidad

Componentes	Indicadores
Significados personales (Aprendizaje)	<p>Comprensión</p> <p>-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno comprende los conceptos, procedimientos, proposiciones y las mismas situaciones en el tema de razón, proporcionalidad y porcentajes. Importa especialmente que se promueva la comprensión de: conceptos de covariación, invariancia, comparación, los cambios absolutos y relativos, el sentido de razón, las relaciones matemáticas involucradas en situaciones proporcionales.</p> <hr/> <p>Competencia</p> <p>-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno desarrolla la competencia comunicativa, argumentativa y fluencia procedimental. Interesa especialmente que el alumno sea capaz de: usar razones y proporciones, manejar las razones internas y externas, distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales, resolver situaciones multiplicativas y aditivas.</p>
Relaciones	-Las experiencias (situaciones, ejemplos, explicaciones...) propuestas permiten valorar si el alumno establece relaciones o conexiones entre los objetos matemáticos y entre sus correspondientes significados: intuitivo, geométrico, aritmético algebraico en diferentes contextos.
Conocimientos previos	<p>-Se contemplan los conocimientos previos necesarios de acuerdo al nivel educativo correspondiente.</p> <p>-Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.</p>
Diferencias individuales	<p>-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.</p> <p>-Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas (multiplicativas, de construcción progresiva, razón unitaria, factor de cambio o factor escalar, comparación de razones, algoritmo del producto cruzado o regla de tres, etc.).</p>
Conflictos cognitivos	<p>-Se valora y emplea el uso de estrategias erróneas (estrategias aditivas...) como fuente de aprendizaje.</p> <p>-Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (que involucren números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, que se altere el orden de los datos en los problemas...)</p> <p>-Se advierte de errores y dificultades de los alumnos tanto conceptuales como procedimentales (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias (covariación), ignorar parte del problema, realizar operaciones al azar, usar estrategias aditivas erróneas...).</p>

Componentes	Indicadores
Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> -Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación. -Se promueve que los resultados de las evaluaciones se difundan y usen para tomar decisiones. -Los diversos modos de evaluación son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva). -La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

En relación con la competencia, el razonamiento proporcional implica ser capaz de diferenciar las comparaciones aditivas de las multiplicativas (Behr et al. 1992; Lamon, 2006; Shield y Dole, 2013; Verganud, 1983). Por otro lado, para investigadores como Freudenthal (1983) o Ruiz y Valdemoros (2006), el pensamiento proporcional cuantitativo se adquiere cuando se es capaz de usar las razones y proporciones y utilizar indistintamente razones internas y externas. Por este motivo, en este subcomponente se considera si la lección permite contemplar si el alumno es capaz de: usar razones y proporciones, manejar las razones internas y externas, distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales y resolver situaciones multiplicativas y aditivas.

Relaciones. En este componente se analiza si las situaciones propuestas permiten valorar si el alumno establece conexiones entre los diferentes objetos matemáticos (razón, proporción, relación de proporcionalidad, función lineal, etc.) y entre sus diversos significados.

Conocimientos previos. En este componente se valora si se contemplan los conceptos (fracciones, equivalencia de fracciones, números decimales, magnitudes, entre otras) y las habilidades que son requisitos previos para que los estudiantes establezcan las conexiones adecuadas entre los distintos objetos matemáticos. Se analiza también si los conceptos, procedimientos y proposiciones en relación con la proporcionalidad se presentan en un grado creciente de complejidad (Monterrubio y Ortega, 2012).

Diferencias individuales. En la lección se debe garantizar que todos los estudiantes logren un adecuado razonamiento proporcional. En particular, esto requiere la capacidad de desarrollar múltiples estrategias (multiplicativas, de construcción progresiva, la razón unitaria, factor de cambio o factor escalar, comparación de razones, algoritmo del producto cruzado o regla de tres) para resolver diversos tipos de situaciones-problemas (Cramer y Post, 1993b; Ercole et al., 2011; Lesh et al., 1988; Silvestre y Da-Ponte, 2011; Tourniaire y Pulos, 1985).

Conflictos cognitivos. Van Dooren et al. (2003) afirman que a menudo los estudiantes utilizan un razonamiento proporcional en circunstancias que no lo requieren (por ejemplo, situaciones constantes, no lineales y aditivas) siendo uno de los errores más dominantes. De forma similar se describe la tendencia de abordar situaciones proporcionales de forma aditiva en lugar de multiplicativa (Cramer y Post, 1993b; Lamon, 1993; Tourniaire y Pulos, 1985), evitando el uso de fracciones (Hart, 1988). Estas estrategias erróneas deben ser valoradas y empleadas como fuente de aprendizaje.

Por otro lado, es importante valorar el nivel de dificultad de las tareas en el tema de proporcionalidad. Al respecto, varias investigaciones (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 1993; Karplus et al., 1983; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2009) evidencian la existencia de diversos factores que intervienen en el nivel de dificultad de las tareas de proporcionalidad, entre ellos y como hemos mencionado: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes que aparecen en la situación, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad con el contenido, el orden en que se presentan los datos en problemas de valor faltante, entre otros. Finalmente, es importante que la lección del libro de texto advierta de estos posibles errores a los alumnos.

Evaluación. En este componente se valora si el libro de texto incluye diversos instrumentos de evaluación, coevaluación y autoevaluación que se apliquen en contextos variados. Los diversos modos de evaluación deben permitir apreciar el grado de adquisición de los conocimientos y

competencias pretendidas. Además de la comprensión conceptual y proposicional, la competencia comunicativa y argumentativa o la flexibilidad procedimental, adquiere importancia la evaluación de la competencia de modelización y generalización que no aparecía considerada en Godino (2013) o Aroza et al. (2016). Además, la importancia de la metacognición, (NCTM, 2000) lleva a valorar la existencia de preguntas o situaciones que permitan evaluar la habilidad reflexiva de los estudiantes para tomar conciencia de lo que hacen, autoevaluar sus progresos y ajustar sus estrategias en la resolución de problemas.

4.3. Faceta afectiva

En este caso, la consideración del contenido específico no supone cambios relevantes en los indicadores que se consideran para cada una de estas componentes con respecto a la GALT-Matemáticas. Sin embargo, mencionamos aquellos aspectos de las investigaciones previas sobre el dominio afectivo que tienen que ver con la proporcionalidad.

El aula de clase debe ser un espacio social que fomente la participación, la responsabilidad en el trabajo, el interés y la motivación por la materia (Aroza et al., 2016). En el tema de proporcionalidad, existen evidencias de que los estudiantes suelen tener un mejor desempeño cuando participan de actividades colaborativas (Ben-Chaim et al., 1998; Burgos y Godino, 2018); además la participación, el aprendizaje en contexto, así como el uso de juegos interactivos permiten mejorar las habilidades del razonamiento proporcional (Martínez, 2015; Vandercruysse et al., 2016). Por otro lado, investigaciones experimentales respaldan que la resolución de problemas sobre proporcionalidad utilizando materiales de robótica fomentan también la motivación, el interés, las buenas actitudes y emociones de los alumnos (Martínez, 2015). Así, la idoneidad afectiva del proceso instruccional planificado en una lección de libro de texto se puede incrementar incluyendo tareas de trabajo colaborativo o incorporando materiales y recursos como los mencionados.

4.4. Faceta instruccional (interaccional y mediacional)

Como ocurría en la faceta afectiva, la consideración del contenido específico no supone cambios relevantes en los indicadores respecto a la GALT-Matemáticas. Precisamos a continuación aquellos aspectos que sí son particulares del tema de la proporcionalidad.

Existe un amplio consenso en la comunidad científica sobre la pertinencia de iniciar el estudio de la proporcionalidad con experiencias intuitivas correspondientes a una aproximación cualitativa de la proporcionalidad, basada en actividades de estimación (Fernández, 2001; Fiol y Fortuny, 1990; Piaget, 1978). Se propone una secuencia didáctica que permita avanzar desde un conocimiento de naturaleza cualitativa de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva que permita una consolidación gradual del razonamiento proporcional (Cramer y Post, 1993a; Ruiz y Valdemoros, 2006). En este sentido, conviene retrasar la introducción de la regla de tres hasta que los alumnos hayan adquirido suficiente experiencia en el tema y enseñando otros procedimientos alternativos (Cramer et al., 1993; Ercole et al., 2011; Mochón, 2012; Obando et al., 2014; Shield y Dole, 2013; Tourniaire y Pulos, 1985).

En el aspecto mediacional se consideran dos componentes: recursos materiales y tiempo. En relación con el primero, la lección del libro de texto debe promover la incorporación de materiales complementarios al propio como: computadora, el escalímetro, el pantógrafo, el compás de proporción, entre otros para trabajar el tema (Grupo Beta, 1990).

4.5. Faceta ecológica

La faceta ecológica contempla en primer lugar el grado en que los contenidos, objetivos, situaciones se adecuan a las directrices curriculares (AAAS, 2000). Además, estos contenidos deben contribuir activamente a la formación socio-profesional de los estudiantes, estableciéndose relaciones intra e interdisciplinarias.

En el currículo español el tema de proporcionalidad tiene una presencia longitudinal y transversal, apareciendo vinculada a materias como Educación Artística, Física, Química, Biología, Dibujo Técnico, Educación Plástica, Visual y Audiovisual entre otras (Wilhelmi, 2007). El tema aparece en primaria vinculado al bloque denominado Números (MECD, 2014a). En dicho bloque se trata principalmente los conceptos de: razón y proporción, magnitudes directa e inversamente proporcionales, constante de proporcionalidad, porcentajes, así como las leyes del doble, triple, mitad y aplicaciones en la vida cotidiana. Por su parte, en secundaria la proporcionalidad se encuentra en los bloques denominados: Números y Álgebra, Geometría, Funciones, Estadística y Probabilidad (MECD, 2014b). En el bloque de Números y Álgebra se incluyen los contenidos de: porcentajes (aumentos y disminuciones), la razón y proporción, magnitudes directa e inversamente proporcionales, la constante de proporcionalidad, resolución de problemas, repartos directa e inversamente proporcionales. Desde el punto de vista geométrico, la proporcionalidad aparece relacionada a los contenidos de: semejanza y el Teorema de Tales. En el bloque de Funciones, se trabaja desde la función lineal, específicamente en representaciones gráficas de modelos, incluyendo el caso de proporcionalidad inversa. Por último, en el bloque de Estadística y Probabilidad se relaciona con los contenidos de: media, desviación típica de la media muestral y proporción muestral, intervalos de confianza.

En el currículo de Costa Rica, la proporcionalidad también se contempla como uno de los contenidos de aprendizaje que tiene vinculación con otros contenidos intra e interdisciplinarios “las relaciones de proporcionalidad son muy importantes para la identificación y utilización de modelos en diversos contextos” (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012, p.327). Según el MEP (2012), en los ciclos de educación primaria, los estudiantes han debido adquirir habilidades que implican la resolución de ecuaciones de primer grado, el reconocimiento de relaciones de dependencia entre dos cantidades variable, así como

la aplicación de la regla de tres, porcentajes y proporcionalidad directa para resolver problemas. Posteriormente, en secundaria, se contempla el estudio de relaciones de diversos tipos (lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa), así como sus distintas representaciones (verbal, tabular, algebraica, gráfica). En séptimo año se propone el estudio de las relaciones de proporcionalidad directa e indirecta, orientado a preparar el estudio de las funciones, por ejemplo, la relación de proporcionalidad entre las variables x , y del tipo $y = ax$ se aborda en octavo año. En general, la proporcionalidad aparece vinculada a los bloques o áreas temáticas de “relaciones y algebra” y “medidas”, en este último caso asociado a la semejanza de figuras geométricas y uso de escalas en mapas.

La formación socio-profesional supone en primer lugar que los alumnos tengan oportunidades de desarrollar el razonamiento proporcional en su vida diaria (Karplus et al. 1983; Lamon, 1993) para lo que es fundamental que se incluyan situaciones contextualizadas en la lección del libro de texto. Además, diferentes estudios dan cuenta de la utilidad de la proporcionalidad en trabajos u oficios variados (agricultores, constructores, pintores, marmoleros, maestros albañiles) y en el contexto comercial que implica el manejo de dinero, pago o cobro de servicios, de mercancías, entre otros (Avila, 2013; Carraher et al., 1991; Soto y Rouche, 1995).

5. Síntesis e implicaciones

Hemos descrito la elaboración de una guía de análisis de libros de textos de matemáticas fundamentada en la teoría de la idoneidad didáctica (Breda et al., 2018; Godino, 2013; Godino et al., 2012) cuyos indicadores en cada una de las facetas han sido reanalizados y enriquecidos con la revisión de antecedentes sobre el análisis de libros de texto. También hemos abordado el problema de identificar, en las investigaciones didácticas sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria, resultados que se pueden interpretar

como indicadores de idoneidad didáctica de los procesos de instrucción sobre dicho contenido matemático.

Partiendo de la revisión de la literatura específica y apoyándonos en las facetas y componentes de la Teoría de la Idoneidad Didáctica para categorizar los indicadores relativos a las distintas facetas, hemos construido el instrumento GALT-proporcionalidad, concretando cambios relevantes en las Tablas 3.7 y 3.8. En el caso de las dimensiones epistémica y cognitiva ha sido especialmente necesario ampliar los criterios generales de idoneidad propuestos en trabajos previos (Aroza et al., 2016; Godino, 2013) con indicadores específicos del contenido matemático, en nuestro caso la proporcionalidad.

El libro de texto escolar presenta unas características peculiares: es un material curricular de uso preferente por el profesorado y mediador del aprendizaje del estudiante. Por ello, el análisis del libro de texto ofrece muchas posibilidades en la formación inicial de profesionales de la educación (Braga y Belver, 2016). En este sentido, las guías elaboradas en esta investigación son una herramienta para el análisis sistemático y reflexivo que los profesores en formación y en ejercicio pueden emplear en la detección de características de los libros de textos, así como para la identificación de posibles maneras de usarlos en combinación con otros recursos complementarios para optimizar la enseñanza y aprendizaje de un tema en específico. Consideramos que la realización del análisis didáctico de lecciones del libro de texto debería ser una competencia del profesor de matemáticas como parte de una competencia más general de planificación de lecciones (Burgos, Castillo et al., 2020). Por ello, el diseño y experimentación de intervenciones formativas específicas para capacitar sobre el análisis de lecciones que permitan el uso de las guías de análisis de libros de texto por los propios profesores es relevante y significativo.

CAPÍTULO 4. PRIMER CICLO DE EXPERIMENTACIÓN CON FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021a). Evaluación de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre análisis de libros de texto. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 197–204). SEIEM.
 - Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021b). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *ACTA SCIENTIAE*, 23(4), 169–206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
 - Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, 34(2), 39–71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>
-

1. Introducción

El uso del libro de texto en el aula aparece vinculado a una labor profesional docente que implica que éste adquiera un posicionamiento crítico (Braga y Belver, 2016; Monterrubio y Ortega, 2012). Conocer los modelos didácticos implícitos en los textos escolares es de vital importancia para comprender el tipo de intervención que promueven y poder reflexionar sobre sus consecuencias y su evolución (Serradó y Azcárate, 2003).

Se espera que el profesor sea capaz de utilizar los materiales curriculares como guía para el diseño instruccional, tomando decisiones pedagógicas, interpretando la información que en ellos se incluye, estableciendo críticas y realizando adaptaciones que solventen sus limitaciones al considerar las necesidades del contexto (Avila, 2019; Braga y Belver, 2016;

Brown, 2009; Choppin, 2011; Remillard, 2005; Yang y Liu, 2019; Taylor, 2013; Thompson, 2014). Sin embargo, los profesores en formación y en ejercicio suelen presentar dificultades, tanto para realizar un análisis adecuado de los libros de texto como para adoptar un enfoque analítico, dado que se basan en sus propios criterios intuitivos (Beyer y Davis, 2012; Lloyd y Behm, 2005; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008).

Esto nos lleva a reconocer la importancia y necesidad de incorporar herramientas de análisis en el diseño de actividades formativas que guíen a los docentes en la identificación de fortalezas y debilidades de los materiales curriculares y la realización de adaptaciones oportunas. Dado que los libros de texto de matemáticas pueden presentar deficiencias y los futuros profesores se enfrentarán a contextos donde se exige su uso (Lloyd y Behm, 2005), se trata de garantizar que estos dispongan de criterios para hacer un uso adecuado de dicho material.

En este capítulo exploramos el uso de la herramienta idoneidad didáctica (Godino, 2013) para fomentar que futuros profesores de matemáticas de secundaria reflexionen y adquieran los conocimientos y competencias necesarias, no sólo en el análisis de lecciones de libros de texto, sino en la gestión crítica de dichas lecciones.

Con este propósito, describimos el diseño, implementación y análisis de los resultados de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria, con la que se pretende mostrarles una metodología para analizar las lecciones de los libros de texto y reflexionar sobre su uso de forma crítica basada en la idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores. Con ello, pretendemos responder a la pregunta central de la investigación siguiente:

¿Ayuda la metodología basada en el constructo idoneidad didáctica, a que los futuros profesores desarrollen un análisis crítico y constructivo de las lecciones de los libros de texto de matemáticas?

Para responder a esta pregunta, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Analizar cómo los futuros profesores de secundaria aplican la herramienta para valorar de manera crítica y constructiva una lección particular de proporcionalidad.
- Analizar cómo consideran su análisis para proponer mejoras en la gestión del recurso.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En primer lugar, se describe la metodología seguida y el contexto de aplicación de la experiencia. En la sección 3 se presentan los instrumentos de recogida y análisis de datos. Los resultados del análisis de los informes entregados por los futuros profesores con relación a la experiencia se incluyen en la sección 4. El capítulo termina con las conclusiones sobre la experiencia, entre las que indicamos limitaciones y posibles líneas de investigación futura.

2. Metodología, participantes y contexto de aplicación

Seguimos las cuatro fases de investigación correspondientes con la ingeniería didáctica en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino, Batanero et al., 2013; Godino, Rivas et al., 2014) (Capítulo 2, sección 3). El estudio preliminar, nos llevó a estudiar y revisar sistemáticamente los antecedentes sobre cada foco de interés de este estudio (Capítulo 1), para conocer los aspectos relacionados al contenido didáctico-matemático implicado, dificultades comunes que conlleva la tarea del análisis de libros de texto para los futuros docentes, posibles estrategias y patrones de interacción a implementar, así como a elaborar la GALT-proporcionalidad como recurso para promover la competencia de análisis de libros de texto de matemáticas en futuros docentes (Capítulo 3). Por tanto, en la siguiente sección nos centramos en describir los aspectos más relevantes asociados a la segunda fase de la ingeniería didáctica: diseño del experimento (consignas entregadas a los participantes y análisis a priori del texto). El análisis de contenido (Cohen et al., 2011) de los informes entregados por los futuros profesores, se apoya en la categorización dada por las facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica. Los resultados de este análisis nos permiten valorar los resultados de

aprendizaje logrados (tercera fase de investigación, implementación), comparando con la valoración experta previa. La última fase de la ingeniería didáctica, el análisis retrospectivo, nos lleva a reflexionar sobre el contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación de la experiencia formativa en la última sección del capítulo.

La experiencia se realizó en el marco de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de Matemáticas), en diciembre del 2019, con 30 estudiantes del curso de posgrado Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, en el que se contempla el libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y su relación con los organizadores curriculares. La intervención formativa tuvo una duración de dos horas y media de trabajo presencial en el aula. Los participantes dispusieron además dos semanas para elaborar los informes escritos. Durante este tiempo, podían preguntar sus dudas por medio de la plataforma Moodle, siendo la mayoría de las cuestiones que plantearon relativas a conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad. De manera previa a esta sesión, los participantes habían recibido formación (dos sesiones de dos horas y media de duración) sobre la idea de significados y los distintos tipos de objetos matemáticos considerados en el marco del EOS. Se dispone de los informes sobre el análisis de una lección de proporcionalidad en un libro de texto producidos por 14 equipos de futuros profesores de secundaria, participantes de este primer ciclo (ICS) de investigación, que denominados en adelante como EFP¹, EFP², ..., EFP¹⁴. Cada equipo estaba formado por 2 o 3 estudiantes que realizaron la tarea como trabajo voluntario para incrementar la calificación del curso.

3. Diseño del experimento

En esta sección se presentan las consignas entregadas a los participantes (instrumento de recogida de datos) y el análisis a priori de la lección de libro de texto que se les dio a analizar.

Se escogió como texto de proporcionalidad la lección de Arias y Maza (2015) de uso extendido entre los centros escolares en el contexto español.

3.1. Instrumento de recogida de datos

Tras la presentación y discusión de la noción de idoneidad didáctica y la Guía de Análisis de Libros de Texto (GALT-proporcionalidad) se propuso a los estudiantes del máster que, trabajando en equipos de dos o tres estudiantes, respondieran a las siguientes consignas:

1. En cada una de las unidades de análisis (razón y proporción, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, porcentajes) en que se ha descompuesto el texto sobre proporcionalidad (Arias y Maza, 2015) y para cada una de las facetas:

- a) Identificar los componentes y subcomponentes según corresponda, tomando como base el orden en que se presentan en la GALT-proporcionalidad.
- b) ¿En qué grado se cumple cada indicador de idoneidad didáctica en la unidad de análisis? En la columna valoración asignar 0, 1, 2 para expresar el grado de cumplimiento de cada indicador según el siguiente criterio: 0: No se cumple el indicador; 1: Se cumple parcialmente; 2: Se cumple totalmente. Para la asignación de la valoración, tener en cuenta si existe algún tipo de disparidad o discordancia (conflictos epistémicos y cognitivos) entre el significado planificado por los autores para el componente epistémico correspondiente y el significado de referencia sobre el mismo.⁷
- c) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Se tendrá en cuenta la información obtenida en la sección anterior y los criterios de idoneidad didáctica (GALT-proporcionalidad).

⁷ Se indicó a los estudiantes que en caso de no considerar apropiado aplicar un indicador en una unidad de análisis, por considerar que no era pertinente o que ya se había tratado, debían indicarlo.

2. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? Describir los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

3. En base a la experiencia del taller, formular una opinión crítica sobre la GALT-proporcionalidad y los indicadores, incluyendo la perspectiva sobre si los indicadores son suficientes y claros. Si se considera oportuno agregar algún otro indicador; en dicho caso incluir una justificación.

3.2. Análisis a priori de la lección

Los investigadores realizaron de manera independiente el análisis y valoración a priori de la idoneidad de la lección de proporcionalidad del libro de texto (Arias y Maza, 2015), que había sido dividida en cuatro unidades de análisis: U1, razón y proporción; U2, proporcionalidad directa; U3, proporcionalidad inversa; U4, porcentajes. Posteriormente se consensuó una valoración común que es la que a continuación se presenta. Este análisis constituye el referente para interpretar las respuestas dadas por los profesores en formación.

Las puntuaciones (0, 1, 2 según la consigna) otorgadas por el equipo investigador a partir de estas valoraciones quedan recogidas en las Tablas de la 4.1 a la 4.6 (destacadas en negrita), donde éstas se comparan con las asignadas por los futuros profesores. Empleamos las siglas I (indicador) acompañada de su correspondiente numeración según se muestra en las Tablas de la 4.1 a la 4.6 para la correspondiente valoración.

3.2.1. Idoneidad epistémica

Situaciones-problemas

- I1: No se aborda la formulación de problemas, ni existen problemas introductorios que sirvan de motivación y contextualización a los temas a tratar en toda la lección.
- I2: No se incluyen situaciones de comparación para que el alumno resuelva en U1, U2, U3. En U1 existen ambigüedades en las indicaciones de algunos ejercicios. En U4 las situaciones que se proponen se reducen al cálculo algorítmico de porcentajes y por ende al significado de porcentajes como operador (problemas de valor faltante).
- I3: No se proponen situaciones que permitan distinguir comparaciones aditivas de las multiplicativas.
- I4: La razón no se establece con precisión como una relación multiplicativa. Dicha relación no se hace explícita en algunas situaciones en U1, U2 y U3. Además, en U4 no se usan los porcentajes para establecer relaciones multiplicativas en situaciones proporcionales.
- I5: Las situaciones propuestas para U2 y U3 involucran razones externas en general, aunque en menor medida se evidencia el uso de razones internas en la solución de algunas situaciones resueltas, por ejemplo, en el ejercicio resuelto 6 en U2 al establecerse las razones $\frac{5}{12,5}$ y $\frac{7,1}{x}$ (ver Figura 4.1). En U4 se trabajan las razones internas sólo en un ejercicio.
- I6: No se presentan situaciones que promuevan el paso de un enfoque cualitativo a uno cuantitativo.
- I7: Únicamente se propone una situación de cálculo mental que guarda relación con la razón en U2, en U3 y U4 no se abordan estas situaciones.

- I8: No se promueve el planteamiento de problemas por parte del alumno en U1, U2 y U4. En U3 sólo se incluye una situación en la que el alumno debe escribir dos magnitudes que sean inversamente proporcionales (problema 16).

Figura 4.1

Ejercicio resuelto 6 en U2

EJERCICIO RESUELTO

6 Si 5 kg de melocotones cuestan 7,2 €, ¿cuánto costarán 12,5 kg?

- La magnitud de la pregunta es **Dinero (€)**; va en **último** lugar.
- Es de proporcionalidad **Directa (D)**, porque al aumentar el número de kilos, aumenta el dinero que cuestan, **+ a +**

Masa (kg)	(D)	Dinero (€)
5	→	7,2
12,5	→	x

$$\left. \begin{array}{l} 5 \longrightarrow 7,2 \\ 12,5 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{12,5} = \frac{7,2}{x} \Rightarrow x = \frac{12,5 \cdot 7,2}{5} = 18 \text{ €}$$

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.139)

Lenguajes

- I9: En U1 sólo se usan representaciones simbólicas (numéricas y algebraicas) y en U2 y U3 adicionalmente las tabulares. En la lección se utiliza el signo = entre números y medidas de cantidades; se confunden medida de cantidades con valor numérico de la medida. Por ejemplo, en el ejercicio resuelto 4 (Figura 4.2) de U2, se usa como resultado de una operación aritmética $\frac{18}{3} = 6$ y como cantidades de magnitud $6 \frac{\text{€}}{\text{caja}}$.

Figura 4.2

Ejercicio resuelto 4 en U2

4 Se venden cajas de bombones del mismo peso según la tabla:

N.º de cajas	1	2	3	4	5	10	15	20
Coste (€)	6	12	18	24	30	60	90	120

Halla la constante de proporcionalidad.

Las dos magnitudes son directamente proporcionales porque al aumentar el número de cajas en el doble, triple, etc., el coste de las cajas aumenta en el doble, el triple, etc.

La constante de proporcionalidad directa es:

$$\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \dots = 6 \text{ €/caja}$$

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.138)

Además, los procesos de traducción entre las representaciones usadas no aparecen explicados. Por ejemplo, la interpretación de la tabla de proporcionalidad conlleva un proceso de generalización de la relación de proporcionalidad que no se explica. El carácter general de la secuencia de valores se indica meramente con puntos suspensivos. Asimismo, el paso de la representación sagital (flechas) de la correspondencia entre las magnitudes y la expresión de la ecuación proporcional puede ser conflictivo. En U4, a pesar de que se menciona que el porcentaje se puede representar como fracción y como decimal no se brindan justificaciones o explicaciones.

- I10: En general se comienza por dar definiciones de los conceptos usando símbolos literales para generalizar las cantidades que intervienen; no se especifica el dominio de dichos símbolos.
- I11: La lección se limita al manejo e interpretación de representaciones simbólicas y tabulares.
- I12: Las relaciones multiplicativas no se distinguen por medio de ninguna representación.

Conceptos

- I13: En U1 la razón se define como una división; en la exposición se reduce las cantidades de magnitudes a números, prescindiendo de las unidades de medida (ver Figura 4.3).

Figura 4.3

Concepto de razón en U1

1.1 Razón de dos cantidades

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables.

Se representa $\frac{a}{b}$ y se lee «a es a b». Al número *a* se le llama **antecedente**, y al número *b*, **consecuente**.

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.136)

Además, sólo se aclara una diferencia con el concepto de fracción, y se confunde razón con constante de proporcionalidad, que se presenta como cociente de antecedente y consecuente (ver Figura 4.4).

En U2 y U3 no se definen con claridad los conceptos de constante de proporcionalidad directa ni inversa. Tampoco se relaciona la definición de magnitudes directamente proporcionales con la razón y proporción que han visto antes.

Figura 4.4

Concepto de constante de proporcionalidad en U2

La **constante de proporcionalidad** es el cociente entre el antecedente y su consecuente.

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.136)

En U4 sólo se define explícitamente una única manera de entender el porcentaje (fracción de una cantidad); de manera implícita se usa como símbolo numérico (fracción y decimal) y como operador (problemas de valor faltante). La definición que se da de tanto por ciento no refleja la comparación multiplicativa entre las cantidades. Además, tanto por ciento, razón, fracción y número decimal se interpretan como el mismo concepto.

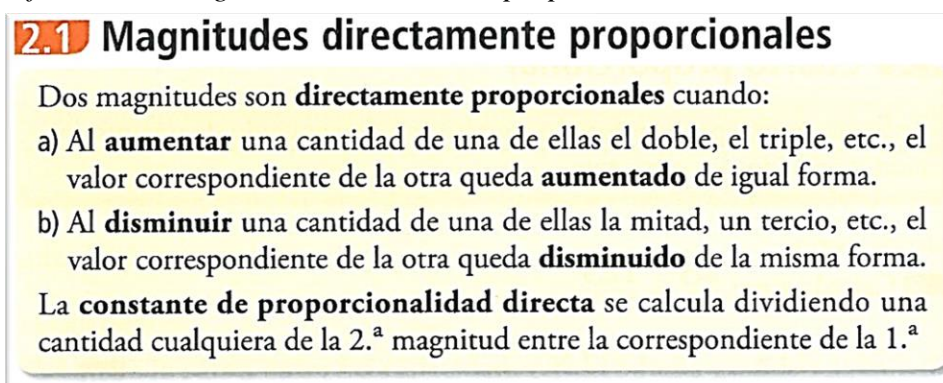
- I14: En general no existen situaciones donde los alumnos tengan que generar definiciones.
- I15: En U1 no se explicita que la razón es una relación entre dos cantidades de magnitudes de forma multiplicativa. En U2 y U3 no se establecen las relaciones funcionales $y = kx$, $y = k/x$, ni formal, ni intuitivamente (ver Figura 4.5). En U4, aunque se define la naturaleza multiplicativa en el concepto del tanto por ciento, no existe un tratamiento claro en la lección de la relación del tema de porcentajes con el de magnitudes proporcionales.

Proposiciones

- I16: En U1 la propiedad fundamental “en una proporción el producto de medios es igual al producto de extremos”; carece de un discurso explicativo claro y en general no existen proposiciones que expliciten la relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes. En U2 y U3 las proposiciones no reflejan la relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes. En U4 tampoco se proponen proposiciones que reflejen conexiones del tema de porcentajes con la proporcionalidad directa.

Figura 4.5

Definición de magnitudes directamente proporcionales en U2



2.1 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando:

- a) Al **aumentar** una cantidad de una de ellas el doble, el triple, etc., el valor correspondiente de la otra queda **aumentado** de igual forma.
- b) Al **disminuir** una cantidad de una de ellas la mitad, un tercio, etc., el valor correspondiente de la otra queda **disminuido** de la misma forma.

La **constante de proporcionalidad directa** se calcula dividiendo una cantidad cualquiera de la 2.^a magnitud entre la correspondiente de la 1.^a

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.138)

- I17: La justificación en U2 de que dos magnitudes son directamente proporcionales se limita a verificar que: “al doble, triple, etc. corresponde el doble, el triple,…” o bien que se cumple la condición “ $+a+$ o de $-a-$ ” (ver Figuras 4.1 y 4.6). Sucede lo mismo para las magnitudes inversamente proporcionales en U3. En ambas unidades se asume la condición de regularidad, aspecto que se evidencia también en los enunciados de las situaciones propuestas, evitando reflexionar sobre el carácter lineal o no lineal de las situaciones-problemas. Dado que no se hace dicha reflexión es posible que se esté generando un conflicto de “ilusión de linealidad”, que responde a la tendencia a utilizar modelos lineales en situaciones no pertinentes para su aplicación (Van Dooren et al., 2003).

- I18: En general no se fomenta la generación de propiedades por parte del alumno.

Procedimientos

- I19: Algunos procedimientos no se muestran de manera explícita en el texto; divisiones, multiplicaciones y el despeje de una incógnita se llevan a cabo sin explicaciones al respecto. La presentación del método de regla de tres (ver Figura 4.6) y reducción a la unidad se caracteriza por la ausencia de argumentos o justificaciones de su pertinencia y los pasos a seguir.

Figura 4.6

Presentación del Método de regla de tres directa

2.4 Método de regla de tres directa

Para resolver los problemas de regla de tres directa se sigue el procedimiento:

- Se identifican las magnitudes que intervienen y sus unidades.
- Se colocan las magnitudes y los datos poniendo en **último** lugar la incógnita.
- Se determina si la proporcionalidad es **directa**. Es **directa** cuando va de **+ a +** o de **- a -**
- Se forma la proporción y se calcula el cuarto proporcional.

<u>Magnitud A (Unidad)</u>	(D)	<u>Magnitud B (Unidad)</u>	
Cantidad conocida: a	→	Cantidad conocida: c	}
Cantidad conocida: b	→	Cantidad desconocida: x	

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.139)

La expresión “ + a -, - a + ” para determinar si la proporcionalidad es directa, puede ser potencialmente conflictiva, ya que obvia la reflexión sobre la relación multiplicativa entre las magnitudes. No se explica la formulación de la ecuación proporcional (ni por qué la incógnita debe aparecer en el último lugar).

En U4 los procedimientos con porcentajes se muestran como reglas a seguir sin explicaciones claras.

- I20: Aunque la ecuación proporcional se introduce después de la reducción a la unidad, no se dedica suficiente espacio al primero o a métodos más intuitivos antes del algebraico.

- I21: No se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.

Argumentos

- I22: En U1 las proposiciones y procedimientos se presentan sin explicaciones o uso de discurso argumentativo por parte del autor. En U2, U3 y U4 las proposiciones y procedimientos se explican utilizando ejemplos específicos, pero existe poca argumentación, particularmente en el procedimiento de regla de tres (Figura 4.6).
- I23: En general no se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones; las explicaciones de las definiciones suelen darse por ejemplificación en un ejercicio después de los enunciados.

Relaciones

- I24: Existen escasas relaciones con el tema de fracciones y números racionales; la relación entre los conceptos de razón, fracción, división y cociente es confusa.
- I25: No se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes; se pasa sin distinción de las medidas de cantidades (razones) a valores numéricos de medidas (fracciones).
- I26: No existe un tratamiento de los cuatro enfoques de la proporcionalidad (intuitivo, geométrico, aritmético, algebraico-funcional), siendo el enfoque dado en toda la lección (y de manera parcial) el aritmético.

Procesos

- I27: Únicamente encontramos dos tareas que solicitan al alumno interpretar la respuesta (enunciar proposiciones y elaborar argumentos) en U1. En el resto de la lección no se pide justificar las respuestas de los ejercicios ni formular conjeturas.
- I28: En general no se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo de la función lineal.

- I29: El proceso de estudio va de las definiciones y enunciados generales a lo particular; no se pide que los alumnos generalicen.
- I30: No se promueven progresivamente todos los significados de la proporcionalidad hasta alcanzar el nivel algebraico-funcional (función lineal).
- I31: En este indicador deben considerarse todos los conflictos señalados previamente en los componentes y subcomponentes respectivos.

3.2.2. Idoneidad cognitiva

Conocimientos previos

- I32: No se referencian contenidos asociados al tema como pueden ser: operaciones con decimales en U1, ley del doble, triple, mitad, magnitud, unidades de medida de magnitud en U2 y U3, área de un rectángulo en U3, expresión de partes usando porcentajes en U4. Mediante una anotación se precisa una diferencia entre el concepto de razón y fracción en U1, y en U2 se incluye el “recuerda” con información sobre condiciones que deben cumplir dos magnitudes directamente proporcionales.
- I33: En todas las unidades los contenidos pretendidos poseen una dificultad manejable.

Diferencias individuales

- I34: Existe poca presencia de tareas de ampliación (dirigidas a estudiantes con mayor competencia matemática, que involucren procesos como la modelización o generalización); identificándose actividades de este tipo únicamente en U2 y U3. Un ejemplo de este tipo de situación se incluye en la Figura 4.7, sobre repartos proporcionales, no tratados previamente.
- I35: Se utilizan únicamente dos estrategias correctas para resolver situaciones en U2, U3 y U4, para U1 sólo se trabaja las proporciones con el producto cruzado.

Figura 4.7

Tarea de ampliación

83 Un padre decide repartir 36 € de paga entre sus hijos, y desea hacerlo proporcionalmente a sus edades, que son 8, 12 y 16 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?

Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.148)

Conflictos cognitivos

- I36: No se emplean estrategias erróneas como fuente de aprendizaje en ninguna de las unidades.
- I37: Existen diferentes niveles de dificultad en relación con la naturaleza numérica de las cantidades de magnitudes propuestas y el lugar que ocupa la variable en las diferentes situaciones propuestas en U1 y U2. Sin embargo, en U3 todos los datos numéricos empleados son números enteros y en U4 existe poca variedad respecto a los ejemplos resueltos.
- I38: Se encuentran algunas advertencias de errores y dificultades a los alumnos en U1, U2 y U3. Por ejemplo, en U1 se advierte que una razón no es una fracción, en U2 se precisa “para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales no basta con comprobar que, al aumentar una magnitud, la otra aumenta también”. Para U3 se señala “recuerda que lo primero que hay que hacer es determinar si las magnitudes son inversamente proporcionales”.

Evaluación

- I39: No se proponen instrumentos que permitan evaluar al alumno ni que permitan la autoevaluación.

3.2.3. *Idoneidad afectiva*

Actitudes

- I40: En la lección no se promueve la perseverancia, responsabilidad, etc. en el trabajo matemático.
- I41: No se favorece la argumentación en situaciones de igualdad.
- I42: Se echan en falta situaciones-problemas previos que motiven los procedimientos y no se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos para la resolución de problemas: en U2, U3 y U4 se establecen dos métodos de solución para las tareas de valor faltante y para resolver problemas de aumentos y descuentos.

Emociones

- I43: Se incluyen situaciones contextualizadas que implican conexiones con la vida real, lo cual podría ser de interés para el alumno.
- I44: Se utilizan algunas ilustraciones, pero no situaciones de humor o curiosidades.
- I45: En ninguna de las unidades se potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.
- I46: No se dedica espacio para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.
- I47: No se promueve la autoestima, evita el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.

Creencias, valores y evaluación

- I48: En ninguna de las unidades se consideran las creencias sobre las matemáticas y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje del contenido matemático.
- I49: Algunas situaciones contextualizadas permiten valorar la utilidad de las matemáticas, aunque no sus cualidades de estética o precisión.
- I50: No existen actividades que permitan valorar los aspectos afectivos.

3.2.4. Idoneidad instruccional

Interacción autor-alumno

- I51: La presentación teórica del tema es organizada, proponiéndose primero definiciones y procedimientos con pasos a seguir y posteriormente ejemplos resueltos. No obstante, no se presentan de manera suficientemente clara los conceptos claves: razón, proporción, constante de proporcionalidad (U1), magnitudes directa e inversamente proporcionales (U2 y U3). Las proposiciones y procedimientos fundamentales no se tratan de manera adecuada en U2 y U3. Por ejemplo, en la Figura 4.6 se observa la descripción del método de la regla de tres y como se identifica la relación de proporcionalidad directa con “más a más” o “menos a menos”. Los porcentajes se presentan en U4 de forma rutinaria y desconectada de las secciones previas.
- I52: No se presentan situaciones que permitan llegar a consensos empleando argumentos diversos.
- I53: No se puede considerar que el autor use recursos retóricos y argumentativos para captar la atención del alumno; excepcionalmente se emplea una nota “recuerda” en U2 y esquemas que resumen procedimientos a seguir en U4.
- I54: Dado que en la explicación teórica los ejemplos están completamente acabados, no se invita al alumno a involucrarse en la dinámica de la exposición.

Interacciones discentes

- I55: No existen tareas que permitan al alumno resolverlas y discutirlos de forma colaborativa por lo que no se favorece el diálogo y debate entre los estudiantes.
- I56: No se plantean conjeturas o se emplean argumentos matemáticos.

Autonomía

- I57: Son escasos los momentos donde los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio; estos responden a la resolución de tareas propuestas similares a los ejemplos resueltos previamente, lo que implica que el alumno no tiene la oportunidad de explorar, investigar o conjeturar. Sólo dos actividades solicitan interpretar la respuesta en U1, y tan sólo la primera situación en U3 (Figura 4.8) puede considerarse una oportunidad para que el alumno explore e investigue ya que es la primera vez que el alumno se enfrenta al tema.
- I58: No se identifican instrumentos de evaluación.

Figura 4.8

Situación introductoria en U3



Fuente. Tomada de Arias y Maza (2015, p.139)

Recursos y temporalización

- I59: No se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos.
- I60: No se utilizan modelos concretos que permitan contextualizar y motivar las definiciones y propiedades. No obstante, se emplean visualizaciones para representar los factores que se multiplican en el producto cruzado en U1, se incluyen visualizaciones tabulares y diagramáticas en U2, U3 y U4.
- I61: Las fuentes usadas en toda la lección no se explicitan.
- I62: No se plantea el espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.
- I63: La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos no es del todo adecuada. La presentación de definiciones o procedimientos seguida de un ejemplo

resuelto únicamente para U1, U2 y U3 refleja que el espacio dedicado a todos los contenidos es homogéneo; únicamente para U4 se proponen más ejemplos resueltos y algunos se resuelven mediante dos formas diferentes.

3.2.5. Idoneidad ecológica

Adaptación de la lección al currículo

- I64: Es inadecuada la adaptación del texto al currículo: los conceptos de proporción continua y medio proporcional presentados en U1 no se contemplan en las directrices curriculares, en la lección no se tratan los repartos directa e inversamente proporcionales, y no existe una conexión de los porcentajes con las magnitudes directamente proporcionales y no se aborda su cálculo con calculadora. Además, las tareas propuestas no promueven el uso de diferentes estrategias en la resolución de problemas de variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

Apertura a la innovación

- I65: Las situaciones propuestas no promueven la investigación ni la práctica reflexiva en los alumnos, por lo que la apertura a la innovación no se contempla.

Adaptación socio-profesional

- I66: Se aborda parcialmente, ya que las situaciones contextualizadas no tratan lo suficiente aspectos sociales o profesionales.

Educación en valores

- I67: No se identifican oportunidades para que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico, cuestionando lo aparentemente evidente, ni se contempla la formación en valores democráticos en ninguna de las situaciones propuestas.

Conexiones intra e interdisciplinares

- I68: Se tratan conexiones intra (geometría) e interdisciplinares (velocidad-física) en algunas situaciones de U1, U2, U3 y la aplicación de impuestos en algunas tareas de U4.

4. Resultados

En esta sección, presentamos los resultados del análisis de las valoraciones de idoneidad didáctica dadas por los futuros profesores sobre la lección de proporcionalidad, por medio de la GALT-proporcionalidad en las distintas facetas. En primer lugar, comparamos estas valoraciones con el análisis a priori realizado por los investigadores. En segundo lugar, analizamos los resultados de los juicios razonados sobre la idoneidad de la lección elaborados por los participantes, indicando las características destacadas para dar una evaluación positiva o negativa de la idoneidad de la lección del libro de texto. Finalmente se analizan las respuestas sobre la gestión de uso de la lección en cada una de las facetas.

4.1. Análisis de la lección a través de la GALT-proporcionalidad

En las Tablas de la 4.1 a la 4.6 se presentan las valoraciones cuantitativas dadas por los participantes en cada uno de los indicadores de las distintas facetas. Para comprobar su grado de corrección, se incluye la valoración otorgada por los investigadores, destacada en negrita. Cuando para un determinado indicador, no se observa valoración destacada en negrita, es porque el equipo investigador consideró que no se aplicaba en una cierta unidad de análisis. La valoración ordinal indica la presencia o no de cada indicador en la lección (0 nunca, 1 a veces-parcialmente, 2 siempre-totalmente) dada por los equipos. En paréntesis se indica la frecuencia de las valoraciones hechas por los equipos. Si en algún caso la suma de las frecuencias no es 14 (número total de equipos), se debe a que algún equipo no ha valorado dicho indicador. Destacaremos aquellos indicadores de idoneidad que la mayoría de los equipos valoraron de modo diferente a la del grupo investigador. Su formulación y aplicación al análisis de la lección

requieren especial atención y suponen reflexionar sobre las causas que originan dichas discrepancias. En general se observa que, los equipos al valorar cada indicador no aportan argumentaciones u observaciones de su valoración.

4.1.1. Faceta epistémica

En la faceta epistémica se han valorado en total 31 indicadores para cada unidad de análisis. Particularmente en la unidad 1, detectamos 15 indicadores que discrepan en su valoración con el juicio a priori en los términos antes descritos, en la unidad 2 observamos 18, en la unidad 3 encontramos 17 y en la unidad 4 hallamos 19.

Consideramos que una causa posible de la asignación dada por los participantes en I2 es que se dejen llevar por la cantidad de tareas propuestas sin considerar su representatividad, o bien que tengan dificultades para identificar otras posibles situaciones que pueden abarcarse en el tema de proporcionalidad. Respecto a la valoración de los indicadores I3, I4, I5, I12 e I17 es posible que el origen de las diferencias proceda de un escaso conocimiento didáctico-matemático de los participantes en relación con la proporcionalidad, que les impida interpretar o distinguir: situaciones aditivas de multiplicativas, razones internas de las externas, relaciones multiplicativas dentro y entre las magnitudes y las condiciones necesarias y suficientes para que una situación sea proporcional (Fernández et al., 2012; Izsák y Jacobson 2017; Nagar et al., 2016; Sowder et al., 1988). En particular, puede ocurrir que consideren presente la relación multiplicativa, dando por adecuada la relación “al aumentar una cantidad de una de ellas el doble, triple, etc., el valor correspondiente de la otra queda aumentado de igual forma (+a +)” como definición de la proporcionalidad directa (Figura 4.3).

Llama la atención la valoración otorgada al I10, donde la mayoría han calificado el nivel del lenguaje como adecuado siempre, omitiendo posibles conflictos originados por el uso que se da de símbolos literales. Además, la mayoría de los equipos han indicado que no consideran la aplicación de I15 en la U4. Al respecto podemos suponer que no han considerado la relación

entre los porcentajes y las magnitudes, o bien que asumen que esta relación sólo corresponde a las magnitudes proporcionales con el bloque aritmético.

Tabla 4. 1

Comparación de valoraciones de indicadores en el componente significados

Indicadores del componente significados	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Situaciones-problemas				
I1. Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de razón, proporcionalidad y porcentajes (involucra resolver y formular problemas).	0(0) 1(13) 2(1)	0(0) 1(7) 2(7)	0(0) 1(9) 2(5)	0(0) 1(7) 2(7)
I2. Se emplea una muestra diversa de tareas que permitan contextualizar y aplicar razón, proporcionalidad y porcentajes.	0(1) 1(9) 2(4)	0(1) 1(5) 2(8)	0(1) 1(5) 2(8)	0(2) 1(5) 2(7)
I3. Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea.	0(12) 1(1) 2(0)	0(8) 1(6) 2(0)	0(5) 1(9) 2(0)	0(3) 1(7) 2(1)
I4. La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas.	0(0) 1(8) 2(6)	0(1) 1(6) 2(7)	0(0) 1(6) 2(8)	0(1) 1(8) 2(2)
I5. Las situaciones involucran el uso de razones internas y externas.	0(2) 1(2) 2(10)	0(0) 1(3) 2(11)	0(2) 1(3) 2(8)	0(2) 1(4) 2(4)
I6. Se presentan situaciones que promuevan el paso de un enfoque cualitativo a uno cuantitativo, y el progreso del pensamiento aditivo al multiplicativo.	0(10) 1(4) 2(0)	0(7) 1(5) 2(2)	0(10) 1(3) 2(1)	0(6) 1(4) 2(3)
I7. Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.	0(1) 1(2) 2(11)	0(5) 1(6) 2(3)	0(9) 1(5) 2(0)	0(7) 1(5) 2(1)
I8. Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad y porcentajes.	0(10) 1(1) 2(0)	0(9) 1(3) 2(2)	0(5) 1(6) 2(3)	0(5) 1(6) 2(3)
Lenguajes				
I9. Se utilizan diferentes tipos de representación para modelizar problemas matemáticos, analizando la pertinencia de uno u otro tipo.	0(5) 1(8) 2(1)	0(2) 1(10) 2(2)	0(4) 1(9) 2(1)	0(2) 1(8) 2(4)
I10. Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige	0(2) 1(4) 2(8)	0(2) 1(1) 2(11)	0(3) 1(1) 2(10)	0(2) 1(2) 2(10)
I11. Se fomenta que los alumnos construyan e interpreten diferentes representaciones de la proporcionalidad.	0(5) 1(7) 2(2)	0(3) 1(10) 2(0)	0(4) 1(9) 2(1)	0(4) 1(8) 2(2)
I12. Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen <i>dentro</i> y <i>entre</i> las magnitudes proporcionales.	0(6) 1(3) 2(2)	0(4) 1(5) 2(5)	0(3) 1(7) 2(4)	0(2) 1(6) 2(0)

Indicadores del componente significados	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Conceptos				
I13. Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente.	0 (3) 1(7) 2(4)	0(5) 1 (4) 2(5)	0(4) 1 (2) 2(6)	0 (5) 1(2) 2(5)
I14. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar definiciones de razón, proporcionalidad y porcentajes.	0(4) 1 (7) 2(3)	0(4) 1 (6) 2(4)	0(1) 1 (8) 2(5)	0(2) 1 (5) 2(7)
I15. Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.	0 (2) 1(8) 2(3)	0(1) 1 (6) 2(6)	0(3) 1 (4) 2(6)	0 (1) 1(2) 2(5)
Proposiciones				
I16. Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de razón, proporcionalidad y porcentaje, de forma clara y adaptada al nivel educativo.	0 (4) 1(6) 2(4)	0(4) 1 (6) 2(3)	0(4) 1 (6) 2(4)	0(5) 1 (1) 2(8)
I17. Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.	0(3) 1(5) 2(5)	0(1) 1 (4) 2(8)	0(0) 1 (9) 2(5)	0 (3) 1(5) 2(3)
I18. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.	0(0) 1(1) 2(5)	0(1) 1 (7) 2(6)	0(1) 1(5) 2(2)	0 (2) 1(2) 2(1)
Procedimientos				
I19. Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente.	0(1) 1 (5) 2(8)	0 (6) 1(2) 2(6)	0 (5) 1(3) 2(6)	0(4) 1 (7) 2(3)
I20. La ecuación proporcional se introduce después que se haya ganado experiencia en otros procedimientos intuitivo-aritméticos.	0(3) 1 (4) 2(3)	0(5) 1 (2) 2(7)	0(4) 1 (2) 2(7)	0(4) 1 (5) 2(4)
I21. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.	0 (10) 1(3) 2(1)	0 (10) 1(2) 2(2)	0 (9) 1(3) 2(2)	0 (11) 1(1) 2(1)
Argumentos				
I22. Las proposiciones y procedimientos en relación con la proporcionalidad se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.	0 (3) 1(9) 2(2)	0 (6) 1(6) 2(2)	0 (4) 1(7) 2(3)	0 (4) 1(5) 2(5)
I23. Se favorece la justificación de los enunciados matemáticos del tema de proporcionalidad mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.	0 (7) 1(5) 2(2)	0 (8) 1(3) 2(3)	0 (8) 1(1) 2(5)	0 (5) 1(2) 2(5)

La valoración otorgada a I20 muestra la necesidad de que los futuros profesores reconozcan la pertinencia de comenzar con un enfoque intuitivo, de naturaleza pre-proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Ruiz y Valdemoros, 2004) antes de presentar la regla de tres como aspecto clave en el desarrollo del razonamiento proporcional de los alumnos.

Con respecto a la Tabla 4.2, la discrepancia en la valoración de I24 puede deberse a que los participantes no reconozcan la importancia de distinguir con claridad conceptos como razón, fracción, división y decimal o que consideren que la presencia de diversas expresiones de un número racional es suficiente para este fin.

Tabla 4. 2

Comparación de valoraciones de indicadores en el resto de componentes

Indicadores de los componentes relaciones, procesos y conflictos epistémicos	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Relaciones				
I24. Se establecen relaciones con las fracciones y números racionales en general.	0(2) 1(4) 2(7)	0(1) 1(3) 2(10)	0(1) 1(3) 2(10)	0(1) 1(5) 2(5)
I25. Se hace explícita la relación con el bloque aritmético y de magnitudes.	0(1) 1(7) 2(6)	0(0) 1(3) 2(9)	0(0) 1(4) 2(10)	0(1) 1(6) 2(3)
I26. Se identifican y articulan los cuatro tipos de enfoques de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético, algebraico.	0(10) 1(3) 2(0)	0(4) 1(9) 2(1)	0(8) 1(6) 2(0)	0(4) 1(4) 2(2)
Procesos				
I27. Se promueven diversas situaciones donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.	0(11) 1(3) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)	0(8) 1(6) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)
I28. Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas...	0(12) 1(2) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)
I29. Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y numéricos...	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)
I30. Se promueven progresivamente todos los significados de la proporcionalidad hasta alcanzar niveles superiores de algebrización (función lineal).	0(6) 1(6) 2(1)	0(8) 1(4) 2(1)	0(7) 1(3) 2(3)	0(6) 1(4) 2(1)
Conflictos epistémicos				
I31. Las situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades...	0(4) 1(6) 2(3)	0(3) 1(9) 2(2)	0(3) 1(7) 2(4)	0(5) 1(5) 2(4)

En el caso de I25 parece que los futuros profesores consideran que la simple presencia en el texto de diversas unidades de magnitudes establece las relaciones necesarias entre el bloque aritmético y de magnitudes para que el alumno comprenda los supuestos que justifican

pasar de medidas de cantidades (razones) a valores numéricos de medidas (fracciones). También planteamos como posible razón que justifique la discrepancia en I26 el desconocimiento de las características de los diferentes enfoques de proporcionalidad.

En las Tablas 4. 1 y 4. 2, también se aprecian los indicadores a los que la mayoría de los equipos de estudiantes han asignado una valoración máxima (2), 14 en total en algunas de las unidades. Al respecto señalamos que el grupo investigador ha considerado que sólo dos de estos indicadores (I5, I7) se han de valorar con 2, y únicamente para U1.

Más de la mitad de los equipos consideran que se emplea una muestra diversa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los conceptos de proporcionalidad y porcentajes (en U2, U3, U4) o que la relación multiplicativa en situaciones proporcionales aparece explícita en diferentes tipos de problemas (U2, U3). La mayoría consideran que el nivel del lenguaje es totalmente adecuado a los alumnos a que se dirige en todas las unidades. Además, 8 equipos consideran que se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional (U2) y que se presentan las proposiciones fundamentales con relación a los porcentajes (U4).

Por otro lado, la mitad de los grupos considera que se ha ganado suficiente experiencia en procedimientos intuitivo-aritméticos antes de introducir el tratamiento algebraico (regla de tres directa e inversa). En este sentido, por ejemplo, EFP¹², indica que “en cuanto a los procedimientos, exceptuando la primera unidad que no se puede evaluar, se introducen correctamente después de que se haya ganado experiencia en otros procedimientos intuitivos y aritméticos”.

La mayoría de los participantes consideran que se establecen las relaciones adecuadas con las fracciones y números racionales, así como que se hace explícita la relación con el bloque aritmético y de magnitudes (U2, U3).

En general los indicadores que han sido valorados por la mayoría de los equipos con 0, responden a los subcomponentes de procesos: comunicación, argumentación, modelización y generalización, esto ocurre en al menos tres de las unidades. También la mayoría de los equipos han valorado con 0 indicadores de los subcomponentes de lenguajes, argumentos y relaciones; en relación con: la presencia de representaciones para distinguir relaciones multiplicativas dentro y entre las magnitudes, la justificación de los enunciados y proposiciones y a la identificación articulación y desarrollo de los enfoques de la proporcionalidad, respectivamente.

Igualmente, en el subcomponente de situaciones destaca con dicha valoración los indicadores que refieren a la presencia de situaciones que promuevan: la distinción de comparaciones aditivas de las multiplicativas, el paso de un enfoque cualitativo a uno cuantitativo, el cálculo mental en algunas de las unidades, y el planteamiento de problemas por parte del alumno.

Por último, la mayoría de los equipos califican con cero el indicador de procedimientos referente a que los alumnos generen procedimientos característicos en situaciones de proporcionalidad. Dado que todos los indicadores señalados con esta calificación fueron contemplados también por el grupo investigador, consideramos la mayoría de las valoraciones hechas como oportunas.

4.1.2. Idoneidad cognitiva y afectiva

Como se observa en la Tabla 4.3 existen discordancias en las valoraciones otorgadas por el grupo investigador y la mayoría de los equipos en los indicadores I32, I35, I37, I38, I39 de la faceta cognitiva, que intentamos justificar a continuación.

Para la valoración de I32 es probable que la mayoría de los participantes no hayan contemplado en U1 la referencia al concepto de fracciones, o bien que hayan considerado que debería existir un apartado previo a la lección donde se “repasen contenidos anteriores”. En las

demás unidades las frecuencias no describen una preferencia clara de la mayoría de los participantes.

Tabla 4.3

Comparación de valoraciones en la faceta cognitiva

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Conocimientos previos				
I32. Se contempla en el texto los conocimientos previos necesarios de acuerdo con el nivel educativo correspondiente.	0(12) 1 (1) 2(1)	0(4) 1 (5) 2(5)	0(6) 1 (2) 2(6)	0(6) 1 (4) 2(4)
I33. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	0(0) 1(3) 2 (11)	0(0) 1(5) 2 (9)	0(0) 1(4) 2 (10)	0(0) 1(3) 2 (11)
Diferencias individuales				
I34. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	0(0) 1 (10) 2(4)	0(1) 1 (7) 2(6)	0(0) 1 (9) 2(5)	0(1) 1 (9) 2(4)
I35. Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas.	0 (10) 1(4) 2(0)	0(9) 1 (4) 2(1)	0(7) 1 (5) 2(2)	0(8) 1 (4) 2(2)
Conflictos cognitivos				
I36. Se valora y emplea el uso de estrategias erróneas (estrategias aditivas...) como fuente de aprendizaje.	0 (12) 1(1) 2(1)	0 (13) 1(0) 2(1)	0 (11) 1(2) 2(1)	0 (13) 1(0) 2(1)
I37. Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (con números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad...)	0(2) 1(5) 2 (7)	0(2) 1(7) 2 (5)	0(3) 1 (6) 2(5)	0(3) 1 (6) 2(5)
I38. Se advierte de errores y dificultades de los alumnos (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias...).	0(13) 1 (1) 2(0)	0(10) 1 (1) 2(3)	0(12) 1 (1) 2(1)	0 (11) 1(2) 2(1)
Evaluación				
I39. Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.	0 (1) 1(9) 2(4)	0 (0) 1(10) 2(4)	0 (2) 1(7) 2(5)	0 (0) 1(12) 2(2)

En relación con I35 suponemos que los participantes no han considerado que en U2, U3 y U4 existen dos modos de proceder en la solución de algunas tareas, lo que justifica la valoración parcial del indicador, a pesar de que las mismas no son suficientemente diversas. Para I37, aunque la mayoría de los participantes no coinciden con nuestra valoración parcial del indicador para U2, U3 y U4, en general han considerado que se cumple de manera total o parcial. En este caso, cinco equipos no han tenido en cuenta que en U3 no se tratan números no

enteros en las tareas propuestas y que en U4 las situaciones son todas de ejercitación por lo que podría existir mayor variedad en cuanto al nivel de dificultad.

Tabla 4.4

Comparación de valoraciones en la faceta afectiva

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Actitudes				
I40. Se promueve la participación en actividades, perseverancia, responsabilidad, etc., para fomentar una actitud matemática.	0 (11) 1(3) 2(0)	0 (12) 1(2) 2(0)	0 (11) 1(2) 2(1)	0 (10) 1(4) 2(0)
I42. La argumentación se favorece en situaciones de igualdad, el valor de un argumento no depende de quién lo dice.	0 (6) 1(2) 2(4)	0 (8) 1(2) 2(3)	0 (9) 1(2) 2(2)	0 (8) 1(3) 2(3)
I42. Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.	0 (12) 1(2) 2(0)	0 (10) 1(3) 2(1)	0 (10) 1(3) 2(1)	0 (13) 1(1) 2(0)
Emociones				
I43. Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos.	0(2) 1 (8) 2(4)	0(3) 1 (8) 2(3)	0(4) 1 (8) 2(2)	0(1) 1 (7) 2(6)
I44. Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías, adivinanzas, etc.	0(9) 1 (4) 2(1)	0(10) 1 (4) 2(0)	0(9) 1 (5) 2(0)	0(10) 1 (4) 2(0)
I45. Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.	0 (9) 1(5) 2(0)	0 (11) 1(3) 2(0)	0 (11) 1(3) 2(0)	0 (11) 1(3) 2(0)
I46. Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.	0 (14) 1(0) 2(0)	0 (13) 1(1) 2(0)	0 (14) 1(0) 2(0)	0 (14) 1(0) 2(0)
I47. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia, el miedo a las matemáticas.	0 (12) 1(2) 2(0)	0 (14) 1(0) 2(0)	0 (14) 1(0) 2(0)	0 (12) 1(2) 2(0)
Creencias				
I48. Se analizan y consideran las creencias sobre: las matemáticas, la enseñanza de las matemáticas y el contexto social en el que desarrolla el aprendizaje.	0 (11) 1(3) 2(0)	0 (11) 1(3) 2(0)	0 (10) 1(4) 2(0)	0 (10) 1(4) 2(0)
Valores				
I49. Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	0(1) 1 (11) 2(2)	0(5) 1 (8) 2(1)	0(6) 1 (7) 2(1)	0(6) 1 (6) 2(2)
Evaluación formativa				
I50. Se proponen actividades de evaluación que permitan valorar los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje.	0 (11) 1(2) 2(1)	0 (13) 1(0) 2(1)	0 (12) 1(0) 2(2)	0 (10) 1(3) 2(1)

La mayoría de los participantes han valorado I38 con cero en todas las unidades. Esto puede deberse a que han obviado las advertencias incluidas en la lección de que una razón no es una fracción, o que “para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales no basta con comprobar que, al aumentar una magnitud, la otra aumenta también” o bien que no las han considerado suficientes para considerar el indicador como parcialmente satisfecho. Finalmente, en I39, es factible que la mayoría de los participantes consideraran las actividades propuestas al final de cada unidad como de evaluación, sin embargo, no consideramos que las mismas tengan este fin, simplemente son actividades para que el alumno resuelva.

Como se observa en la Tabla 4.4, las valoraciones de los estudiantes y las valoraciones del equipo investigador concuerdan en la mayoría de los indicadores de la faceta afectiva. Únicamente aparecen discordancias con la mayoría de los equipos en cuanto a la existencia de elementos motivadores (I44). La existencia de ilustraciones en el texto (si bien no son situaciones humorísticas o curiosidades) llevó al equipo investigador a valorar con pertinencia media este indicador en las distintas unidades, mientras que los participantes en su mayoría consideraron con pertinencia baja este indicador en cada unidad.

4.1.3. Valoraciones en las facetas instruccional y ecológica

Los resultados recogidos en la Tabla 4.5 muestran que sólo existe una diferencia considerable en la valoración que el equipo investigador otorgó a los indicadores I51 (interacción autor-alumno), I57 (autonomía) e I58 (evaluación formativa) y la considerada por la mayoría de los equipos.

La mayoría de los equipos valoran I51 con puntuación media o máxima. Aquellos que dan la puntuación máxima al indicador pueden no haber identificado que las definiciones de razón, proporción, constante de proporcionalidad, magnitudes directa o inversamente proporcionales son ambiguas o incompletas. Esto pone de manifiesto una falta de conocimiento didáctico-matemático en relación con la proporcionalidad (Weiland et al., 2021).

Tabla 4.5

Comparación de valoraciones en la faceta instruccional

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Interacción autor-alumno				
I51. El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)	0(4) 1(4) 2(5)	0(3) 1(5) 2(5)	0(4) 1(6) 2(3)	0(3) 1(6) 2(4)
I52. Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.	0(11) 1(2) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
I53. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	0(10) 1(4) 2(0)	0(9) 1(4) 2(1)	0(9) 1(4) 2(1)	0(10) 1(4) 2(0)
I54. Se promueve o facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la exposición.	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
Interacciones discentes				
I55. Se proponen tareas que favorecen la comunicación y debate entre los estudiantes donde cuestionen diferentes puntos de vista con argumentos matemáticos.	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
I56. Se plantean situaciones en las que los estudiantes deban convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus conjeturas con argumentos matemáticos.	0(12) 1(2) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)
Autonomía				
I57. Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y soluciones, exploran ejemplos, investigan)	0(8) 1(6) 2(0)	0(10) 1(3) 2(1)	0(9) 1(5) 2(0)	0(8) 1(5) 2(1)
Evaluación formativa				
I58. Se incluyen formas de evaluación que permita la observación sistemática y continua del progreso cognitivo de los alumnos.	0(4) 1(9) 2(1)	0(5) 1(5) 2(4)	0(5) 1(6) 2(3)	0(5) 1(8) 2(1)
Recursos materiales y tiempo				
I59. Se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos para introducir el contenido pretendido.	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)
I60. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	0(1) 1(10) 2(3)	0(4) 1(7) 2(3)	0(4) 1(8) 2(2)	0(5) 1(8) 2(1)
I61. Se explicitan las fuentes usadas y son diversas.	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)
I62. Se plantea el espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	0(7) 1(5) 2(1)	0(5) 1(6) 2(1)	0(5) 1(7) 2(1)	0(5) 1(5) 2(3)
I63. La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos es adecuada.	0(5) 1(5) 2(3)	0(2) 1(7) 2(3)	0(4) 1(7) 2(2)	0(6) 1(5) 2(2)

La valoración parcial de I57 en U1 y U3 puede deberse a la presencia de actividades que implican que el alumno interprete su respuesta o que los equipos hayan considerado que el alumno se enfrenta por primera vez al tema de magnitudes inversamente proporcionales. No obstante, la lección presenta, en general, carencias relevantes en el cumplimiento de este indicador. En I58, como se señaló antes, es posible que los participantes contemplaron las tareas para el alumno como instrumentos de evaluación.

Tabla 4.6

Comparación de valoraciones en la faceta ecológica

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Adaptación al currículo				
I64. Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	0(0) 1(3) 2(11)	0(0) 1(4) 2(10)	0(0) 1(5) 2(9)	0(0) 1(4) 2(10)
Apertura a la innovación				
I65. Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	0(12) 1(1) 2(0)	0(12) 1(1) 2(0)	0(11) 1(2) 2(0)	0(11) 1(2) 2(0)
Adaptación socio-profesional				
I66. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	0(4) 1(8) 2(2)	0(3) 1(9) 2(2)	0(4) 1(8) 2(2)	0(4) 1(7) 2(3)
Educación en valores				
I67. Se contempla la formación en valores democráticos, se dan oportunidades para que los alumnos cuestionen (pensamiento crítico).	0(13) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
Conexiones intra e interdisciplinares				
I68. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares (temas transversales, historia de la matemática, otros)	0(10) 1(4) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)	0(9) 1(5) 2(0)	0(9) 1(5) 2(0)

Como muestra la Tabla 4.6, desde el punto de vista del equipo investigador, la lección no cubre totalmente las disposiciones curriculares. Sin embargo, la mayoría de los equipos de futuros profesores consideraron este componente (I64) con la máxima puntuación. Es probable que los participantes no hayan realizado un análisis previo del currículo en lo que refiere al contenido de la lección o que hayan pasado por alto los objetivos curriculares (criterios y estándares de aprendizaje evaluables) en sus valoraciones. Por otro lado, en relación con I68,

aunque no existen conexiones intra e interdisciplinarias diversas, se hacen algunas referencias a temas de geometría y física que la mayoría de los equipos parece ignorar.

4.2. Análisis de la valoración de la idoneidad didáctica de la lección

Teniendo en cuenta la información obtenida por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad, descrita en la sección anterior, los futuros profesores debían elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Presentamos a continuación el análisis de sus respuestas, en primer lugar, analizamos los juicios que han hecho en relación con la faceta epistémica, en particular el análisis de los conflictos epistémicos que los participantes han precisado, posteriormente, analizamos los juicios razonados que los futuros profesores realizan sobre el resto de las facetas.

4.2.1. Análisis de los juicios razonados en la idoneidad epistémica de la lección

En la faceta epistémica, el análisis de contenido de las respuestas de los participantes permitió organizar la información en características positivas y negativas que han manifestado en sus valoraciones. La mayoría de dichas características responden a subcomponentes o componentes de la faceta en cuestión, por lo que se han organizado las respuestas de esta manera. Asimismo, detectamos algunas características que no corresponden a la faceta en concreto, éstas se incluyen en la categoría *otras opiniones* en las Tablas 4.7 y 4.8.

En la Tabla 4.7 indicamos las características positivas que han referido los equipos al elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad epistémica. Nueve del total de los catorce equipos han proporcionado características positivas sobre la lección, aunque no suelen justificar su calificación. En la categoría *otros aspectos*, cuando los participantes califican la faceta epistémica como “la mejor” en relación con las demás, hacen referencia a promedios, sumatoria de puntos, y en general tablas de resúmenes cuantitativos que han obtenido y diseñado por su propia iniciativa a partir de sus valoraciones asignadas en cada una de las unidades y que adjuntan como parte de sus análisis.

Tabla 4.7*Características positivas destacadas por los equipos según subcomponentes*

Componente	Descripción	Frecuencia
Situaciones problema	Se incluyen situaciones: de contexto en U1, para introducir el tema en U2, para que los alumnos planteen problemas en U2 y U3, para desarrollar los contenidos en U3 y U4.	2
	Se ofrece gran cantidad de ejercicios; se promueve el cálculo mental.	3
	Se usan relaciones internas y externas en U1, U2 y U3.	1
Lenguaje	Nivel del lenguaje adecuado; se usan diversos tipos de representaciones.	3
	Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas dentro y entre las magnitudes.	1
	Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten diferentes expresiones y representaciones en U1 y U2.	1
Relaciones	Se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes.	2
Otros aspectos	Es la faceta mejor calificada de acuerdo con la valoración asignada.	5
	El libro se adecua al currículo.	2
	Presentación adecuada del contenido.	2

Por otro lado, algunos de los equipos refieren a atributos de la lección que corresponden a otras facetas. Por ejemplo, EFP¹¹ precisa que se realiza “una adecuada presentación de los contenidos por medio de una pequeña reflexión inicial y promueve progresivamente los conceptos hacia una complejidad mayor”, lo cual sería una característica oportuna de señalar al calificar la faceta instruccional. A la vez, la adaptación de la lección al currículo corresponde a un componente de la faceta ecológica. Esto muestra que algunos participantes presentan dificultades para distinguir las características propias de cada faceta de la idoneidad didáctica, algo que por otro lado no es extraño dada su escasa formación en aspectos didáctico-matemáticos.

La Tabla 4.8 resume las apreciaciones y sus frecuencias hechas por los equipos en su juicio sobre la idoneidad epistémica que describen alguna carencia, inconveniente o calificativo negativo de la lección. Se han organizado por componentes y subcomponentes según corresponda.

En total 12 de los equipos han proporcionado atributos que descalifican la lección en algún aspecto. En términos generales no es común hallar argumentos en sus discursos. Como observamos en la Tabla 4.8, algunas de las características mencionadas por los futuros profesores en sus informes corresponden de manera parcial o incompleta a los indicadores. Así, por ejemplo, en la primera característica del subcomponente situaciones-problemas, EFP¹ y EFP¹³ indican que “son escasos los problemas para introducir los conceptos” señalando una carencia específica del indicador I1, lo que proporcionaría un argumento para considerar que el primer indicador no se debería calificar como óptimo.

Tabla 4.8

Características negativas destacadas por los equipos según componentes y subcomponentes

Subcomponente	Descripción	Frecuencias
Situaciones problema	Escasos problemas para introducir conceptos.	2
	No existe diversidad de ejercicios, son repetitivos.	5
	No se promueve el planteamiento de problemas por parte del alumno.	4
	Inexistencia de situaciones para distinguir comparaciones multiplicativas de las aditivas.	2
Lenguajes	Lenguaje no ajustado al nivel educativo, tipos de expresión y representaciones insuficientes.	4
	No se fomenta que los alumnos manejen, construyan o interpreten representaciones.	1
Conceptos	Los conceptos no se presentan de manera clara.	7
Procedimientos	No se presentan los procedimientos de forma clara.	1
	No existen situaciones para generar procedimientos característicos del tema.	1
Argumentos	Las proposiciones y procedimientos no se explican ni argumentan de forma adecuada.	1
	No se promueve la justificación de enunciados y proposiciones.	3
Relaciones	No se desarrollan de forma organizada los cuatro tipos de enfoques; contenidos no relacionados	3
Procesos	Falta de situaciones que promuevan procesos de comunicación, argumentación, etc.	8
Modelización	No se promueve la modelización.	2
Otros aspectos	La faceta epistémica no alcanza ni el 25% de la puntuación deseada, siendo U4 la peor unidad.	1
	Presentación inadecuada de contenidos.	2
	No se fomenta la creatividad del alumnado; no se propone trabajo cooperativo de los ejercicios.	2

La segunda característica incluida en dicha tabla corresponde de manera parcial al indicador I2. En este sentido, EFP¹⁴ menciona:

Estos [los problemas] son en gran medida de una estructura similar se facilita así que se realicen de manera mecanizada, sin que en ningún momento se favorezca la comprensión. Tan solo en unos pocos ejercicios se les pide a los alumnos que interpreten el enunciado o que se indiquen magnitudes proporcionales.

Indica tanto la ausencia de una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la razón, proporcionalidad y porcentajes (I2) como la carencia de situaciones donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar) sobre relaciones de proporcionalidad (I27). Cabe señalar que, aunque en su discurso EFP¹⁴ menciona la poca diversidad de las situaciones, otorgaron al indicador correspondiente la calificación máxima en todas las unidades. Planteamos la posibilidad de que el indicador no sea suficientemente claro para los participantes.

Los equipos EFP¹³, EFP¹⁸ y EFP¹² hacen referencia a que no se fomenta que el alumno plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad o porcentajes. Además, EFP¹³ menciona aspectos de tipo interaccional “el contenido tampoco contribuye a que el alumno se plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad y porcentajes ya que hace poca interacción con los alumnos”. El equipo EFP¹⁸ agrega que “no se fomenta la creatividad del alumnado al no pedirle que cree problemas para asimilar mejor el conocimiento ni sugerirles que hagan un trabajo cooperativo de los ejercicios” en este caso está indicando aspectos negativos en relación con las facetas afectiva e interaccional.

En cuanto al lenguaje, EFP¹², EFP¹³ y EFP¹³ señalan que son insuficientes los tipos de expresiones y representaciones y que no se tratan las representaciones gráficas. Además, EFP¹³ añade que no se hace uso de material manipulativo y EFP¹² indica que “es un libro “vacío” en cuanto a visualizaciones, gráficas, tablas, etc.”.

Respecto a las relaciones, EFP¹³ y EFP¹² señalan que no se desarrollan de forma organizada los cuatro tipos de enfoques. En particular, EFP¹³ indica que “la lección solo plantea el enfoque aritmético, dejando de lado el geométrico y algebraico”, haciendo referencia a que no se incluye una primera aproximación basada en la semejanza de figuras (significado geométrico) y que por otro lado no se llega a vincular la proporcionalidad con la función lineal (significado algebraico-funcional).

En cuanto a los procesos de comunicación y argumentación, los equipos refieren a que no existen situaciones que promuevan que el alumno: exponga sus conclusiones o razonamientos en U4 (EFP¹⁸), justifique procedimientos (EFP¹¹), interprete resultados o enunciados (EFP¹¹, EFP¹⁴, EFP¹⁸), formule conjeturas (EFP¹³), investigue, razone y justifique conjeturas (EFP¹⁵). En este sentido, EFP¹⁸ añade que en U3 “no se fomenta que el alumno participe activamente en el desarrollo de contenido al no pedir que interpreten datos”, con lo que precisa una consecuencia de no considerar este indicador. Por su parte EFP¹¹ indica apropiadamente que no se promueve que el alumno argumente sus respuestas.

Por último, hemos identificado algunos aspectos negativos que no refieren específicamente a los componentes o subcomponentes de la faceta epistémica, sino que hacen referencia a otras facetas como la afectiva o interaccional. Estos se han descrito en la categoría otros de la Tabla 4.8. Por ejemplo, en la categoría presentación inadecuada de los contenidos, consideramos valoraciones como “incongruencia en la jerarquía a la hora de presentar conceptos, exponiendo de la misma forma conceptos con distinta relevancia” (EFP¹³) o “la lección no centra mayor énfasis en los conceptos o procedimientos más importantes o aquellos que pueden resultar más difíciles, sino que estudia todos los contenidos por igual en lo que a extensión y dedicación temporal se refiere” (EFP¹³) que establecen aspectos vinculados con la dimensión mediacional (plantear espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan mayor dificultad de comprensión).

Análisis de los conflictos epistémicos de lección

Un aspecto fundamental para considerar en la valoración de la idoneidad epistémica refiere a la identificación de conflictos epistémicos. Detectarlos y tenerlos en cuenta supone para el futuro profesor reconocer la fuente de potenciales dificultades de aprendizaje en los alumnos y considerar acciones para solventarlos.

Si bien encontramos que, de manera general, los participantes no han reflejado en sus discursos gran parte de los conflictos epistémicos identificados a priori por el equipo investigador, el análisis de sus respuestas nos ha permitido identificar aquellas discordancias o desajustes detectados por los futuros profesores.

Respecto al lenguaje EFP¹, EFP⁸, EFP¹³ y EFP¹² hacen referencia a que el mismo no es adecuado, aunque sólo dos de los equipos refieren explícitamente en sus discursos a los inconvenientes que detectan. Al respecto, EFP⁸ precisa que en U1 “no se produce el paso de un lenguaje cotidiano al matemático en lo referido a cómo se expresan los problemas”. Además, EFP¹³ menciona que el lenguaje no es adecuado, señalando la igualdad “15%=0.15” considerada en el análisis a priori.

Los conflictos relacionados a los conceptos son señalados por 8 de los equipos en sus discursos. Sin embargo, únicamente dos de ellos (EFP² y EFP⁴) utilizan argumentos o indican especificaciones al respecto. Así, EFP² indica que las definiciones “pueden dar lugar a confusión ya que no son explicaciones claras y precisas (por ejemplo, la definición de dos magnitudes directamente proporcionales o la explicación del método de la regla de tres)”. Por otro lado, EFP⁴ destaca:

en la definición de magnitudes inversamente proporcionales hace referencia a la dualidad doble-mitad, triple-tercio, etc. sin hacer alusión a que el aumento y disminución sea por valores no naturales. En la misma línea, en la definición de ‘tanto

por ciento' hace alusión a 'una o varias de las 100 parte iguales' y de nuevo, aporta una sensación de que el 'tanto por ciento' es un número entero.

En este caso señalan un inconveniente específico de las definiciones de magnitudes inversamente proporcionales y del tanto por ciento, refiriéndose al dominio de las cantidades de magnitudes y del porcentaje.

El resto de los equipos sólo indican que existen inconvenientes en el subcomponente conceptos. En este caso particular observamos que utilizan calificativos para los conceptos tales como: "no son claros" (EFP¹, EFP³), "no son precisos" (EFP³), "no son adecuados" (EFP⁵), "son técnicos y extensos" (EFP¹¹), "son erróneos" (EFP¹²), "son superfluos o redundantes" (EFP¹³).

En cuanto a deficiencias en los procedimientos, sólo dos grupos hacen alguna mención al respecto: EFP³ indica que "son confusos" y EFP¹⁴ menciona "el procedimiento sobre cómo describir algebraicamente la proporcionalidad directa e inversa, así como el cálculo de sus constantes correspondientes, es realmente confuso", aunque no justifica qué aspectos generan dicha confusión. Finalmente, EFP¹⁴ agrega:

todos los enunciados excepto uno, son del tipo "+ a +" siguiendo la nomenclatura del autor pudiendo llevar al lector a creer que la proporcionalidad directa solo se aplica en relaciones crecientes. En proporcionalidad inversa se pregunta únicamente por cantidades menores que las dadas, lo cual "podría deducir incorrectamente que en la proporcionalidad inversa las magnitudes decrecen". Debe incorporarse más variedad de problemas en este sentido para evitar deducciones erróneas.

Este equipo hace una apreciación pertinente, mostrando un buen conocimiento sobre posibles conflictos para diferenciar condiciones necesarias y suficientes que caractericen una relación de proporcionalidad directa o inversa (Fiol y Fortuny, 1990; Izsák y Jacobson, 2017).

4.2.2. Análisis de los juicios razonados en el resto de las facetas

En el resto de las facetas, al igual que en la faceta epistémica, el análisis de contenido de las respuestas de los participantes permite organizar la información en características positivas y negativas que han manifestado en sus valoraciones. Las características positivas que han indicado los participantes aparecen resumidas en la Tabla 4.9 y las carencias en la Tabla 4.10. En total nueve equipos señalan características positivas al elaborar su juicio razonado sobre la idoneidad de la lección en alguna de las facetas correspondientes. Como se aprecia en la Tabla 4.9 la mayoría de estos equipos (ocho) coinciden con EFP¹ en que existe “correspondencia del contenido de la lección con las directrices curriculares encontradas en el Boletín Oficial del Estado”.

Tabla 4.9

Características positivas destacadas por los equipos según componentes

Componente	Descripción	Frecuencia
Faceta cognitiva		
Conocimientos previos	Los contenidos se pueden alcanzar.	2
Evaluación	Existen instrumentos de evaluación y autoevaluación.	2
Faceta afectiva		
Valores	Existen situaciones cotidianas que permiten valorar la utilidad de la matemática.	5
Faceta instruccional		
Interacción autor-alumno	La presentación y estructuración de la lección es adecuada.	3
Tiempo	Temporalización adecuada.	2
Faceta ecológica		
Adaptación al currículo	La lección se adapta a las disposiciones curriculares.	8
Adaptación socio-profesional	Se promueve la formación socio-profesional.	3

En relación con la faceta afectiva, cinco equipos opinan de modo similar a EFP¹ que “existen numerosos problemas que son aplicables a la vida cotidiana. Esto hace que el alumnado pueda ver las Matemáticas útiles para su día a día”. La frecuencia de equipos que indican alguna característica en el resto de las facetas no es muy alta, destacan por ejemplo que “los contenidos están bien desarrollados y explicados” (EFP⁵) (faceta instruccional), o bien

que “siempre se presentan actividades de autoevaluación y variedad en los problemas planteados, lo cual constituye algo positivo de la faceta cognitiva que se repite en todas las unidades” (EFP¹11) (faceta cognitiva).

Tabla 4.10

Carencias, según componentes, destacadas por los equipos

Componente	Descripción	Frecuencia
Faceta cognitiva		
Conocimientos previos	No se alude a los conocimientos previos.	5
Diferencias individuales	Inexistencia de diversidad de estrategias para resolver tareas.	4
Conflictos cognitivos	No se trata el error.	3
	Los ejercicios no poseen diferentes niveles de dificultad.	2
Evaluación	No existen distintos métodos de evaluación.	4
Faceta afectiva		
Actitudes	No se promueve la participación, ni la flexibilidad para explorar ideas.	4
Emociones	No se promueve el interés del alumno, faltan elementos motivadores, no se evita el rechazo hacia la disciplina.	7
Evaluación	No se evalúan aspectos afectivos	1
Faceta instruccional (interaccional-mediacional)		
Interacción autor-alumno	No se enfatizan conceptos claves, ni se usan recursos que involucren al alumno.	2
Interacciones discentes	No se promueven interacciones discentes.	9
Autonomía	No se fomenta la autonomía del alumno.	4
Recursos	Falta de uso de recursos materiales.	9
	Falta de contextualización.	4
Tiempo	Temporalización inadecuada.	4
Faceta ecológica		
Apertura a la innovación	Falta de apertura a la innovación.	3
Adaptación socio-profesional	No se promueve dicha adaptación.	2
Educación en valores	La educación en valores no se fomenta.	6
Conexiones intra e interdisciplinarias	No se promueven estas conexiones.	7
Otras opiniones	Idoneidad baja en alguna o todas las facetas.	7

Todos los equipos han indicado insuficiencias en la lección en alguna de las facetas correspondientes. Como se observa en la Tabla 4.10, en el componente *diferencias individuales*, cuatro equipos consideran que no se usan diversas estrategias de solución en las

situaciones, señalando por ejemplo que “siempre se aplica el mismo instrumento procedimental de resolución, favoreciendo la adición de los contenidos” (EFP¹2).

En cuanto a los conflictos cognitivos, dos equipos coinciden con EFP¹11 en que “nunca se advierte de los errores que se podrán cometer con la intención de hacer reflexionar al alumno sobre ello”. En relación con la evaluación, EFP¹1, EFP¹2, EFP¹5 y EFP¹7 consideran que no se aborda la autoevaluación, o coevaluación.

En la faceta afectiva, algunos equipos indican deficiencias en cuanto a las *actitudes*. Los equipos EFP¹1, EFP¹5 y EFP¹8 comparten opiniones respecto a que “la lección carece de ejercicios en los que se promueva la participación del alumnado, su creatividad o ejercicios dinámicos que motiven al estudio de las Matemáticas” (EFP¹1) y EFP¹3 manifiesta que “no se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas”.

Además, la mitad de los equipos han considerado que la lección presenta carencias en el tratamiento de las *emociones*, señalando como EFP¹13 que “ninguno [de los ejercicios propuestos] hace referencia a aspectos relacionados con el ocio o actividades que el propio alumno pueda practicar por interés”. Dos equipos, EFP¹3 y EFP¹7, señalan la falta de elementos motivadores:

los ejemplos carecen de humor y motivación para el alumnado al que va dirigido, constituyendo un ambiente no cercano a su contexto. Falta el impulso por la búsqueda e interés de los conocimientos, en donde no se apuesta por la variedad de las tareas, como la inclusión de la gamificación o retos y adivinanzas (EFP¹3).

Otros equipos, como EFP¹5, EFP¹13 y EFP¹12, indican que no se promueve la autoestima. Este último equipo también indica, como EFP¹8 y EFP¹3, que no se evita el rechazo hacia las matemáticas. Únicamente EFP¹12 señala que “tampoco se proponen actividades de evaluación que valoren los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje”.

Es interesante observar que el componente de *interacciones discentes* acaparó la atención de la mayoría de los equipos, que opinan de modo similar a EFP¹ cuando señala que: se observa la carencia de ejercicios de trabajo colaborativo que implique una investigación por parte del alumnado, para fomentar la puesta en común de ideas, resultados, procedimientos y trabajo en equipo en general. Además, no se proponen actividades que impliquen la exposición de un tema defendiéndolo y argumentándolo a modo de debate.

Sin embargo, únicamente dos equipos precisan en sus juicios deficiencias en cuanto a la *interacción autor-alumno*. Como indica EFP³ “no se enfatiza en los conceptos claves, ni se usan recursos retóricos y argumentativos para implicar al alumno”.

Cuatro equipos consideran como EFP³ que “no hay espacios donde el alumno asuma responsabilidad del estudio”, en referencia a que no se fomenta la *autonomía*. Con relación al aspecto mediacional, nueve equipos indican que no se utilizan *recursos materiales* en la lección; cinco de ellos precisan la falta de recursos audiovisuales, tecnológicos o manipulativos. Por ejemplo, EFP¹ indica que “podrían plantearse ejercicios que involucren el uso de calculadoras y materiales informáticos, pues resultan muy atractivos para el alumnado”.

Cuatro equipos sugieren deficiencias de contextualización en la lección, indicando que “las definiciones no son motivadas usando situaciones concretas” (EFP¹²), existen “ejemplos limitados relacionados con la vida cotidiana” (EFP²), “el contenido está muy poco contextualizado al no involucrar la sociedad y cultura en la que nos encontramos” (EFP⁹) y la “ausencia de fuentes tanto históricas como académicas” (EFP⁷). Con relación al *tiempo*, EFP⁸ afirma que “se emplea el mismo tiempo para contenidos asequibles que para los más complejos” y EFP¹² considera que “la secuenciación de actividades y contenidos no es del todo adecuada”.

Aunque en la faceta ecológica se señalan limitaciones en todos los componentes, los equipos no suelen argumentar sus juicios. Seis equipos mencionan que no se aborda la *educación en valores*, de los cuales cuatro solo lo señalan y únicamente EFP³ y EFP¹⁴ aportan información adicional. Así, EFP¹⁴ indica que se puede hacer referencia al “más famoso de los porcentajes, educando en valores: el 0,7% del PIB, que históricamente reclaman las ONGs de este país a los diferentes gobiernos de la nación para fines solidarios (“lo que daría pie al debate/reflexión del aprendiz sobre...”)

La mitad de los equipos mencionan que no se promueven las *conexiones intra e interdisciplinares*, pero únicamente EFP⁷ precisa que “esta faceta solo se ve perjudicada por la ausencia de referencias a otras ramas aparte de la física, así como la aportación de datos históricos que ayuden a la contextualización del contenido”.

En la categoría *otras opiniones* se incluyen observaciones que hacen algunos equipos en cuanto al nivel de idoneidad de algunas facetas. Por ejemplo, EFP⁷ señala “...una carencia notable en lo interaccional, afectivo y especialmente en lo mediacional”, calificando esta última como “la menos idónea en este libro de texto, principalmente en lo que a recursos se refiere”. También EFP⁶ menciona que “podemos ver que las puntuaciones son bastante bajas en todas las facetas estudiadas. Por tanto, el libro no se ajusta a los indicadores analizados y debería ser modificado para su correcto uso docente”.

4.3. Análisis de las propuestas de gestión de la lección del libro de texto

El objetivo final del análisis y la valoración de la idoneidad didáctica de la lección como proceso de instrucción planificado, es la toma de decisiones razonadas sobre la gestión del recurso. En la segunda consigna propuesta a los participantes, éstos debían plantear cambios fundamentados para la lección que permitieran incrementar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En general, la mitad de los equipos consideran que el libro sólo puede constituir una guía sobre los contenidos a abordar que debe complementarse con otras fuentes y una buena labor docente debido a las deficiencias que presenta. En las Tablas 4.11 y 4.12 sintetizamos las propuestas de mejora que proponen los participantes en relación con la idoneidad epistémica y al resto de idoneidades respectivamente.

A continuación, mostramos algunos ejemplos prototípicos de sus descripciones. Por ejemplo, en relación con la Tabla 4.11, EFP¹³ indica: “En cuanto a la idoneidad epistémica, es recomendable proponer a los alumnos actividades en las que tengan que formular sus propios problemas de proporcionalidad y porcentajes.” Por su parte EFP¹⁶ precisa:

se podría utilizar algunos de los problemas planteados en el libro. Pero, incluyendo ejercicios de representación gráfica, comparación, de enfoque cualitativo y cuantitativo. Además, deberían de plantearse problemas para distinguir entre comparaciones multiplicativas y aditivas en ejemplos que puedan encontrar a mano en clase.

Tabla 4.11

Propuestas de mejora de la idoneidad epistémica de la lección

Componente	Descripción de las propuestas	Frecuencia
Situaciones problema	Variar la tipología de situaciones	11
	Proponer actividades para que el alumno plantee problemas	4
	Proponer actividades que permitan diferentes métodos de solución	2
Lenguaje	Adaptar el lenguaje al nivel del alumnado	2
	Emplear diversas formas de representación	4
Conceptos	Incluir definiciones más claras	4
	Considerar los conceptos previos antes de abordar el tema	3
	Incluir situaciones que permitan comprender, aplicar y diferenciar los conceptos	3
Relaciones	Comenzar el estudio de la proporcionalidad con experiencias intuitivas, vinculado a otras áreas de conocimiento	2
Procesos	Modelizar por medio de la función lineal	1
	Introducir situaciones que motiven que el alumno justifique sus respuestas y procedimientos	6

En relación con el lenguaje, los futuros profesores indican la pertinencia de incluir representaciones gráficas. Por ejemplo, EFP¹⁰ señala que “los ejemplos resueltos para

comprender las técnicas o contenidos deben utilizar gráficos, imágenes, tablas, figuras, etc... para que sean más fáciles de entender”.

Diversos equipos consideran pertinente recordar los conocimientos previos. En este sentido EFP¹³ menciona: “previo a introducir los contenidos nuevos recordar los conocimientos previos que se van a utilizar, en este caso el concepto de fracción, número racional y sistema métrico decimal.”

Los participantes plantean también la necesidad de relacionar los contenidos del tema entre sí y con otras áreas de conocimiento. En este sentido EFP¹¹ sugiere:

Un planteamiento más contextualizado en base a la realidad del alumnado, relacionado con otras áreas del conocimiento y que se presente con nexos de unión entre unos y otros conceptos mediante diferencias y similitudes y diversas formas de representación, podría ser el camino correcto para la mejora del tema.

Además, los futuros profesores consideran importante dedicar espacio a la discusión colectiva y la justificación de los procedimientos empleados. Así, EFP⁴ menciona: “dedicar apartados de los ejercicios a que los alumnos discutan los resultados que han obtenido con sus compañeros. Así, podrán disponer de otras formas de realizar los ejercicios, así como la posibilidad de conocer sus posibles errores.”

Respecto a la Tabla 4.12, en los *conocimientos previos*, EFP² plantea que “para resolver los conflictos en referencia al contenido, tendríamos que recurrir a definiciones más claras y fáciles de entender y asimilar por el alumnado”. Para mejorar el aspecto de evaluación, EFP¹ propone que “sería interesante que el profesor aporte al alumnado un solucionario de ejercicios que aborden todos los contenidos explicados y que pretendan ser evaluados para ofrecer así una retroalimentación que ayude al alumnado en el proceso de aprendizaje”, lo que está en línea con la carencia en autoevaluación indicada por este equipo. Además, tres equipos

precisan que deben incluirse actividades de autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación y EFP¹⁶ sugiere “incluir también formas de evaluar de forma continua el aprendizaje”.

En relación con los *conflictos cognitivos*, dos equipos consideran necesario advertir a los alumnos de errores y dificultades. Los demás equipos plantean como EFP¹² que “sería necesario introducir una línea de ejercicios que se encuentren graduados en cuanto a dificultad”. En este sentido, es interesante notar que sólo dos equipos habían precisado como carencia la uniformidad en el nivel de dificultad de las tareas (Tabla 4.10).

Tabla 4.12

Propuestas de mejora en el resto de las facetas

Componente	Descripción de las propuestas	Frecuencia
<i>Faceta cognitiva</i>		
Conocimientos previos	Referir a conocimientos previos y a definiciones más fáciles.	3
Diferencias individuales	Introducir actividades de ampliación y refuerzo.	4
Conflictos cognitivos	Advertir de errores y dificultades, incluir situaciones secuenciadas en niveles de dificultad.	6
Evaluación	Incluir un solucionario de los ejercicios y diversos modos de evaluación.	7
<i>Faceta afectiva</i>		
Actitudes	Incluir situaciones que promuevan la participación del alumno.	2
Emociones	Incentivar la creatividad, autoestima, interés y motivación del alumno.	6
Valores	Incluir situaciones cotidianas para valorar la utilidad de la disciplina.	3
<i>Faceta instruccional</i>		
Interacción profesor-alumno	Realizar cambios al presentar el tema, reforzar con material adicional y explicaciones más claras.	6
Interacción discente	Incluir tareas que impliquen el trabajo en equipo.	12
Autonomía	Incluir tareas que fomenten la autonomía.	5
Recursos	Incluir tareas para emplear diversos materiales y contextualizar los contenidos.	10
<i>Faceta ecológica</i>		
Educación en valores	Formar en valores democráticos.	4
Conexiones intra e interdisciplinarias	Relacionar el contenido con otras áreas.	4

En cuanto a la faceta afectiva, EFP¹³ y EFP¹⁸ consideran que “los cambios a introducir deberían tener en cuenta la propuesta de ejercicios más participativos”. En atención a las

emociones, mencionan que “deberían aparecer tareas que promuevan la creatividad, curiosidad y el ingenio del alumnado proponiendo [...] actividades fuera del aula” (EFP^I2) o bien plantear situaciones “que promuevan el trabajo en grupo, además de la autoestima y la seguridad en sí mismo para realizar los problemas matemáticos” (EFP^I6). Otros cuatro equipos consideran que se debe fomentar el interés y motivación del alumno “ya sea adaptando el contenido a alumnos de la edad correspondiente con referencias con las que se sientan identificados” (EFP^I7) o bien incluyendo “más tipos de ejercicios diferentes... que muestren que las matemáticas son divertidas y pueden practicarse en conjunto” (EFP^I5).

Seis equipos plantean la necesidad de cambios en la lección en relación con el componente *interacción autor-alumno*. En cuanto a la presentación del tema señalan como EFP^I3 que se debe “intentar dar un enfoque diferente al contenido presentado en el texto o reforzarlo con material adicional, pues algunas explicaciones pueden resultar confusas a los estudiantes” (EFP^I3). En particular EFP^I10 propone que “al presentar cada uno de los conceptos se deberían dar dos ejemplos diferentes que no se resuelvan de manera análoga”.

La mayoría de los equipos consideran como EFP^I5 que “sería imprescindible añadir ejercicios que fomenten el trabajo en equipo, el trabajo cooperativo, y que hagan que los alumnos reflexionen, aparte de asimilar conceptos”. Finalmente, para la faceta interaccional cinco equipos señalan que se deben incluir tareas para fomentar la *autonomía del alumno* y dos precisan que se deben incluir actividades de investigación.

Las propuestas de cambios respecto a la faceta mediacional plantean mayoritariamente la inclusión de diversos *recursos*. Cinco de los diez equipos sugieren como EFP^I1 que “el docente puede proponer actividades en las que se emplee el uso de herramientas tecnológicas como puede ser un ordenador o simplemente una calculadora”. Por otro lado, EFP^I8, EFP^I10 y EFP^I11 precisan que deben contextualizarse los contenidos y proponen incluir “ejercicios para

poder aplicar las definiciones y propiedades contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones” (EFP¹⁰).

Cuatro equipos consideran que debe contemplarse la formación en valores democráticos, dado que “no solo se trata de explicar los contenidos matemáticos sino realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje integral, [...] sin olvidar la parte emocional y los valores que el alumno debe adquirir cómo persona” (EFP¹⁵). Para ello, EFP³ sugiere que

se deben plantear actividades grupales para fomentar el respeto a la diversidad, la cooperación y la tolerancia, [...] por ejemplo, un proyecto en el cual se proponga el proceso de reciclaje de un folio donde se vayan usando las proporciones en cada paso del proceso concienciando así al alumnado de la importancia que tiene no derrochar papel.

Finalmente, cuatro equipos consideraron la necesidad de relacionar el contenido con la historia de las matemáticas u otras áreas de conocimiento. Por ejemplo, EFP³ recomienda “establecer conexiones con otros temas como son el de la estadística, a la hora de representar datos en gráficos de líneas y barras se usa la proporcionalidad”.

5. Conclusiones

En este capítulo hemos descrito el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa orientada a promover en futuros profesores de secundaria de matemáticas la competencia de análisis de idoneidad didáctica. Para ello, hemos empleado como recurso una lección de proporcionalidad de un libro de texto y como herramienta metodológica la GALT-proporcionalidad.

A continuación, hacemos referencia a las conclusiones asociadas a cada uno de los objetivos que nos planteamos abordar en este capítulo, y mostramos las implicaciones y limitaciones del experimento, que han de tenerse en cuenta en intervenciones posteriores.

5.1. Cómo aplican los futuros profesores de secundaria la GALT-proporcionalidad para valorar de manera crítica una lección.

La lección de libro de texto que se propuso analizar a los futuros profesores de matemáticas presenta serias deficiencias en cuanto a la idoneidad epistémica coincidiendo con trabajos previos (Ahl, 2016; Burgos et al., 2019; Johnson, 2010; Shield y Dole, 2013). Además, el análisis a priori por medio de la GALT-proporcionalidad permitió evidenciar deficiencias de la lección en aspectos correspondientes a otras facetas.

Se esperaba que la GALT-proporcionalidad y la asignación de la valoración (0, 1, 2) en cada una de las unidades ayudasen al planteamiento del discurso de los participantes en relación con la valoración de la idoneidad de la lección del libro de texto analizada. En este sentido observamos que algunos equipos al proporcionar el juicio razonado concuerdan con su propia valoración cuantitativa dada previamente, lo cual supone que para estos futuros profesores el instrumento sirvió de guía para sintetizar las debilidades y las fortalezas de la lección. Sin embargo, también observamos que otros equipos no concuerdan con las valoraciones previas, por ejemplo, indicando como característica negativa que no se cumple un indicador en una unidad que ha sido valorado con un 2, esto principalmente en la faceta epistémica.

Los resultados muestran que, en general, los futuros profesores reconocen mejor las limitaciones de la lección en los aspectos cognitivos, afectivos, instruccionales y ecológicos, concordando con las valoraciones numéricas (0, 1 o 2) otorgadas por el equipo investigador en la mayoría de los indicadores que corresponden a estas facetas (23 de 37).

A pesar de existir algunas discordancias en la valoración cuantitativa, el análisis de contenido de los juicios realizados por los participantes sobre las idoneidades respectivas muestra que los futuros docentes identifican las principales carencias de la lección en los diversos componentes. En general son menos los equipos que describen características

positivas que aquellos que indican deficiencias o limitaciones, siendo estas últimas, en general, bastante pertinentes.

Concordando con investigaciones previas (Lloyd y Behm, 2005; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008; Yang y Liu, 2019), los resultados obtenidos reflejan que los participantes suelen hacer análisis más descriptivos y menos analíticos incluso con el apoyo de una guía. Los futuros profesores omiten debilidades de contenido matemático que presentan la lección, hacen referencia a escasos conflictos epistémicos y cuando lo hacen no los precisan. No obstante, algunos participantes al plantear atributos negativos especifican información respecto al tipo de situación, tipos de representaciones, enfoques, que no se abordan en la lección.

5.2. Cómo consideran los resultados del análisis para proponer mejoras en la gestión de uso.

Los procesos de reflexión, adaptación y toma de decisiones generan aprendizaje y reflexión en los docentes (Nicol y Crespo, 2006; Remillard, 2000). Como señalan Yang y Liu (2019) se trata de analizar qué estrategias de formación mejoran las críticas de los profesores de matemáticas de los libros de texto y cómo esas críticas influyen en la adaptación de los recursos. En la intervención realizada con los futuros profesores, éstos trabajando en equipo deben analizar la lección aplicando la GALT-proporcionalidad, plantear juicios razonados al análisis y concretar aspectos referentes a la gestión de uso de dicho recurso para que aumente la idoneidad didáctica del proceso de instrucción planificado.

Al respecto señalamos que los futuros profesores han logrado ser bastante precisos al elaborar sus propuestas de uso del libro de texto. En la faceta epistémica han concretado mejoras en las tipologías de situaciones, representaciones, conceptos y relaciones que deben abordarse como parte de una labor docente. En el resto de las facetas, los futuros profesores han sido específicos en críticas sobre la lección en componentes que poseen carencias significativas. Así, se observa en la Tabla 4.12 un incremento de equipos que reconocen la

necesidad de mejora en el componente evaluación, en comparación a aquellos que habían señalado deficiencias en dicho aspecto en la Tabla 4.10.

Podemos concluir que la reflexión sobre el modo de uso de la lección, tras valorar su idoneidad, puede constituir una buena estrategia para involucrar a los futuros profesores en análisis más profundos, generando aprendizaje y reflexión por los docentes (Nicol y Crespo, 2006).

5.3. Implicaciones y limitaciones

Hemos detectado algunas dificultades de los participantes al mencionar aspectos de otras facetas que no corresponden a la faceta particular a la cual se refieren, lo que indica dificultad por parte de los futuros profesores para diferenciar ámbitos en la idoneidad del proceso instruccional planificado en una lección de libro de texto. Por ejemplo, al referirse a la faceta epistémica, EFP^I2 señala cuestiones de la faceta ecológica, como “se adecúa al currículo”, EFP^I11 indica que “es la mejor faceta debido a una adecuada presentación de contenido, con una reflexión inicial y promoción progresiva de conceptos de mayor complejidad”, donde incluye aspectos de la faceta interaccional. En la faceta mediacional, EFP^I13 refiere a que en la lección no se resaltan errores comunes, lo cual refiere a un aspecto de la faceta cognitiva.

También detectamos que algunos estudiantes han tenido dificultades de comprensión de algunos de los criterios para el análisis de los materiales, este hecho se refleja no sólo en la evaluación y comparación con el análisis a priori de las valoraciones otorgadas, sino también porque algunos equipos lo manifiestan como respuesta a consigna 3 de la actividad formativa, donde se solicitaba valorar el taller formativo. En esta consigna, cuatro equipos consideran que los indicadores planteados son suficientes, claros y apropiados para el tema de Proporcionalidad. Sin embargo, un total de once equipos también consideran que son excesivos, por lo que recomiendan adaptarlos a cada unidad a analizar, agrupar algunos

indicadores, o reducir el número de unidades de análisis. Otros equipos (ocho en total) consideran que los indicadores son confusos o ambiguos, especialmente señalan dificultades debidas a la falta de familiaridad con este tipo de tareas o el uso de terminología específica. Estos resultados coinciden con investigaciones como las de (Beyer y Davis, 2012; Braga y Belver, 2016; Schwarz et al., 2008) donde los docentes tuvieron dificultades en el análisis al interpretar criterios y muchos catalogaron el trabajo como demasiado detallado o largo.

Finalmente, algunos participantes expresan dificultades al valorar con rigor indicadores de la faceta cognitiva, afectiva (especialmente las creencias), interaccional y mediacional, lo que puede deberse a la naturaleza del proceso de instrucción analizado. Esto supone la necesidad de revisar y precisar dichos indicadores (por ejemplo, los relativos a una secuenciación adecuada de los contenidos de la proporcionalidad según la literatura existente) pero también a identificar a priori el conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores con relación a la proporcionalidad.

Consideramos que una posible limitación de nuestro estudio es que los docentes no han tenido la oportunidad de familiarizarse lo suficiente con la GALT-proporcionalidad, ni de recibir formación específica sobre conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con la proporcionalidad. Otra limitación que podemos mencionar es que en general, los equipos al valorar cada indicador no aportan argumentaciones u observaciones de su valoración, aunque les fue solicitada dicha justificación. El contar con dichas argumentaciones hubiese permitido detectar de manera más precisa las causas de discordancias. Por ende, de cara a intervenciones formativas posteriores se observa la necesidad de especificar con mayor claridad aquellos indicadores que han sido más difíciles de valorar en la guía y solicitar a los futuros docentes que justifiquen su valoración cuantitativa. Además, incluir una formación previa sobre las facetas, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica.

Reconocemos la necesidad de que los profesores cuenten con herramientas teóricas para centrarse en los aspectos más relevantes de los procesos de instrucción (Breda et al., 2017). Consideramos que la GALT-proporcionalidad constituye una de ellas, y que la optimización de esta tomando en cuenta los resultados obtenidos en esta intervención puede tener implicaciones positivas y mejores efectos en futuras intervenciones.

Sería fundamental contar con espacios para compartir con los participantes los resultados aquí obtenidos como oportunidades de aprendizaje y la relevancia de ahondar en conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con la proporcionalidad.

CAPÍTULO 5. PRIMER CICLO DE EXPERIMENTACIÓN CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad por maestros en formación. *Revemop*, 4, e202204. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>
 - Burgos, M., Castillo, M. J. y Godino, J. D. (2022). Análisis didáctico de lecciones de proporcionalidad en la formación de maestros. (Sometido a publicación).
 - Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022b). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA* (aceptado).
 - Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022c). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, 36(72), 555–579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>
-

1. Introducción

Muchos docentes identifican los libros de textos como el saber institucional que se debe enseñar y aprender, por lo que recurren a estos como material prioritario para planificar los procesos de instrucción (Rezat, 2012; Salcedo et al., 2018). Por otro lado, los libros de texto influyen en el desempeño y rendimiento de los estudiantes, de modo que la forma en que se presenta la información en estos puede suponer un obstáculo o una oportunidad en el aprendizaje de los contenidos que se desean enseñar (Törnroos, 2005).

Teniendo en cuenta que el libro de texto constituye el material curricular prioritario por parte de los profesores, el análisis de libros de texto ha recibido especial atención en las últimas décadas (Burgos et al., 2020; Fan, et al., 2013; Kajander y Lovric, 2009; Wijaya et al., 2015). Reflexionar sobre la idoneidad del proceso de instrucción planificado en una lección de libro

de texto puede ayudar a los futuros docentes a tomar conciencia sobre sus conocimientos matemáticos y didácticos del razonamiento proporcional y desarrollar aquellos aspectos en los que encuentran mayores dificultades (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Buforn et al., 2018; Van dooren et al., 2008). Sin embargo, el análisis crítico del contenido y la toma de decisiones sobre el modo de uso de los materiales curriculares es una tarea compleja para la que los futuros docentes precisan de formación específica (Beyer y Davis, 2012; Godino et al., 2017; Shaver, 2017).

La calidad de los libros debe analizarse según su capacidad para ayudar a los estudiantes a lograr los objetivos de aprendizaje. Esto supone un primer análisis profundo que contemple la secuencia de prácticas operativas, discursivas y normativas que propone el autor para el desarrollo del contenido matemático y cómo se gestionan los conocimientos previos requeridos. Se trata de identificar elementos potencialmente conflictivos que requieran en la implementación por parte del profesor, una modificación de la trayectoria didáctica planificada en la lección del libro de texto. Además, proponemos la aplicación de la GALT-proporcionalidad para valorar el grado de idoneidad en cada uno de los componentes por medio de indicadores que actúa a modo de rúbrica, la cual ayuda a fundamentar la reflexión sobre la gestión de uso de dicho recurso en el aula y el planteamiento de posibles adaptaciones del texto analizado para incrementar la idoneidad del proceso de estudio.

En este capítulo se describe una experiencia con futuros maestros de educación primaria, que contempla el análisis didáctico (delimitación de configuraciones didácticas, identificación de prácticas, objetos, procesos y conflictos) y el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto, con el uso de la guía (GALT-

proporcionalidad), como estrategia conjunta⁸ para promover su competencia reflexiva y conectar con los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho tema.

De modo específico, planteamos las cuestiones de investigación siguientes.

En relación con el análisis didáctico de la lección de libro de texto (sección 4.1):

- *¿De qué forma identifican los futuros maestros las prácticas, objetos y procesos presentes en las distintas configuraciones didácticas de una lección de un libro de texto?*
- *¿Cómo repercute este análisis en el reconocimiento de conflictos epistémicos y cognitivos potenciales presentes en el proceso instruccional planificado?*

Respecto a la aplicación de la guía al análisis de la lección de libro de texto (secciones 4.2 y 4.3):

- *¿Qué dificultades manifiestan los participantes al aplicar la GALT-proporcionalidad?*
- *¿Cuál es el nivel de pertinencia de sus valoraciones por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad para cada una de las idoneidades parciales y en general para la idoneidad didáctica de la misma?*
- *¿Qué tipo de reflexiones realizan los futuros maestros al valorar la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre proporcionalidad?*

En relación con la gestión y modo de uso de la lección de libro de texto (sección 4.4):

- *¿Cómo creen los futuros maestros que debe utilizarse el texto analizado?*

⁸ Como explicamos en el Capítulo 2 (sección 3) de esta memoria, en las implementaciones con futuros maestros de primaria, el diseño contempla tanto el análisis didáctico de la lección de libro de texto, como el análisis y valoración de la idoneidad didáctica con el uso de la guía (GALT-proporcionalidad). La aplicación de esta estrategia formativa se justifica no sólo debido a que, en el caso de los futuros maestros de primaria, la base matemática y el conocimiento de la naturaleza de los objetos matemáticos (qué es un concepto, una proposición o un argumento matemático) requiere de una mayor formación, sino también porque con esta población se tenía mayor disponibilidad temporal que en el caso de los estudiantes del máster de secundaria.

- *¿Qué cambios proponen los maestros para incrementar la idoneidad didáctica del proceso instruccional pautado por los autores del texto?*

A continuación, se describe brevemente la metodología seguida y el contexto de aplicación de la experiencia. En la sección 3 se presentan los instrumentos de recogida y análisis de datos, siendo parte de una investigación de diseño. Los resultados del análisis de los informes entregados por los futuros profesores con relación a la experiencia se incluyen en la sección 4. El capítulo termina con las conclusiones, en las que indicamos limitaciones y posibles líneas de investigación.

2. Metodología, participantes y contexto de aplicación

Como ocurrió con la intervención previa con futuros profesores de educación secundaria, en este caso seguimos también las fases de la ingeniería didáctica en el sentido que proponen Godino, Rivas et al. (2014). Siguiendo un enfoque metodológico esencialmente cualitativo (Strauss y Corbin, 1990), empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para el análisis sistemático e interpretación de los protocolos de respuesta de los futuros maestros de primaria que intervinieron en la experiencia formativa, adoptando las facetas, componentes y subcomponentes de la idoneidad didáctica para clasificar y describir las respuestas de los participantes.

Finalmente, para analizar los objetos matemáticos y los modos de uso (respuestas parciales a las tareas 1 y 5 respectivamente; sección 3.1 de este capítulo) que los futuros maestros propusieron respecto de la lección de libro de texto que se les dio a analizar, se utilizó el software gratuito *nubesdeplabras.es* para crear una nube semántica, que permite visualizar de modo gráfico las principales palabras empleadas por los participantes en sus informes. En dichas nubes los tamaños de las letras son proporcionales a la importancia numérica, es decir, la frecuencia de cada palabra o término introducido.

La experiencia formativa se desarrolló con 61 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas de Educación Primaria, en la Universidad de Granada durante el curso lectivo 2019-2020. En cursos previos del grado, los estudiantes reciben formación específica sobre aspectos epistémicos, cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), instruccionales (tareas y actividades, materiales y recursos) y curriculares, de manera que en el momento en que se desarrolla la experiencia, se espera que los participantes sean capaces de poner en práctica los conocimientos adquiridos para diseñar y valorar unidades didácticas en cualquier tema de matemáticas de educación primaria, en particular, sobre proporcionalidad. Además, en esta asignatura se contempla de manera específica el uso y análisis del libro de texto como recurso en el aula de matemáticas, así como la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se imparten dos clases semanales: una teórica (de dos horas de duración) en gran grupo y otra de carácter práctico, en grupos reducidos, donde trabajan por equipos (de 4 o 5 integrantes).

La intervención se desarrolló en cuatro sesiones: dos de formación teórica y dos de trabajo práctico colaborativo (de dos horas de duración cada una). La primera sesión formativa teórica se dedicó al papel de los libros de texto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se introdujeron las nociones de configuración didáctica y configuración de prácticas, objetos y procesos, y su uso para el análisis de la actividad matemática en una lección de libro de texto, con base en la lectura de Burgos, Castillo et al. (2020). Además, en dicha lectura los futuros maestros podían encontrar los conocimientos didácticos-matemáticos sobre proporcionalidades más relevantes de cara a identificar potenciales conflictos en la lección, así como un ejemplo del tipo de análisis que debían llevar a cabo en la sesión práctica.

En la siguiente clase de formación teórica, se introdujo la noción de idoneidad didáctica, sus facetas, componentes e indicadores (Godino, 2013). Se trataba de mostrar a los futuros

maestros la necesidad de contar con un sistema de componentes e indicadores empíricos generales, que actúen a modo de rúbrica cuando se analiza un proceso de estudio previsto o implementado en la práctica profesional docente.

En la primera sesión práctica, los participantes trabajaron en equipos (siguiendo la metodología habitual de las clases prácticas de esta asignatura) para realizar el análisis de la lección de libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria de González et al. (2015), dividida en tres configuraciones didáctica (tarea 1 propuesta; sección 3.1 de este capítulo).

La segunda sesión práctica se desarrolló de manera virtual, dirigida por la profesora habitual del curso, debido a la suspensión de la actividad docente por el COVID-19. Durante este tiempo, los estudiantes podían preguntar sus dudas por medio de la plataforma Moodle o en entrevistas a través de Google-Meet. Los futuros maestros debían realizar un análisis detallado de la idoneidad didáctica de la lección por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad⁹ (resto de las tareas propuestas; sección 3.1 de este capítulo).

Se dispone del informe de trabajo colaborativo elaborado por 14 equipos de futuros maestros de primaria, participantes de este primer ciclo (ICP) de investigación que denominados en adelante como EFM^I1, EFM^I2, ..., EFM^I14. Estos 14 equipos estaban formados por 4 o 5 estudiantes y se habían constituido al inicio del curso académico, de manera que estaban habituados a trabajar juntos. La valoración de la idoneidad didáctica de la lección debía estar consensuada por todo el equipo y en caso de discrepancia no resuelta podían consultar a la profesora. Sin embargo, no hubo necesidad al respecto.

⁹ La versión de la GALT-proporcionalidad empleada en esta experiencia puede verse en el Anexo 1.2 de esta memoria.

3. Diseño del experimento

En esta sección describimos la secuencia de tareas propuestas a los participantes (instrumento de recogida de datos), así como el análisis a priori de las mismas. La lección de proporcionalidad que se analiza corresponde al libro de texto de 6º curso de educación primaria de González et al. (2015), y como se mencionó anteriormente, la misma se ha considerado dividida en tres configuraciones didácticas (unidades de análisis): magnitudes proporcionales (C1), reducción a la unidad y regla de tres (C2), escalas y mapas (C3). Teniendo en cuenta los resultados de la intervención con los futuros profesores de secundaria, en este caso, se vio necesario reformular y adaptar algunos de los indicadores en la guía, así como plantear que el análisis en las facetas afectiva, ecológica e instruccional se realizara de manera conjunta para toda la lección.

3.1. Instrumento de recogida de datos

Las tareas que se propusieron resolver a los futuros maestros son las siguientes:

1º En Anexo I encontraréis parte de una lección de libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria dividida en tres configuraciones didácticas (unidades de análisis). Para cada una de las configuraciones didácticas, se trata de identificar las prácticas, objetos (conceptos, procedimientos, argumentos, proposiciones, lenguajes) y procesos que intervienen, así como los posibles conflictos de tipo epistémico (con el contenido matemático) o cognitivo (con el aprendizaje).

2º. En Anexo II encontraréis las tablas (Tablas 1 y 2) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en la faceta epistémica (el contenido) y cognitiva (el aprendizaje). Para cada una de las configuraciones didácticas debéis completar la columna final de observaciones en la faceta epistémica y cognitiva, teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores. Es decir, las tablas 1 y 2 se completan 3 veces, anotando las observaciones que consideréis oportunas en cada configuración.

3º. En Anexo III se incluyen las tablas (Tablas 3, 4 y 5) con los componentes e indicadores de idoneidad en la faceta afectiva, instruccional (la enseñanza) y ecológica (adaptación de la lección a las directrices curriculares, cómo aparecen reflejados los

contenidos y los estándares de aprendizaje). Completad la columna final de observaciones en las tres tablas (afectiva, instruccional y ecológica), teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores correspondientes. Las tablas 3, 4 y 5 sólo se completan de manera global para toda la lección, no para cada unidad como en el caso anterior.

4°. Teniendo en cuenta lo que habéis observado elaborad un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica.

5°. ¿Cómo creéis que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que habéis identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto?

3.2. Análisis a priori

El análisis a priori de la lección, que presentamos a continuación, fue realizado de manera independiente por los investigadores y confrontado posteriormente para consensuar una valoración global. Dicho análisis constituye el referente de lo que se espera que realicen los futuros maestros, y nos permite valorar su logro de aprendizaje. Así mismo, permitirá analizar y evaluar las respuestas de los participantes. En esta experiencia, el análisis a priori incluye tanto el análisis didáctico de la lección, como el análisis de la idoneidad didáctica centrado en la identificación de conflictos (ausencia o incumplimiento de indicadores de idoneidad tras aplicar la GALT-proporcionalidad)¹⁰.

3.2.1. Análisis didáctico de la lección

En primer lugar, incluimos el análisis didáctico de la lección. En cada configuración didáctica describimos las prácticas e identificamos los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las mismas. Posteriormente indicamos los principales conflictos epistémicos y cognitivos detectados.

¹⁰ El análisis a priori en profundidad de cada indicador se puede ver en el Anexo 2

Prácticas, objetos y procesos en CI. En la Figura 5.1 se muestran las situaciones iniciales propuestas por el autor para introducir las magnitudes proporcionales.

Una descripción de las prácticas matemáticas que se han identificado en esta configuración corresponde a:

- P1.1 Formulación de una situación inicial sobre magnitudes proporcionales (tiempo de aparcamiento y precio), que lleva a establecer la relación multiplicativa entre sus cantidades y representarla mediante un diagrama.
- P1.2 Se afirma que las magnitudes son proporcionales y se construye una tabla de proporcionalidad que permite relacionarlas, identificando en la representación la relación multiplicativa.
- P1.3 Formulación y discusión de una situación-problema que involucra magnitudes no proporcionales.

Figura 5.1

Situaciones iniciales propuestas para CI y descripción de las prácticas matemáticas

Fermín aparca su bicicleta durante 3 h. ¿Cuánto pagará?

Si aparcarse durante 1 h cuesta 2 €, el triple de tiempo cuesta 3 veces más:

1 h → 2 €

→ × 3 →

3 h → 6 €

▶ Pagará 6 €.

El tiempo de aparcamiento y el precio son **magnitudes proporcionales**. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad.

Al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo.


tiempo (h)	1	2	3	4	...
precio (€)	2	4	6	8	...

Al dividir los números de la fila de abajo, obtenemos los de la fila de arriba.

Al pasear en su bicicleta durante 1 h, Fermín encuentra 2 semáforos. Si pasea 3 h, ¿puede saber cuántos semáforos encontrará?

▶ No, porque el número de semáforos que encuentra no tiene por qué ser el mismo cada hora.

El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales. No se pueden relacionar con una tabla de proporcionalidad.



Fuente. Tomada de González et al. (2015, p.116)

Además de las prácticas matemáticas antes descritas, el autor propone una secuencia de siete situaciones-problemas que el alumno debe resolver. Estas implican: reconocer magnitudes

proporcionales en situaciones contextualizadas, por medio del lenguaje verbal y tabular respectivamente; completar datos en “tablas de proporcionalidad” asociadas a cantidades de magnitudes directamente proporcionales, averiguando cómo se relacionan las filas (es decir, determinando la constante de proporcionalidad, si bien no se introduce este término); buscar el valor faltante dados otros tres, para que las cantidades puedan responder a una situación de proporcionalidad directa; proporcionar un ejemplo de magnitudes proporcionales y crear una tabla de proporcionalidad para representarlas; resolver dos problemas de valor faltante.

La Tabla 5.1 resume los principales objetos y procesos asociados a las prácticas implicadas en la configuración C1.

Tabla 5.1

Objetos y procesos en C1

Objetos	Procesos
Situaciones-problema introductorias (identificación de magnitudes proporcionales) y de ejercitación.	<i>Problematización</i> : resolución y creación de problemas (inventar dos magnitudes proporcionales y construir una tabla de proporcionalidad).
Lenguaje: simbólico, verbal, icónico, tabular, diagramático.	<i>Representación/interpretación</i> : uso de los diferentes tipos de representaciones, conversión del lenguaje natural al tabular.
Proposiciones: si aparcar la bicicleta 1h cuesta 2€, el triple de tiempo cuesta 3 veces más...	<i>Enunciación</i> : de proposiciones como “el tiempo de aparcamiento y el precio son magnitudes proporcionales.”
Conceptos: magnitud, magnitudes proporcionales, magnitudes no proporcionales.	<i>Conceptualización</i> : Se define magnitud (“aquello que se puede medir”). Las magnitudes proporcionales se introducen como dos magnitudes que se relacionan en una tabla de proporcionalidad. <i>Generalización</i> : el criterio general de la relación funcional, $y = kx$, se evoca mediante puntos suspensivos en la representación tabular. <i>Particularización</i> : de los contenidos teóricos a dos ejemplos de magnitudes
Argumentos: “no tiene por qué ser el mismo cada hora”.	<i>Argumentación</i> : se basa en “dos magnitudes proporcionales se relacionan en una tabla de proporcionalidad”.
Procedimientos: multiplicar, dividir.	<i>Algoritmización</i> : fijación de regla para hallar valor faltante por medio del registro tabular.

Como parte del mega proceso de *resolución de problemas* se consideran los procesos matemáticos que el alumno debe ejecutar con la finalidad de resolver las situaciones que el autor propone: aplicar los conceptos involucrados, interpretar los tipos de expresión y representación utilizados, construir tablas de proporcionalidad y realizar procesos de conversión del lenguaje verbal al tabular, son acciones necesarias para resolver algunas de las tareas. También aplicar tratamientos en el registro numérico para hallar el valor faltante y explicar cómo se relacionan las cantidades de magnitudes (sólo en la tarea 19).

Así, las situaciones propuestas implican la conceptualización, enunciación, argumentación, representación y algoritmización. Además, dado que el autor particulariza la presentación de los contenidos teóricos a ejemplos específicos de magnitudes, el alumno debe *generalizar* las definiciones y propiedades a otros casos. Por ejemplo, la descripción que se hace de magnitudes proporcionales queda restringida al caso particular de “tiempo de aparcamiento” y “precio a pagar”; se muestra cómo se relacionan algunas cantidades de estas magnitudes en una tabla de proporcionalidad, pero no se llega a dar una definición general para este término (Figura 5.1). También se puede asociar el proceso de generalización al reconocimiento de patrones numéricos entre las cantidades de magnitudes implicadas en los problemas. Finalmente, en la tarea 21, el alumno debe indicar dos magnitudes proporcionales y asignarles valores numéricos específicos (*particularización*).

Prácticas, objetos y procesos en C2 La situación inicial propuesta por el autor para introducir la reducción a la unidad y la regla de tres se muestra en la Figura 5.2.

La secuencia de prácticas matemáticas que identificamos en dicha configuración corresponde a:

- P2.1 Descripción de pasos a seguir en el procedimiento de reducción a la unidad y aplicación en situación contextualizada de valor faltante.


- P2.2 Descripción de pasos a seguir en el procedimiento de regla de tres (escribir los datos como fracciones equivalentes, multiplicar en cruz, dividir el resultado entre el número que no se ha usado) y aplicación para resolver la misma problemática.
- P2.3 Explicitación del valor faltante, respuesta a la situación.

A continuación, el autor propone una secuencia de seis situaciones-problema de valor faltante que persiguen que el alumno adquiera destreza en la aplicación de los métodos de reducción a la unidad y regla de tres. Al respecto, el autor precisa en una nota “ten en cuenta”, que “los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres sólo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes” (González et al., 2015, p.118). Todas están planteadas en un contexto de la vida real, salvo la actividad 26 (Figura 5.5) que sólo requiere determinar el cuarto valor faltante. Además, en la tarea 27 el alumno debe inventar y resolver un problema.

Figura 5.2

Reducción a la unidad y regla de tres

En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?



Para calcularlo tenemos que reducir a la unidad.

1.° Escribimos la tabla de equivalencias.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	¿?

$\times 2?$

2.° Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.

n.º de monedas	2	1
n.º de puntos	10	5

$\div 2$

3.° Calculamos el dato que buscamos.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	150

$\times 30$

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres**.

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

1.° Escribimos los datos de esta manera:

n.º de monedas	n.º de puntos
$\frac{2}{30}$	$= \frac{10}{¿?}$

¿? representa el dato que queremos calcular.

2.° Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.

n.º de monedas	n.º de puntos
$\frac{2}{30}$	$= \frac{10}{¿?}$

$30 \times 10 = 300$

3.° Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

n.º de monedas	n.º de puntos
$\frac{2}{30}$	$= \frac{10}{¿?}$

$300 : 2 = 150$

Por tanto, el valor del dato que queremos calcular es:

$30 \times 10 : 2 = 150$

► Carmen ha obtenido 150 puntos.

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p. 118).

La Tabla 5.2 resume los objetos y procesos matemáticos identificados en C2. La ausencia de argumentos que acompañen a los procedimientos de reducción a la unidad o regla de tres conlleva que la justificación implícita se base en que ambos son aplicables en condiciones de proporcionalidad directa entre magnitudes. Los alumnos deben poder interpretar las representaciones involucradas, construir tablas de proporcionalidad y convertir del lenguaje natural al tabular y fraccionario en algunas de las tareas planteadas.

Tabla 5.2

Objetos y procesos en C2

Objetos	Procesos
<i>Situaciones</i> de iniciación y ejercitación (valor faltante) de proporcionalidad directa.	<i>Problematización</i> : resolución y creación de problemas (encontrar dos magnitudes proporcionales y asignar valores numéricos).
<i>Lenguaje</i> : verbal, fraccionario, simbólico, icónico, tabular, diagramático.	<i>Representación/interpretación</i> : se usa el lenguaje natural, diagramático y simbólico para describir los algoritmos, conversión del lenguaje natural al tabular y al fraccionario.
<i>Proposiciones</i> : “Carmen ha obtenido 150 puntos”.	<i>Enunciación</i> : “los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres sólo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes”.
<i>Argumentos</i> : no explícitos.	<i>Argumentación</i> : la justificación se basa en la aceptación de que los métodos de reducción a la unidad y regla de tres se aplican en situaciones de proporcionalidad directa.
<i>Procedimientos</i> : multiplicar, dividir, reducir a la unidad, regla de tres.	<i>Algoritmización</i> : regulación de los pasos para hallar el valor faltante mediante los algoritmos de reducción a la unidad y regla de tres. <i>Particularización</i> : la regla general que describe los procedimientos se ejemplifica con el caso particular del videojuego

Prácticas, objetos y procesos en C3. La situación inicial propuesta por el autor para introducir la escala se muestra en la Figura 5.3. Las prácticas matemáticas operativas y discursivas identificadas son las siguientes:

- P3.1 Interpretación de la distancia en el mapa y aplicación del significado de escala para abordar la situación inicial propuesta.
- P3.2 Conversión de unidades de medidas.
- P3.3 Explicitación de la distancia en kilómetros que responde a la situación inicial.

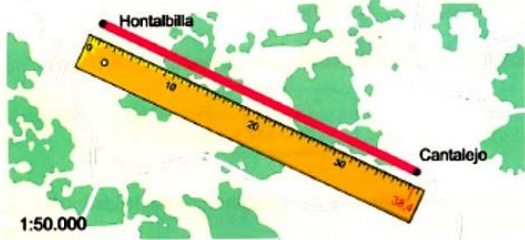
– P3.4 Descripción del significado y utilidad de la escala.

Tras la situación introductoria, el autor propone una secuencia de ocho actividades en las que se precisa: interpretar la escala y determinar distancias a partir de la situación inicial; explicar el significado de algunas escalas; determinar la escala que corresponde a determinadas relaciones establecidas entre medidas de distancias dadas en unidades diferentes; obtener, a partir de cierta escala, las medidas reales que corresponden a diferentes medidas dadas en un plano o mapa, expresadas en diferentes unidades, donde los números que intervienen son naturales o decimales (respectivamente). La tarea 35 (Figura 5.6) pide obtener la medida en el mapa conocida la distancia real y distintas escalas. Finalmente, el autor propone una última actividad (taller manipulativo) en la que se solicita la construcción de un plano en una cuadrícula con una escala dada, tomar medidas sobre la cuadrícula y averiguar medidas reales.

Figura 5.3

Situación inicial propuesta para C3

Dario ha medido la distancia entre su pueblo y el de sus tíos en el mapa. ¿Cuántos kilómetros son en la realidad?



Para calcularlo utilizamos la escala del mapa:

$$1:50.000$$

1 cm del mapa equivale a 50.000 cm en la realidad.

Como la distancia en el mapa es de 38,4 cm, en la realidad será:

$$38,4 \times 50.000 = 1.920.000 \text{ cm}$$

Expresamos el resultado en kilómetros:

$$1.920.000 : 100.000 = 19,2 \text{ km}$$

► Entre los dos pueblos hay 19,2 km.

- La escala sirve para representar superficies reales en un espacio pequeño.
- La escala 1:50.000 significa que una unidad del mapa equivale a 50.000 unidades en la realidad.

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p.120)

La Tabla 5.3 resume los principales objetos y procesos matemáticos identificados. No se encuentran argumentos explícitos en base a la relación de proporcionalidad que sustenta la escala, sino que los procedimientos se justifican a partir de la definición de ésta. La resolución de las situaciones propuestas al alumno involucra los procesos de conceptualización (generar definiciones para casos particulares de escala), representación-interpretación (interpretación y construcción de representaciones gráficas, conversión entre el lenguaje natural y la representación como razón), argumentación (explicar el significado de ciertas escalas), ejercitación y mecanización del cálculo de distancias representadas en un mapa o plano, distancias reales y escala en diferentes unidades de medidas.

Tabla 5.3

Objetos y procesos en C3

Objetos	Procesos
<i>Situaciones</i> iniciales, de ejercitación y aplicación en lectura e interpretación de escalas.	<i>Problematización:</i> resolución de problemas sobre obtención y aplicación de escalas.
<i>Lenguaje:</i> verbal, simbólico, icónico, gráfico.	<i>Representación:</i> uso de expresiones y representaciones, conversión de la representación como razón de escala al lenguaje verbal.
<i>Proposiciones:</i> $38,4 \times 50.000 = 1.920.000 \text{cm}$	<i>Enunciación:</i> de proposiciones “entre los dos pueblos hay 19,2 km”.
<i>Conceptos:</i> escala, medida, distancia.	<i>Conceptualización:</i> se define la escala 1:500000. <i>Particularización:</i> del concepto de escala a casos específicos.
<i>Argumentos:</i> no explícitos.	<i>Argumentación:</i> basada en la definición de escala “como la distancia en el mapa es de 38,4cm, en la realidad será...”
<i>Procedimientos:</i> multiplicar, dividir, conversión de unidades de medidas.	<i>Algoritmización:</i> fija una secuencia de pasos para determinar distancias reales a partir de distancias representadas en un mapa, según una escala dada; delimitar los pasos para interpretar y construir representaciones gráficas.

Principales conflictos detectados

El análisis ontosemiótico realizado previamente permite identificar discordancias que pueden ocasionar dificultades a los alumnos en el proceso de estudio previsto en la lección. A continuación, precisamos los conflictos epistémicos (relativos a los significados y objetos

institucionales puesto en juego en la lección) y cognitivos (conocimientos previos, progresión y grado de dificultad de las tareas) más importantes en cada configuración.

Conflictos epistémicos en C1

CE1.1. No se establece una definición clara y general de magnitudes proporcionales. La descripción se particulariza a los ejemplos introductorios.

CE1.2. No se considera la relación funcional $y=kx$, ni se introduce la constante de proporcionalidad. La única referencia al carácter general de la relación de proporcionalidad viene tímidamente establecida por el uso de puntos suspensivos en la representación tabular.

CE1.3. Puede ser confuso el uso de puntos suspensivos para indicar por un lado que la serie de números continúa en la representación tabular del ejemplo introductorio y posteriormente para representar el valor faltante en las situaciones.

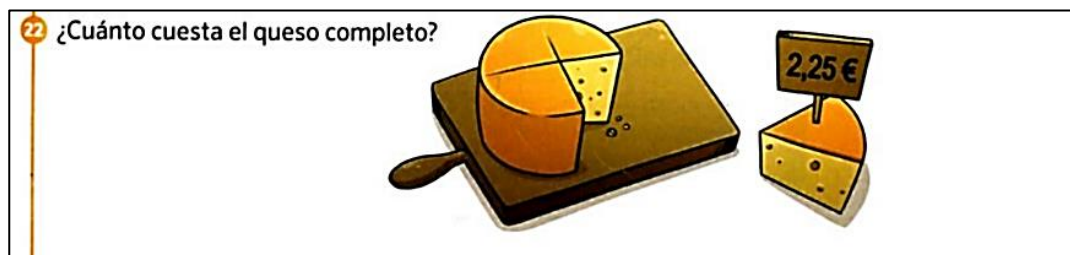
CE1.4. Los convenios de representación de la relación de proporcionalidad mediante una tabla bidimensional y los diagramas indicativos de la relación multiplicativa precisan explicación. El papel dado al registro tabular, puede llevar a pensar que la presencia de una tabla bidimensional supone la existencia de una relación de proporcionalidad.

CE1.5. Algunas proposiciones son imprecisas; al enunciar que “al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo”, el autor no indica el número por el que se deben multiplicar, que debe ser el mismo siempre, ni su significado: la constante de proporcionalidad (Figura 5.1).

CE1.6. Al no establecerse las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional, se deben asumir relaciones de proporcionalidad que no se especifican, como sucede en la tarea 22 (Figura 5.4) en la que debe aceptarse que “cada cuarto del queso cuesta lo mismo”.

Figura 5.4

Tarea 22 propuesta al alumno



Fuente. Tomada de González et al. (2015, p. 117)

CE1.7. La comprobación de la proporcionalidad entre dos magnitudes se limita a verificar la relación “entre filas y columnas” en una tabla, por lo que no se promueve la flexibilidad en los razonamientos ni la justificación en base a las propiedades que caracterizan la relación lineal.

Conflictos cognitivos en C1

CC1.1. No se vincula con conocimientos previos relativos a números racionales (fracciones, equivalencia de fracciones) ni a medida (magnitud, cantidad de magnitud).

CC1.2. Falta progresión en el grado de dificultad de las tareas.

Conflictos epistémicos en C2

CE2.1. No se justifican los procedimientos. El algoritmo de reducción a la unidad se asocia a la demediación (“dividimos entre dos, es decir, reducimos a la unidad”) y no se introduce el valor unitario. En el procedimiento de regla de tres, no se explica por qué se escriben en forma de fracción los pares de valores que se corresponden, por qué son iguales las fracciones, o por qué se resuelve multiplicando “los datos conocidos que están en cruz” (Figura 5.2). No se incluye la propiedad: “en una proporción el producto de medios es igual al producto de extremos”.

CE2.2. Se usa inadecuadamente el término “regla de tres” en lugar de proporción o fracciones equivalentes (Figura 5.5).

Figura 5.5

Tarea 26 propuesta al alumno

26 Calcula el valor del dato desconocido en estas reglas de tres.

$$\frac{2}{9} = \frac{10}{x?}$$
$$\frac{18}{24} = \frac{x?}{20}$$

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p. 119)

CE2.3. Es inadecuado el uso de expresiones como “tabla de equivalencia” (para la representación parcial de lo que había denominado tabla de proporcionalidad), “datos que están en cruz” o “número que no hemos utilizado aún” al presentar la regla de tres, sin referirse a los términos en una proporción, ni a numerador o denominador de fracciones equivalentes (Figura 5.2).

CE2.4. A pesar de que se hace notar que los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres son aplicables sólo si las magnitudes son proporcionales, no se analizan qué condiciones deben cumplirse para que el modelo de proporcionalidad directa sea aplicable (regularidad).

Conflictos cognitivos en C2

CC2.1. No reflexionar sobre el carácter proporcional o no de las situaciones puede desencadenar en el conflicto de ilusión de linealidad (Van Dooren et al., 2003), que supone a la tendencia por parte de los potenciales alumnos a utilizar modelos lineales en situaciones no pertinentes para su aplicación.

CC2.2. No se contemplan los conocimientos previos necesarios en el trabajo con fracciones. En las situaciones de aplicación los alumnos pueden encontrar dificultades en el proceso de conversión entre las representaciones involucradas (tabular y fraccionaria) que no han sido previamente explicadas.

CC2.3. Falta progresión en el nivel de dificultad de las tareas. En la situación inicial sólo se emplean números enteros mientras en las tareas a resolver se involucran decimales.

Conflictos epistémicos en C3

CE.3.1. El autor no incluye una definición general de escala, sino que la particulariza declarando “la escala 1:500000 significa que una unidad del mapa equivale a 50000 unidades en la realidad”.

CE3.2. La falta de conexión con la relación de proporcionalidad entre magnitudes impide justificar en base a ésta los procedimientos que involucran la aplicación de escalas.

CE3.3. Uso incorrecto del signo de igual al expresar el resultado de una operación aritmética como medida de cantidad de magnitud “ $38,4 \times 50.000 = 1.920.000 \text{ cm}$ ” (Figura 5.3).

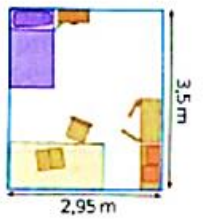
Conflictos cognitivos en C3

CC3.1. Se suponen conocidas las unidades de medida y las conversiones entre éstas y que el alumno conectará escalas con magnitudes.

CC3.2. Algunas tareas (Figura 5.6) pueden resultar de mayor dificultad al alumno debido a que implican un cambio en el orden de los datos del problema al cual no se ha enfrentado anteriormente (el autor sólo indica un ejemplo donde hallar la medida real conocida la escala y la medida en un mapa).

Figura 5.6

Situaciones 35 y 36 propuestas en C3

<p>35 De Sevilla a Huelva hay 93 km de distancia aproximadamente. Calcula cuál sería la medida que corresponde en cada caso.</p> <p>a) En un mapa de escala 1:10.000</p> <p>b) En un mapa de escala 1:25.000</p> <p>c) En un mapa de escala 1:50.000</p>	<p>36 Ariadna ha medido el largo y el ancho de su habitación de la casa nueva.</p>  <p>a) ¿A qué escala está dibujado el plano?</p> <p>b) ¿Cuáles son las medidas de la habitación en el plano?</p>
--	---

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p.121)

3.2.2. Análisis de la idoneidad didáctica de la lección

Incluimos a continuación el análisis de la idoneidad didáctica de la lección según las distintas facetas, componentes y subcomponentes, por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad. Prestamos especial atención a los componentes que muestran algún tipo de deficiencia o carencia en indicadores asociados, lo que da cuenta de posibles conflictos epistémicos, cognitivos o instruccionales.

Faceta epistémica

Situaciones-problemas. Para presentar cada una de las configuraciones el autor incluye una única situación inicial resuelta, que en todos los casos responde a un ejemplo particular, bien de magnitudes o de escalas, lo que impide concretar el desarrollo claro de los conceptos de magnitudes proporcionales, escala o de los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres.

Posteriormente propone situaciones de aplicación para los contenidos correspondientes, las cuales son poco diversas y representativas de los contenidos de proporcionalidad, ya que no se incluyen situaciones de comparación, o de ampliación/reducción de figuras, siendo la mayoría de valor faltante. La formulación de problemas recibe un tratamiento limitado, únicamente aparecen dos tareas en las que los estudiantes deben buscar ejemplos de magnitudes proporcionales y elaborar una tabla de proporcionalidad asociada.

Lenguaje. No se usan representaciones para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes, además algunas expresiones verbales y simbólicas son inadecuadas (“datos que están en cruz”, $1.920.000:100.000=19,2\text{km}$).

Por otro lado, no se fomenta el uso e interpretación de diferentes representaciones de la proporcionalidad: las configuraciones C1 y C2, se limitan al manejo, construcción y lectura de tablas de valores y las únicas representaciones gráficas o manipulativas se consideran en C3.

Conceptos. Los conceptos fundamentales de la proporcionalidad, entre ellos, proporción y magnitudes proporcionales, no se presentan de manera clara en ninguna de las configuraciones:

- En C1 la relación de proporcionalidad entre magnitudes se introduce por medio de dos magnitudes particulares que se relacionan de forma multiplicativa en una tabla de proporcionalidad. No se introduce el carácter lineal por medio de la relación funcional $y=kx$, ni el concepto de constante de proporcionalidad. Además, se confunden los conceptos de magnitud y cantidad de magnitud (ver Figura 5.1).
- En C2, la particularización “dividimos entre 2, es decir reducimos a la unidad”, puede suponer un potencial conflicto cognitivo (ver Figura 5.2), un eventual alumno puede interpretar el demediar como procedimiento equivalente a la reducción a la unidad.
- En C3 no existe una definición general del concepto de escala, sólo se hace referencia a casos particulares.

Proposiciones. En la lección no se incluyen las propiedades fundamentales de la relación de proporcionalidad, ni las condiciones que deben cumplir dos magnitudes para ser proporcionales. Tampoco se presentan de manera clara las condiciones necesarias y suficientes que permiten distinguir una situación proporcional. Concretamente en C1 sólo se indica en el ejemplo 2 “no tiene por qué ser el mismo cada hora” (ver Figura 5.1) lo que implica que el alumno interprete que existe cierta condición de invariancia que debe cumplirse para que la relación sea de proporcionalidad. Similarmente, en C2, se indica sólo a través de una nota que los procedimientos son aplicables si las magnitudes son proporcionales, pero no se especifican las condiciones que deben cumplirse. Esto puede suponer un conflicto si los alumnos deben asumir condiciones de regularidad que garanticen la proporcionalidad directa, cuando esta no está especificada. Por ejemplo, en la tarea 22, se debe asumir que “cada cuarto del queso cuesta lo mismo” (ver Figura 5.4).

Procedimientos. Los procedimientos presentados en la situación inicial en C1 se reducen a multiplicaciones y divisiones por números enteros, realizados de forma implícita en las representaciones (Figura 5.1). Los algoritmos de reducción a la unidad y regla de tres consisten en la aplicación de pasos mecanizados que no se argumentan ni explican de manera clara (Figura 5.2). En particular, la regla de tres se reduce a la traducción de “una manera dada” de los “datos” en una proporción, por medio de razones internas, sin justificar esta disposición y no otra.

Las situaciones propuestas en C1 y C2 son de aplicación de los procedimientos aritméticos por medio de tablas o por fracciones equivalentes, por lo que los alumnos no tienen oportunidad de negociar o generar por ellos mismos procedimientos.

Argumentos. Las proposiciones y procedimientos de la proporcionalidad no se explican ni argumentan adecuadamente. En concreto:

- En C1, la argumentación se basa en la existencia de una relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes expuesta en las representaciones: “si dos magnitudes son proporcionales, se relacionan en una tabla de proporcionalidad”. Sólo se argumenta de forma explícita al afirmar que el tiempo de un paseo y el número de semáforos vistos en ese paseo no son magnitudes proporcionales, ya que no existe una condición de regularidad (ver Figura 5.1).
- En C2, se acepta que “los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres solo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes”, pero no hay una justificación explícita. Tampoco se explica por qué se multiplica en cruz para resolver la ecuación proporcional que aparece en la regla de tres.
- En C3 los procedimientos se justifican a partir de la definición de escala sin contemplar la relación de proporcionalidad directa (ver Figura 5.3).

Relaciones. En la lección no existen relaciones claras con el tema de fracciones o de números decimales, ni se hace explícita la conexión con las magnitudes. Por otro lado, no se identifican, articulan o desarrollan los diversos enfoques de la proporcionalidad (sólo parcialmente se tratan el aritmético en C1 y C2, y el geométrico en C3).

Procesos. En la lección analizada no se plantean situaciones para que los alumnos generalicen o formulen y expliquen conjeturas que involucren la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. Tan solo dos tareas en las que los alumnos deben proponer ejemplos de magnitudes directamente proporcionales y otra en la que deben explicar el significado de ciertas escalas.

Faceta cognitiva

Conocimientos previos. El autor no refiere de modo explícito a conocimientos previos necesarios (equivalencia de fracciones, medida y cantidades de magnitud); sólo se incluye una breve nota en C1 referida a la definición de magnitud. Si bien el nivel de dificultad de los contenidos es adecuado, observamos una falta de progresión en el grado de dificultad de las tareas. Por ejemplo, las situaciones introductorias en las configuraciones C1 y C2 sólo emplean números enteros, mientras que algunas de las tareas propuestas después al alumno involucran decimales; la tarea 29 en C2 (Figura 5.7) involucra más de dos magnitudes en la misma situación (aspecto que no se contempla en el resto de las tareas propuestas), similarmente, las tareas 35 y 36 (Figura 5. 6) pueden resultar más difíciles.

Diferencias individuales. No se incluyen actividades de ampliación (modelización con la función lineal) o refuerzo, además de no promoverse el uso flexible de diversas estrategias correctas para resolver las situaciones de proporcionalidad.

Figura 5.7


Problemas propuestos en C2

Francisco quiere preparar lentejas para 12 personas según esta receta que ha encontrado.

- ¿Qué cantidad de lentejas necesita?
- Escribe la receta con las cantidades necesarias de cada ingrediente para 12 personas.
- El coste de los ingredientes para 8 personas es de 15,50 € aproximadamente. ¿Cuánto costarán los ingredientes para 12 personas?

Lentejas para 8 personas

- medio kilo de lentejas
- 1 cebolla
- 2 dientes de ajo
- 1 patata
- 200 g de chorizo
- 25 g de aceite
- 1 puerro



Fuente: Tomada de González et al. (2015, p.119)

Faceta afectiva

Actitudes. Las carencias encontradas en el aspecto actitudinal tienen que ver con que las tareas propuestas no fomentan la flexibilidad para explorar ideas matemáticas o estrategias de resolución en las situaciones de proporcionalidad.

Emociones. No se emplean situaciones humorísticas, curiosidades, poesías o adivinanzas con las que despertar el interés o las emociones positivas, tampoco se promueven los razonamientos lógicos, las ideas originales, el trabajo útil, práctico o realista en relación con la proporcionalidad, siendo este un contenido de especial importancia en la vida cotidiana.

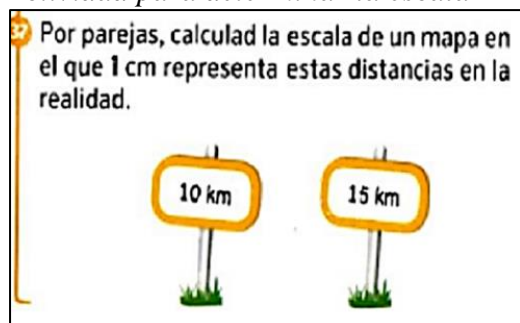
Creencias. No se analizan ni consideran las creencias sobre la materia, su enseñanza o aprendizaje.

Faceta instruccional (interaccional-mediacional)

Interacción. La presentación que hace el autor de la lección no es del todo adecuada, dado que no se presta la atención suficiente a conceptos clave y algunos enunciados de las situaciones son incompletos o confusos. Por ejemplo, como hemos observado, en C1 (Figura 5.1) no se explica por qué “al multiplicar [por 2 indicado de manera diagramática] los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo”, ni cuál es el significado de dicha constante (la constante de proporcionalidad) en la situación descrita. Por otro lado, algunos enunciados de las tareas son confusos. También, la actividad 37 en C3 (Figura 5.8) es confusa, dado que solicita la escala de un mapa en el que 1 cm representa dos distancias distintas.

Figura 5.8

Actividad para determinar la escala



Fuente. Tomada de González et al. (2015, p.121)

La poca diversidad de recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos es otra deficiencia que detectamos. Además, las interacciones discentes se promueven de forma muy limitada al proponer únicamente dos ejercicios para realizar en parejas (sólo las tareas 27 y 37), donde además no se solicita una argumentación que fomente el diálogo, comunicación o debate de ideas.

Autonomía. El proceso de estudio planificado por medio de la lección prevé escasos momentos donde los alumnos puedan asumir la responsabilidad del estudio, planteen cuestiones y presenten soluciones, exploren contraejemplos, investiguen o conjeturen.

Recursos. El uso de recursos materiales aparece de forma muy limitada. Aunque en C1 se incentiva al uso de recursos informáticos (smSaviadigital.com), no se promueve el uso de materiales como el escalímetro, el pantógrafo o el compás de proporción, los cuales son característicos del tema de proporcionalidad.

Secuenciación. La secuenciación de contenidos y actividades no se considera adecuada. Los métodos de reducción a la unidad y regla de tres se introducen en C2 sin haber permitido previamente el uso de estrategias intuitivas, informales, basadas en las relaciones dentro y entre magnitudes proporcionales. Además, se sigue siempre la misma estructura para presentar los contenidos, esto es, se comienza con una explicación de tipo procedimental basada en ejemplos sin establecer las definiciones más relevantes, y posteriormente se presentan actividades para

el alumno. El espacio dedicado a todas las configuraciones es el mismo sin dedicar más atención a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Faceta ecológica

Adaptación al currículo. No se promueve que el alumno lleve a cabo explicaciones orales o escritas al resolver las tareas ni se plantean situaciones que permitan la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva, como recomiendan las directrices curriculares (MECD, 2014a).

Apertura a la innovación. No se promueve lo suficiente la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva; el uso de una página web, el planteamiento y resolución de problemas, son aspectos que se consideran de manera limitada.

Educación en valores. Aunque se proponen tareas para trabajar en parejas, no se contemplan espacios para que el alumno pueda plantear cuestiones que desarrollen su pensamiento crítico, ni la formación en valores.

Conexiones intra e interdisciplinares. Existen escasas conexiones intra e interdisciplinares, limitadas a relaciones puntuales con geometría, medidas y conceptos físicos como la velocidad.

4. Resultados

En esta sección presentamos los resultados de la evaluación de los informes que han entregado los participantes al responder a la secuencia de tareas propuestas. Por ello, en primer lugar, presentamos los resultados del análisis didáctico (identificación de prácticas, objetos y procesos, así como de conflictos epistémicos y cognitivos) (tarea 1). En segundo lugar, analizamos las respuestas dadas por los futuros maestros al aplicar la GALT-proporcionalidad para valorar la idoneidad didáctica de la lección (tareas 2 y 3). En tercer lugar, presentamos el análisis de los juicios razonados en cada una de las facetas (tarea 4). Por último, mostramos los

resultados de la valoración de las respuestas de los futuros maestros sobre la gestión de uso del libro y los cambios que proponen para resolver conflictos detectados (tarea 5).

4.1. Análisis didáctico de la lección realizado por los futuros maestros

Esta sección incluye los resultados de la valoración del análisis didáctico que han realizado los futuros maestros de primaria. Para responder a las cuestiones de investigación, analizamos en primer lugar la identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos y, en segundo lugar, los conflictos semióticos descritos por los participantes.

4.1.1. Análisis ontosemiótico de las configuraciones didácticas

El análisis de contenido de los informes muestra que, en general, los participantes hacen un reconocimiento adecuado de las prácticas matemáticas, si bien prestan más atención a las prácticas de tipo operacional que a las de tipo discursivo. En C2 y C3, nueve equipos identifican correctamente todas las prácticas y de estos, cuatro equipos también lo hacen en C1. En esta configuración, la práctica identificada mayormente (por once equipos) es la P1.2 (construcción de una tabla de proporcionalidad para la situación inicial) y la menos identificada (sólo 4 equipos) es la P1.3 (justificación de la no proporcionalidad entre magnitudes en base a que no se relacionan por medio de una tabla de proporcionalidad). En C2 la práctica más reconocida (por 12 equipos) es la P2.1 (descripción de pasos de la reducción a la unidad) y la menos identificada la P2.3 (explicitación del valor faltante).

Después de identificar las prácticas, los participantes debían indicar los objetos implicados en las mismas (ver Figura 5.9). En general, los futuros maestros describen adecuadamente las distintas situaciones-problema de la lección (tanto las de iniciación, como las propuestas para ejercitación o aplicación), la mayoría de los lenguajes, conceptos y procedimientos. Sin embargo, ningún equipo mencionó proposiciones o argumentos (ni explícitos ni implícitos) en las configuraciones.

(11 equipos), el concepto de escala (12 equipos), el procedimiento de conversión de unidades (8 equipos) y la representación gráfica (12 equipos). Sin embargo, sólo dos equipos mencionaron la representación simbólica como objeto lingüístico.

En las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos emergen y se relacionan a través de procesos que se espera que los futuros docentes también puedan reconocer. En general, se observa que aquellos equipos que hicieron una mejor identificación de los objetos también fueron los que reconocieron de manera pertinente una mayor variedad de procesos (según los descritos en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3). Entre los procesos que identifican principalmente los futuros maestros se incluyen:

- *Conceptualización.* Doce equipos indican en C1, como EFM^I7 la presencia de “conceptualización: la configuración tiene por objetivo presentar una definición de magnitudes directamente proporcionales y no proporcionales, utilizando un ejemplo”, y otros diez en C3, de manera similar a EFM^I6 “conceptualización: el capítulo tiene como objetivo presentar una definición clara de escala y de la proporcionalidad de la escala 1:50.000 con el mapa y la realidad”.
- *Representación-Interpretación.* Todos los equipos mencionan este proceso en las configuraciones C1 y C2 y siete lo hacen en C3. Consideran frecuentemente la “elaboración de tablas de proporcionalidad” o la “conversión del lenguaje natural al tabular y conversión de la tabla de proporcionalidad a equivalencia de fracciones” (EFM^I4).
- *Algoritmización.* Por ejemplo, siete equipos la mencionan en C1, como EFM^I10:

Se fija un tipo de regla para obtener datos de una tabla que sean proporcionales, multiplicar el de arriba o dividir el de abajo, siempre por el mismo número, para que

sea proporcional, como viene dado en el ejemplo de la bicicleta, con las horas y los euros.

Doce equipos lo indican en C2, apreciando como EFM¹⁷, “algoritmización: regulación de los pasos que componen el algoritmo de la regla de tres y la reducción a la unidad”.

Recordemos al respecto que los participantes reconocieron con frecuencia el registro tabular como objeto matemático y la reducción a la unidad y regla de tres como procedimientos. Los procesos matemáticos más olvidados en el análisis fueron los de *problematización*, *argumentación* y *particularización*. Sólo tres equipos mencionan la problematización en C1 y dos en C2 (“la actividad 27 es en parejas, en la cual hay que seguir las tres indicaciones que se dan e inventar y resolver una actividad relacionada con la proporcionalidad”, EFM¹³). La *argumentación* sólo aparece mencionada en C1 (cinco equipos). Al respecto notemos que ningún equipo identificó los argumentos empleados de manera implícita o explícita en la lección. Así, cuando algún equipo refiere a la argumentación como proceso matemático, señala cierta explicación o justificación por parte del autor, pero no especifica el argumento empleado. Los equipos que indican la *particularización* (entre dos y cuatro en cada configuración) aclaran de manera similar a EFM¹¹ que “la regla general se ejemplifica con un caso concreto al inicio de la configuración”. Por otro lado, nueve equipos identifican el proceso de *generalización* en la configuración C1. Lo hacen en el sentido de EFM¹⁷, que establece que “el carácter general de la relación funcional $y=kx$ se evoca mediante puntos suspensivos” o como EFM⁴: “la interpretación de la tabla de proporcionalidad conlleva un proceso de generalización de la relación de proporcionalidad, es decir, un aumento multiplicativo en una de las filas se corresponde con el mismo aumento multiplicativo en la otra”.

Así pues, se puede concluir que, en general, los futuros maestros han tenido más éxito en la identificación de las prácticas matemáticas que en el reconocimiento de objetos y de procesos. La menor pertinencia en la identificación de los objetos y procesos matemáticos

asociados justificaría que reconociesen de manera limitada los conflictos epistémicos y cognitivos en la lección.

4.1.2. Identificación de conflictos semióticos

El análisis de los informes de los futuros maestros muestra que gran parte de los conflictos identificados en el análisis a priori por el equipo investigador, pasaron inadvertidos para los participantes. Sin embargo, debemos mencionar que los participantes describieron algunos de los conflictos epistémicos y cognitivos más importantes en las distintas configuraciones.

En el aspecto epistémico los conflictos más frecuentemente mencionados (por 11 equipos) refieren a la falta de definiciones claras de conceptos esenciales en C1 como los de magnitudes proporcionales y constante de proporcionalidad (CE1.1, CE1.2). Por ejemplo, EFM¹⁸ indica: “se da por conocida la definición de magnitudes proporcionales, magnitudes no proporcionales... No se hace explícito que la razón entre las cantidades que se corresponden debe ser siempre la misma: constante de proporcionalidad”. Además, cuatro equipos indican la falta de especificación de las condiciones que garantizan la proporcionalidad en las tareas propuestas (CE1.6). Por ejemplo, EFM¹⁷ indica en relación con la actividad 22 (Figura 5.4) que “el alumno debe suponer por sí solo que las cuatro porciones en las que se ha dividido el queso son proporcionales, es decir, tienen el mismo tamaño y por lo tanto el mismo precio” (no explicitación de la condición de regularidad).

Cinco equipos reconocen adecuadamente la ausencia o inexactitud de explicaciones y argumentaciones claras sobre los procedimientos (CE1.7):

no se razona la relación entre magnitudes ni el procedimiento, por lo que no existe justificación. Tampoco se da explicación del porqué del proceso de multiplicación o división dentro de la tabla, es un proceso mecanizado. En el último problema se expone la respuesta, pero tampoco se da la explicación del por qué eso es así (EFM¹³).

Sólo EFM¹⁷ y EFM¹⁰ indican además la poca pertinencia del lenguaje, ambigüedad de las proposiciones y falta de conexión con el bloque de aritmética y de magnitudes. En la configuración C2, destinada a introducir y explicar los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres, diez equipos indican la falta de justificación sobre dichos procedimientos (CE2.1). De manera similar a EFM³, mencionan que:

se comparan dos procesos [procedimientos] distintos, regla de 3 y reducción a la unidad, del mismo ejemplo, sin justificación del por qué se pueden llevar ambos procesos, pudiendo llevar al alumnado a confusión en cuanto a que ambos procedimientos siempre sean aplicables.

EFM⁷ es bastante preciso al señalar que “la expresión dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad, puede dar a entender al alumno que para reducir a la unidad siempre se divide entre 2”, y que “se asocia incorrectamente el término de regla de tres a una ecuación proporcional en la tarea 26” (Figura 5.5) (CE2.2). Además, cinco equipos indican la carencia de explicación en el tratamiento y conversión entre las representaciones empleadas y la poca pertinencia de algunas de estas (CE2.3).

Únicamente cinco equipos han indicado conflictos epistémicos en C3; tres de ellos señalan la falta de representatividad en las situaciones propuestas y dos indican que la definición de escala no es adecuada porque se particulariza a un caso específico (CE3.1).

Por otro lado, aunque la identificación de los conflictos cognitivos que hacen los participantes no es pertinente, la mayoría de los equipos mencionan algún tipo de desajuste de este tipo en las diferentes configuraciones. Así, once equipos han considerado que no se conectan o recuerdan conocimientos previos relativos a fracciones, números racionales o medida (CC1.1) en C1, seis equipos apuntan que los alumnos pueden tener dificultades en el trabajo con fracciones y en las conversiones entre el registro tabular y la representación fraccionaria (CC2.1) y trece equipos indican en C3 que se suponen conocidas las unidades de

medida o las conversiones entre éstas y que se asume que el alumno, sin recuerdo adicional, conectará escalas con magnitudes (CC3.1).

Con relación al nivel de dificultad de algunos contenidos, tres equipos comentan que la ausencia de relaciones de divisibilidad entre los términos o bien el empleo de números no enteros pueden suponer una dificultad al alumno (CC1.2), aspecto ampliamente confirmado en estudios relacionados con la proporcionalidad (Lamon, 2007; Karplus et al., 1983). Por ejemplo, para EFM¹⁴ puede que “en algunos problemas como los de la segunda página sea difícil llegar a la reducción de la unidad... algunas cantidades no son múltiplos”. Además, EFM¹³ y EFM¹⁰ indican que no se fomentan diversas estrategias de solución (“el uso de las tablas de proporcionalidad es la única estrategia ofrecida y en la mayoría de los ejercicios pide trabajar con las tablas evitando descubrir otras estrategias”, EFM¹⁰).

Para valorar cómo repercute el análisis de prácticas, objetos y procesos en el reconocimiento de conflictos epistémicos y cognitivos potenciales presentes en el proceso instruccional planificado en la lección, observamos por un lado que los equipos que identificaron de forma más apropiada los objetos en toda la lección fueron EFM⁵, EFM⁷ y EFM¹³ (identificaron correctamente varios objetos de la mayoría de los tipos en las tres configuraciones). Por otro lado, aquellos que globalmente reconocieron y describieron los procesos en toda la lección de forma más pertinente fueron EFM⁵, EFM⁷ y EFM¹⁰. Además, los equipos EFM⁷ y EFM¹⁰ fueron junto a EFM¹³, aquellos que tuvieron mayor éxito en la identificación de conflictos epistémicos (siendo EFM⁷ y EFM¹⁰ los que locamente mejor lo hicieron en C1 y C2). Así parece deducirse cierta relación entre el grado de éxito en la identificación de procesos y de conflictos epistémicos. Sin embargo, con relación a los conflictos cognitivos, los equipos que realizaron un mejor análisis de éstos (EFM⁹, EFM¹¹, EFM¹⁴) realizaron una identificación de objetos adecuada (varios objetos de todos los tipos en C1, pero sólo alguno de cada tipo en C2 y C3), aunque no así de procesos.

4.2. Aplicación de la GALT-proporcionalidad por los futuros maestros

En este apartado se presentan los resultados de la evaluación de los informes de los futuros maestros sobre la aplicación de la GALT-proporcionalidad para analizar la lección en cada una de las facetas (respuestas a la tarea 1 y 2). Centramos la atención en las dificultades que manifiestan y el tipo de observación que realizan, destacando aquellos indicadores¹¹ en los que la diferencia de valoración respecto a la del equipo investigador es significativa (si difiere la valoración experta con la mayoría de los equipos) y puede suponer una gestión inadecuada del recurso por parte de los futuros docentes. En el instrumento de evaluación entregado a los participantes, se incorporó a las tablas de la GALT-proporcionalidad, una columna junto a los indicadores en la que debían incluir su observación sobre el grado de cumplimiento de cada indicador (ver Anexo 1.1). El contraste con el análisis a priori permite determinar el grado de pertinencia de sus valoraciones sobre la idoneidad en cada faceta.

Para describir el tipo de observaciones que realizan los futuros maestros al aplicar la guía de análisis y evaluar el nivel de pertinencia y dificultades que han podido tener en la valoración de la idoneidad didáctica, se atiende a:

- a) Si los participantes asignan correctamente el nivel de cumplimiento de cada indicador: total (en cuyo caso emplean expresiones del tipo “sí, ...”, “siempre,...” o realizan transcripciones casi literales del indicador), parcial (indican aspectos que si se cumplen y otros que no del indicador, empleando expresiones del tipo “a veces,...”, “algunos,...”, “en parte...”) o nulo (usan expresiones del tipo “no,...”, “nunca,...” o niegan el indicador).
- b) Si justifican correctamente su valoración.

¹¹ Incluimos referencia a la numeración de los indicadores (I1, I2, ...) según se encuentra en el instrumento GALT-proporcionalidad.

Para ello, se define la variable cualitativa *grado de pertinencia*, que toma tres posibles valores a los que asignamos 2, 1 y 0 puntos, respectivamente:

- *Valoración pertinente*, si asigna y justifica correctamente el nivel de cumplimiento del indicador.
- *Valoración poco pertinente*, cuando asigna correctamente el nivel de cumplimiento al indicador, pero no justifica o lo hace de modo inadecuado; o bien si hace observaciones adecuadas al valorar el indicador a pesar de no asignar correctamente el nivel de cumplimiento.
- *Valoración nada pertinente*, si no asigna correctamente el nivel de cumplimiento al indicador y no ofrece especificaciones adecuadas al respecto.

Por ejemplo, al valorar I2 “Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) contextualizadas y de aplicación”, podemos clasificar como pertinente la respuesta de EFM^{I7} al indicar en relación con C1 que

en cuanto a la diversidad y representatividad de las tareas para aplicar los contenidos, encontramos 7 situaciones-problemas estando 6 de ellas contextualizadas (2 de ellas son tabulares y una aritmética). Sólo 2 de ellas requieren indicar si las magnitudes son o no directamente proporcionales. No se emplean tareas de comparación.

Dicho equipo justifica de forma adecuada que el indicador se cumple parcialmente, dado que como se observó en el análisis a priori la mayoría de las tareas (Figura 5.10) son de valor faltante, algunas tabulares y no incluyen tareas de comparación, por lo que no son suficientemente representativas de los diferentes significados de la proporcionalidad (Aroza et al. 2016).

Se considera poco pertinente la respuesta de EFM^{I3} “algunos (minoría)” ya que sólo considera el nivel de cumplimiento parcial del indicador, pero no argumenta su valoración. También la de EFM^{I8} que indica “sí, se emplean tablas bidimensionales y operaciones de valor

faltante que permiten entender y elaborar los contenidos”, en la que, a pesar de considerar de forma incorrecta que el indicador se cumple totalmente, especifica el tipo de situaciones que se incluyen en la lección. Finalmente, valoramos como nada pertinente la respuesta de EFM¹¹ al señalar que “sí, a través de diferentes ejemplos explicativos y diferentes para su desarrollo”. En este caso además de indicar incorrectamente que se cumple el indicador, las especificaciones no son adecuadas.

Figura 5.10

Situaciones de aplicación en C1

17 ¿Cuáles de estas magnitudes son proporcionales?

litros de leche comprados	precio total
edad de una persona	altura de la persona
número de espectadores	cantidad de entradas vendidas
velocidad de un tren	número de pasajeros

18 Indica en qué caso las magnitudes no son proporcionales.

peso (kg)	5	10	15	20
precio (€)	4	8	12	16

peso (kg)	10	16	21	26
edad (años)	2	4	6	8

19 Copia y completa estas tablas de proporcionalidad.

a)

n.º de gafas	1	2	...	4	5	6	...
n.º de cristales	...	4	6	14

b)

n.º de arañas	...	10	25	30	35
n.º de patas	...	80	120	160	200

¿Cómo se relacionan las filas de cada una de las tablas?

20 Halla el valor que falta en cada tabla para que correspondan a dos magnitudes proporcionales.

2	6
4	...

1	100
8	...


30	60
5	...

12	18
4	...

21 Encuentra un ejemplo de dos magnitudes proporcionales y construye la tabla de proporcionalidad.

Problemas:

1 ¿Cuánto cuesta el queso completo?




2 Lee la nota que ha escrito esta niña y responde junto con un compañero.

a) ¿Qué dos magnitudes se mencionan?

b) Si son magnitudes proporcionales, ¿qué distancia recorre Cayetana en 12 días?

c) Completad una tabla de proporcionalidad para representar lo que corre Cayetana en el mes de abril.

d) ¿Cuánto recorre en total en ese mes?



Fuente. Tomada de González et al. (2015, p.116-117)

4.2.1 Idoneidad epistémica

De manera general, los participantes tuvieron dificultades para valorar adecuadamente la idoneidad epistémica de la lección: en 21 de los 28 indicadores que conforman la GALT-proporcionalidad en esta faceta la mayoría de los equipos (más de 9 en todos ellos) hicieron una valoración nada pertinente.

Tabla 5.4

Frecuencia de equipos según el nivel de pertinencia en la valoración de los indicadores de la GALT-proporcionalidad para cada componente de la faceta epistémica

Componentes	Nivel de pertinencia en la valoración		
	Nada pertinente	Poco pertinente	Pertinente
Situaciones-problema	6	7	0
Lenguajes	1	10	2
Conceptos	10	3	0
Proposiciones	12	1	0
Procedimientos	12	1	0
Argumentos	5	1	7
Relaciones	8	5	0
Procesos	4	6	3
Conflictos epistémicos	2	11	0

En la Tabla 5.4 se resumen los resultados obtenidos por los participantes en la valoración de los indicadores, según los componentes de la faceta epistémica en la GALT-proporcionalidad¹². A continuación, damos más detalle sobre las valoraciones más significativas de sus indicadores.

Los futuros maestros debían analizar el contenido matemático, estudiando en primer lugar, las situaciones-problemas. La propuesta instruccional del autor del libro de texto es similar para todas las configuraciones: parte de una situación inicial para introducir cada contenido y posteriormente plantea tareas que el alumno debe resolver. Por ejemplo, en la Figura 5.1 se observa el modo en que el autor presenta las magnitudes proporcionales (C1). Sólo se incluye una situación para introducir las magnitudes directamente proporcionales desde el enfoque aritmético, sin tratar el intuitivo, geométrico o funcional (Aroza et al., 2016). La mayoría de las tareas propuestas a continuación para que el alumno ejercite y aplique la relación de proporcionalidad son de valor faltante (Figura 5.10). Además, ninguna permite *diferenciar las comparaciones aditivas de las multiplicativas* (I3), por lo que el grado de cumplimiento de dicho indicador es nulo.

¹² Para simplificar la exposición, cuando en una componente se incluyen varios indicadores, en lugar de mostrar el resultado obtenido en cada indicador de esta se considera su promedio.

En cambio, la mayoría de los equipos hacen valoraciones poco pertinentes al respecto, bien porque no justifican su valoración, o bien porque no interpretan correctamente los términos situaciones aditivas y multiplicativas en el contexto de la proporcionalidad. Por ejemplo, EFM¹⁸ señala “sí, [se cumple el indicador] ya que los problemas se pueden realizar de diferentes formas, tanto sumando como multiplicando”, interpretando situación aditiva y multiplicativa como aquellas que se resuelve con una operación de suma y multiplicación, respectivamente.

Como señalan diversos autores (Lamon, 2007; Shield y Dole, 2013) el *uso simultáneo y coordinado de razones internas y externas* (I5) es importante en la enseñanza de la proporcionalidad, no obstante, en el texto no se observa un tratamiento adecuado. Así, aunque en C1 (Figura 5.1) se usan ambos tipos de razones, no se hace de modo explícito: las razones externas se usan al establecer mediante flechas, la relación entre el tiempo de aparcamiento y el precio, y las razones internas al establecer la relación multiplicativa “ $\times 3$ ” que vincula cantidades de la misma magnitud (hora-hora, precio-precio). Además, como se observa en la Figura 5.2, en C2 sólo se utilizan razones internas al explicar el procedimiento de regla de tres cuando sería importante emplear también las externas para relacionar las magnitudes y observar la posibilidad de establecer distintas proporciones equivalentes. La mayoría de los equipos obviaron estos aspectos, lo que los llevó a realizar valoraciones nada pertinentes en relación con dicho indicador (I5). El análisis de sus respuestas puso de manifiesto una falta de comprensión de los términos razones internas y externas que pudo influir en la correcta interpretación y valoración del indicador. Por ejemplo, EFM¹² indica "en casi todas las configuraciones las razones son externas ya que realizan problemas de la vida cotidiana".

Esta falta de comprensión con relación a las razones internas y externas y la diferencia entre relaciones multiplicativas dentro y entre magnitudes se observa también en la valoración del lenguaje matemático empleado en la lección. En este caso, es significativo que la mayoría

de los participantes consideran incorrectamente que *se emplean representaciones adecuadas para distinguir relaciones multiplicativas dentro y entre las cantidades de magnitudes* (I11).

Mencionemos que, en relación con el lenguaje, 11 de los equipos valoraron de manera pertinente la adecuación del nivel del lenguaje al nivel educativo.

En cuanto a los conceptos matemáticos, el análisis a priori mostró como conflictos principales la particularización de las definiciones a casos específicos de magnitudes (C1, Figura 5.1) y escalas (C3, Figura 5.3), la ausencia de conceptos fundamentales como, por ejemplo, la constante de proporcionalidad, y que no se define de manera clara la relación funcional entre magnitudes proporcionales (esta sólo se establece a partir de las tablas). Sin embargo, la mayoría de los participantes consideraron que estos indicadores en relación con los conceptos se cumplen totalmente. Por ejemplo, EFM¹⁴ afirma que *se presentan de manera clara los conceptos fundamentales* (I12) al indicar que “en las tres configuraciones que aparecen en la práctica todas explican los distintos conceptos de una manera correcta, explicándolo todo con ejemplo y además en algunos casos añadiendo definiciones sobre algunos términos como por ejemplo magnitud proporcional”.

Ningún equipo realizó observaciones pertinentes a la hora de valorar el grado de cumplimiento de los indicadores asociados al componente proposiciones, obviando que la lección no incluye enunciados para caracterizar y distinguir la relación de proporcionalidad o que no se precisa la condición de regularidad, siendo esta “la condición indispensable que debe darse para que la razón pueda calcularse” (Gairín y Oller, 2012, p.259). Por ejemplo, EFM¹ considera que “las proposiciones del tema de proporcionalidad se presentan de forma clara para el nivel educativo al se corresponde” (I15), también EFM⁶ indica que “si se establecen las suficientes proposiciones para distinguir una situación proporcional” (I16) (Figura 5.1).

En cuanto a los procedimientos matemáticos, nueve equipos valoraron de modo nada pertinente los indicadores asociados, considerando el cumplimiento total de los mismos.

Aunque el análisis a priori mostró que la reducción a la unidad y regla de tres se reducen a la aplicación de pasos mecanizados sin discutir su pertinencia (Figura 5.2) y que las situaciones no permiten generar o negociar procedimientos (todas las tareas propuestas son de aplicación de procedimientos aritméticos por medio de tablas o equivalencia de fracciones), los futuros maestros valoraron de modo similar a EFM¹⁴ que “a través de los problemas, se explica de forma minuciosa los procedimientos básicos” (en relación a I18) y a EFM¹⁶ que “en todas las configuraciones los alumnos deben realizar ejercicios donde realicen y generen procedimientos relacionados con la proporcionalidad” (sobre I19). Sin embargo, si hicieron una mejor valoración del componente argumentos, identificando correctamente de manera mayoritaria (7 equipos) que las proposiciones no se justifica y que la fundamentación de los procedimientos se basa en las operaciones aritméticas empleadas.

Respecto al componente relaciones, observamos que 10 de los equipos consideran que los indicadores asociados se cumplen de manera total en las tres configuraciones. Se basan en la inclusión de ejercicios que tratan las fracciones y números decimales, como condición para garantizar la *conexión con los números racionales* (I22) y la presencia de unidades de medida como garantía para *relacionar el bloque aritmético con el de magnitudes* (I23). Por último, aunque la mayoría de los equipos coinciden con nuestro juicio en cuanto a que no *se identifican los diferentes enfoques de la proporcionalidad en la lección* (I24), únicamente, dos equipos indican correctamente que sólo aparece involucrado el significado aritmético en C1. Este hecho, junto con la presencia de argumentos incorrectos como el de EFM¹⁰ al indicar “Aritmético: la multiplicación - Algebraico: Calcular el valor faltante se puede interpretar como la (x) que hay que calcular”, sugiere nuevamente dificultades de los participantes para identificar y diferenciar los significados de la proporcionalidad y sus características.

Finalmente, los futuros maestros debían valorar la presencia de *errores en el contenido matemático* (I28). Aunque, en general, sus apreciaciones son poco específicas, podemos

identificar las siguientes carencias reconocidos correctamente por los participantes (al menos por tres equipos cada uno): falta de claridad al definir magnitudes proporcionales, la presentación de los conceptos se limita a ejemplos; ausencia de proposiciones y explicaciones que acompañen la regla de tres y reducción a la unidad (Figura 5.2); ambigüedad en los enunciados de las tareas y poca argumentación.

Los resultados obtenidos muestran que el conocimiento didáctico-matemático en la dimensión epistémica de los participantes sobre razón, proporción y relación de proporcionalidad, es limitado, lo que ha dificultado la interpretación correcta de los indicadores y el análisis de la lección por medio de la GALT-proporcionalidad en esta faceta.

4.2.2 *Idoneidad cognitiva*

En la Tabla 5.5 se muestra el nivel de pertinencia de las valoraciones de los indicadores de la GALT-proporcionalidad, según los componentes de la faceta cognitiva. A continuación, damos más detalle sobre las valoraciones de algunos de sus indicadores.

Tabla 5.5

Frecuencia de equipos según el nivel de pertinencia en la valoración de los indicadores de la GALT-proporcionalidad para cada componente de la faceta cognitiva

Componentes	Nivel de pertinencia en la valoración		
	Nada pertinente	Poco pertinente	Pertinente
Conocimientos previos	12	1	0
Diferencias individuales	1	4	8
Conflictos cognitivos	3	5	5

La valoración de los indicadores asociados al componente *conocimientos previos* (I29) fue no pertinente en 12 equipos que consideraron que éstos quedan totalmente contemplados en la lección y que todos *los contenidos tienen una dificultad manejable* (I30). Sólo EFM¹10 indica que “se da por entendido el sistema internacional de medida y sus conversiones”. Los participantes asumieron que los conocimientos previos se cubren cuando son contenidos presentes en las tareas propuestas. Por ejemplo, EFM¹1 indicó “si se contemplan en los ejercicios”. Por otro lado, no reflexionaron sobre la importancia de tratar la proporcionalidad

“entre magnitudes”, lo que los llevó a ignorar como conocimientos previos necesarios las nociones de magnitudes, cantidades de magnitud y su medida.

Los futuros maestros muestran limitaciones para reconocer los factores que influyen en el nivel de complejidad de las tareas y en emplearlos como argumento para justificar la diferencia de dificultad de los problemas. Así todos los equipos asignan un grado total de cumplimiento al indicador *los contenidos poseen un nivel de dificultad manejable* (I30), sin analizar cómo se ven reflejados en la lección los posibles factores que influyen en el nivel de dificultad de los problemas (relación entre los números, posición del valor faltante, cantidades discretas o continuas...). Al respecto, la revisión de las tareas llevó al equipo investigador a considerar que este indicador se cumple sólo de forma parcial, dado que el autor emplea únicamente números enteros en los ejemplos, mientras que algunas de las tareas de aplicación involucran decimales o razones no enteras, lo que supone un nivel de dificultad mayor (Fernández y Llinares, 2011). Asimismo, la valoración de la mayoría de los equipos con relación a si *las situaciones poseen diferentes niveles de dificultad* (I33), fue poco pertinente dado que, si bien consideran correctamente que el cumplimiento es total (en efecto, se observan valores enteros, no enteros y con diferentes relaciones de divisibilidad, cambio en el orden de los datos en los problemas, que determinan un menor o mayor grado de complejidad de las tareas) no justifican correctamente su valoración.

Estas limitaciones para identificar los elementos potencialmente conflictivos o aquellos que pueden suponer una mayor demanda cognitiva por parte de los estudiantes, se observa también al establecer el juicio razonado de la idoneidad de la lección, donde siete equipos señalan de modo incorrecto que el nivel de dificultad es similar en todas las situaciones. No obstante, la mayoría (8 equipos) sí reconocieron de manera pertinente que la lección no *ofrece diversas estrategias de resolución* (I32) y que los procedimientos se basan en pasos mecanizados, lo que impide el acceso y apoyo de todos los estudiantes, así como que no se

suele advertir de errores y dificultades conceptuales y procedimentales (I34) (sólo se avisa en una nota en C2 que las magnitudes deben ser proporcionales para poder aplicar la regla de tres y la reducción a la unidad).

4.2.3 Idoneidad instruccional, ecológica y afectiva

Después de analizar la lección, con relación al contenido matemático y el aprendizaje de los estudiantes, los futuros maestros debían reflexionar sobre el grado de adecuación de esta desde el punto de vista instruccional, ecológico y afectivo contemplándola en su conjunto. En la Tabla 5.6 aparecen los resultados obtenidos por los participantes en las valoraciones de las distintas componentes de la faceta instruccional usando la GALT-proporcionalidad.

Tabla 5.6

Frecuencia de equipos según el nivel de pertinencia en la valoración de los indicadores de la GALT-proporcionalidad para cada componente de la faceta instruccional

Componentes	Nivel de pertinencia en la valoración		
	Nada pertinente	Poco pertinente	Pertinente
Interacción autor-alumno	2	3	8
Interacción entre alumnos	2	3	8
Autonomía	1	5	7
Recursos materiales	1	6	5
Secuenciación	6	5	2

Los futuros maestros analizaron con mayor pertinencia la lección en el aspecto instruccional, fundamentalmente en los indicadores relativos a las componentes interaccionales, esto es, existencia de *situaciones que busquen el consenso en base al mejor argumento* (I36), *uso de diversos recursos argumentativos* (I37), *inclusión de tareas que fomenten el debate y comunicación entre los estudiantes* (I38) o *reserva de momentos en los que los alumnos asumen la responsabilidad del estudio* (I39). La mayoría de los equipos (8 en cada caso) los valoraron de manera pertinente justificando su ausencia total. En esta faceta, los mayores desajustes en la valoración de los participantes respecto al análisis a priori surgen al reflexionar sobre la *claridad en la presentación de los contenidos* (I35) y la *contextualización de definiciones y propiedades mediante situaciones, modelos concretos y visualizaciones* (I41).

En este caso, más de la mitad de los futuros maestros han considerado que se cumplen totalmente los indicadores, pasando por alto que, si bien la presentación es usualmente clara, no se enfatizan los conceptos claves (8 equipos) y que, aunque se incluyen tareas contextualizadas y visualizaciones no se usan modelos concretos, por lo que ambos aspectos solo se cumplen parcialmente (11 equipos).

Sólo dos equipos (EFM¹³ y EFM¹⁵) valoraron de manera pertinente como nulo el grado de cumplimiento del indicador sobre *adecuación de la secuencia de contenidos y actividades* (I43). En la lección no se incluye una aproximación intuitiva y se avanza rápidamente hacia la formalización de la regla de tres, desoyendo las recomendaciones de las investigaciones sobre enseñanza de la proporcionalidad (Fernández y Linares, 2011; Shield y Dole, 2013). Como sugiere EFM¹³ no es adecuado que en la lección “la regla de tres y reducción a la unidad estén explicadas al mismo tiempo”.

También en la faceta ecológica, como puede verse en la Tabla 5.7, los equipos realizaron una valoración suficientemente pertinente en todos los componentes salvo en la adaptación al currículo.

Tabla 5.7

Frecuencia de equipos según el nivel de pertinencia en la valoración de los indicadores de la GALT-proporcionalidad para cada componente de la faceta ecológica

Componentes	Nivel de pertinencia en la valoración		
	Nada pertinente	Poco pertinente	Pertinente
Adaptación al currículo	11	0	2
Apertura a la innovación	1	8	4
Adaptación socio-profesional	1	1	11
Educación en valores	2	4	7
Conexiones intra e interdisciplinares	5	7	1

En este caso 11 equipos consideran que *los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares* (I44). Su valoración es no pertinente dado que no tienen en cuenta que la lección no aborda el estándar de aprendizaje “resuelve problemas [...] explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas” (MECD, 2014a) y tampoco

propone tareas de evaluación, limitaciones que nos llevó a considerar un cumplimiento parcial de dicho indicador.

Finalmente, la mayoría de los equipos han coincidido con nuestro juicio en gran parte de los indicadores asociados a las distintas componentes de la faceta afectiva, por lo que los resultados en este aspecto han sido en general pertinentes (Tabla 5.8).

Tabla 5.8

Frecuencia de equipos según el nivel de pertinencia en la valoración de los indicadores de la GALT-proporcionalidad para cada componente de la faceta afectiva

Componentes	Nivel de pertinencia en la valoración		
	Nada pertinente	Poco pertinente	Pertinente
Actitudes	4	0	9
Emociones	1	5	5
Creencias	6	0	7
Valores	5	2	6

La disparidad aparece al valorar si en la lección se promueve la participación activa, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática (I49) y si se fomentan los razonamientos lógicos y las ideas originales (I52). En ambos casos, sólo tres equipos han realizado valoraciones pertinentes; el resto han considerado que los indicadores se cumplen totalmente, ignorando la reflexión que hace, por ejemplo, EFM¹³ cuando afirma que “en este tipo de actividades el alumno no tiene donde ser especialmente original, por ejemplo, ya que son ejercicios sistemáticos y repetitivos” o bien EFM⁸ que considera que la participación activa, perseverancia y responsabilidad “debería promoverse más”.

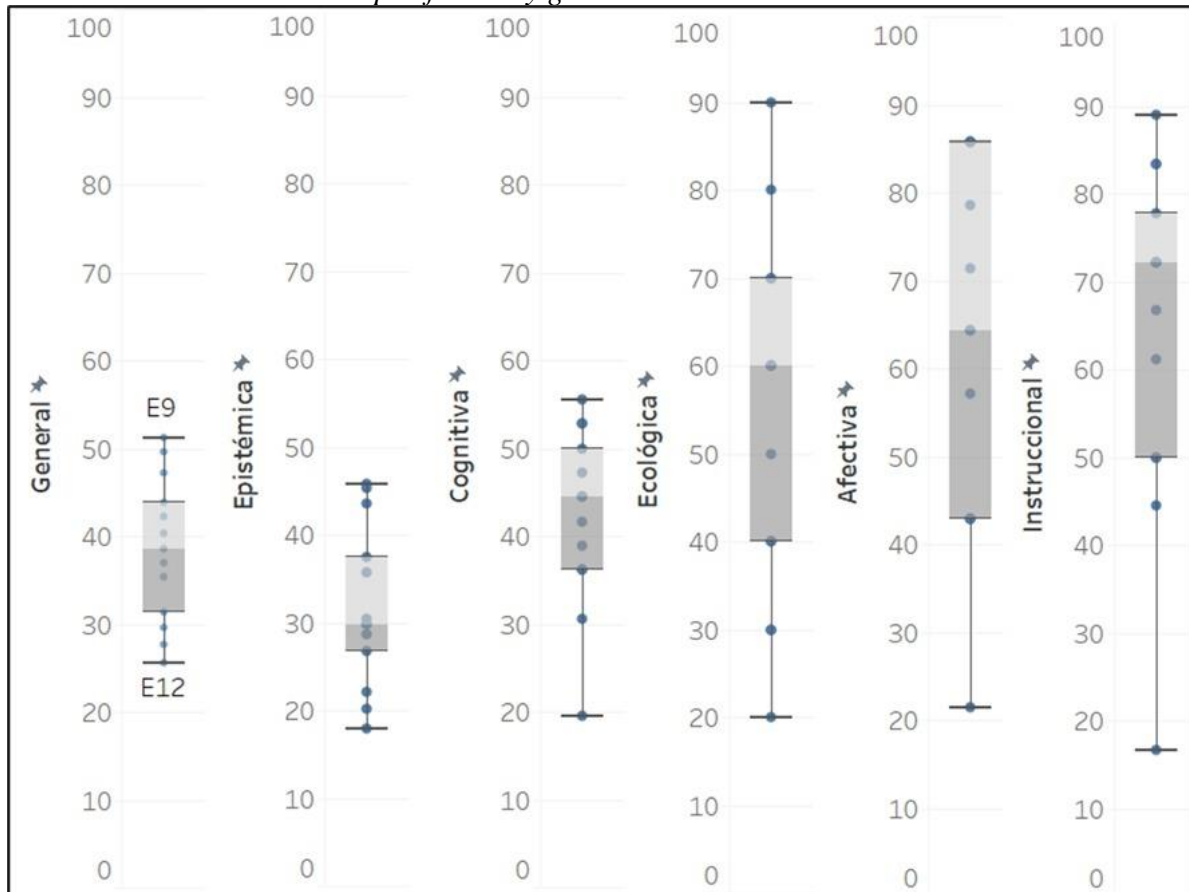
4.2.4. Valoración global del análisis de la lección

Coincidiendo con estudios previos como el de Shower (2017), los resultados de las evaluaciones de los informes de los futuros maestros muestran que la tarea del análisis de libros de texto puede resultar difícil incluso cuando estos cuentan con una pauta para guiar su estudio. Teniendo en cuenta la puntuación asignada a las valoraciones de los indicadores (0: nada pertinente, 1: poco pertinente, 2: pertinente) en las distintas facetas y componentes de la GALT-

proporcionalidad, siete equipos han obtenido una calificación final sobre 100 que oscila entre 31,30 (Q1) y 43,90 (Q3); la mediana es 38,62 y la nota promedio es de 38,43 (Figura 5.11).

Figura 5.11

Resultados de la evaluación por facetas y general de la lección



Fuente. Elaboración propia.

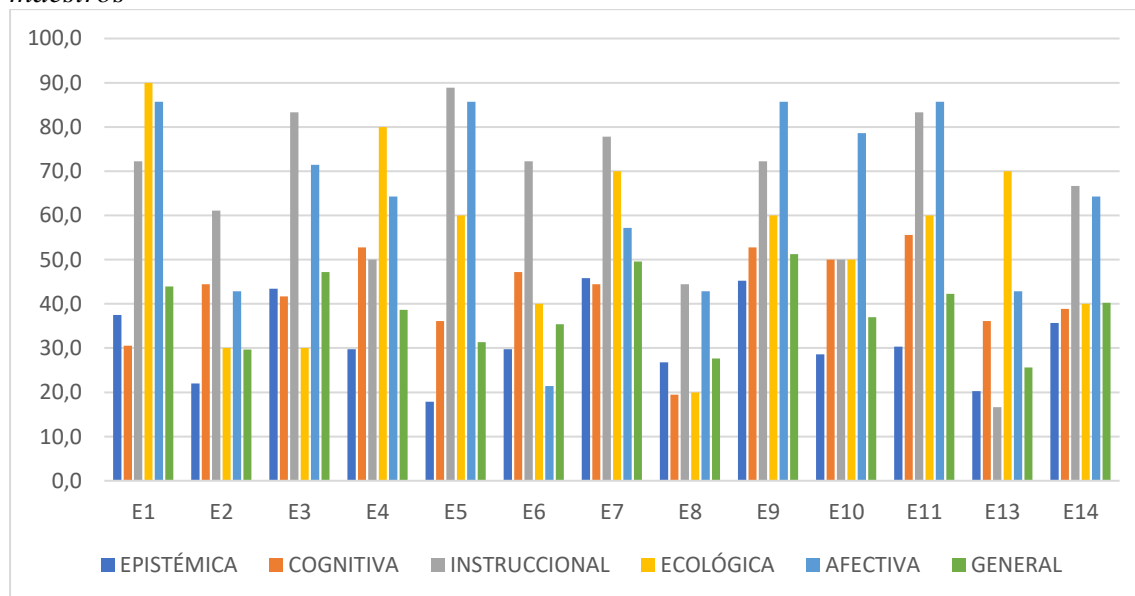
La puntuación máxima ha sido de 51,21 (obtenida por EFM¹⁹) y la mínima de 25,6 (para EFM¹³). En esta valoración global (compuesta por 123 indicadores), no todas las facetas tienen el mismo peso: la epistémica supone el 68,29% de la calificación (es aquella con más peso en la calificación general por ser la faceta con más indicadores: 28 por cada configuración; es decir 84), la cognitiva supone un 14,63 % (6 por cada configuración; es decir 18 indicadores) y las facetas instruccional (9 indicadores), ecológica (5 indicadores) y afectiva (7 indicadores) representan el 7,32%, 4,07% y 5,69% del total, respectivamente.

Además, como puede verse en la Figura 5.11, la faceta epistémica es la que obtiene los resultados más bajos (mediana de 29,76 y media de 31,78). De manera inversa la faceta en la que obtuvieron mejores resultados fue la instruccional (mediana de 72,22 y media de 64,53), seguida de la faceta afectiva (mediana de 64,29 y media de 63,74).

En la Figura 5.12, se observa que la mayoría de los equipos (7 de 13, dado que un equipo no respondió a esta tarea) han obtenido la calificación más baja en la faceta epistémica y tres en la cognitiva. Esto pone de manifiesto nuevamente que los futuros maestros encuentran más dificultades al valorar la adecuación del contenido matemático (faceta epistémica) y aspectos que tienen que ver con la progresión en los aprendizajes (faceta cognitiva), que al considerar aquellos en relación con la organización, secuenciación (faceta instruccional), adaptación curricular (ecológica) o tratamiento de actitudes y emociones (afectiva) en el texto.

Figura 5.12

Evaluación por facetas del análisis de la lección realizado por los equipos de futuros maestros



Fuente. Elaboración propia.

4.3. Análisis de las reflexiones de los futuros maestros cuando valoran la idoneidad didáctica de la lección.

En este apartado presentamos los resultados del análisis de los protocolos de respuestas entregados por los futuros maestros cuando se les pidió elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección de libro de texto en las diferentes facetas. Para valorar de qué forma influye el uso de la herramienta GALT-proporcionalidad en esta reflexión, se busca en sus respuestas fragmentos de descripción en los que emplearan algún indicador para argumentar o apoyar su juicio sobre la idoneidad, analizando el grado de corrección de estas observaciones.

En la Tabla 5.9 se muestran los aspectos generales (características positivas y fundamentalmente conflictivas) que los futuros han tenido en cuenta de modo correcto al realizar esta reflexión y la frecuencia de equipos (Fr.) que los han mencionado según cada faceta. Como se aprecia en dicha tabla, la mayoría de equipos mencionan la presencia de las situaciones-problemas que utilizan los autores del libro para introducir cada apartado y para aplicar los contenidos previamente abordados como un aspecto positivo de la lección.

Por ejemplo, EFM¹⁵ señala que “hay problemas resueltos a modo de ejemplo a seguir para que así el alumnado pueda guiarse sobre la resolución de las actividades planteadas”, refiriéndose a situaciones como las de la Figura 5.1, que emplean los autores para introducir el tema de magnitudes proporcionales.

Estos equipos también refieren a las situaciones de aplicación, por ejemplo, EFM¹¹ indica que “se incluyen situaciones para aplicar el concepto de magnitudes directamente proporcionales, así como procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres”. Once equipos, apuntan como conflictiva la poca representatividad de las situaciones, dado que “la mayoría son de valor faltante o tabulares” (EFM¹³), indicando que “no se emplean tareas de comparación” (EFM¹⁷) o bien que “pueden darse ambigüedades ya que sólo se les muestra un

ejemplo inicial con una remota explicación del mismo” (EFM^{I6} para C3). Estas apreciaciones son correctas, dado que la mayoría de las situaciones son de valor faltante, dejando de lado otro tipo, importante para el desarrollo de un adecuado razonamiento proporcional, como pueden ser las de comparación. Con respecto a las oportunidades para que el alumno formule problemas, sólo dos tareas lo permiten, aspecto que ha sido considerado por la mayoría de los equipos (ocho).

Gran parte de los equipos (nueve) razonan sobre el tipo y adecuación de las representaciones matemáticas que se emplean en el texto. Por ejemplo, EFM^{I13} afirma que “las representaciones y tipos de expresión usadas son tabular, simbólico numérica y de magnitudes de proporcionalidad. En general no se analiza pertinencia o potencialidad de utilizar alguna expresión”. Efectivamente como han señalado los futuros maestros, la lección se limita al manejo, construcción y lectura de tablas de valores y las únicas representaciones gráficas o manipulativas se consideran al abordar el tema de escalas. Por otro lado, la mayoría de equipos (Tabla 5.9) consideran pertinentemente que en la lección no se abordan con claridad los conceptos matemáticos, una de las críticas que hacen es que “no se mencionan algunos conceptos nuevos para el alumnado (por ejemplo, tabla de proporcionalidad, constante de proporcionalidad, etc.), pero sí se pide al alumnado que trabaje con los mismos” (EFM^{I7}). Como puede verse en la Figura 5.1, no se llegan a definir dichos conceptos ni se ofrece una definición genérica para las magnitudes proporcionales. Estos factores pueden generar conflictos relacionados a la “falta de comprensión, funcionalidad y desarrollo de conceptos en el alumnado” (EFM^{I13}). Además de lo anterior, el análisis a priori permitió percibir que las definiciones suelen particularizarse a casos específicos de magnitudes y escalas. Como ejemplo puede verse la Figura 5.2, correspondiente a la configuración sobre escalas, donde dicho concepto sólo se define para el caso “1:500000”.

Tabla 5.9*Reflexiones correctas de los futuros maestros sobre la idoneidad didáctica de la lección*

Consideraciones incluidas en la valoración razonada sobre la idoneidad	Fr.
Epistémica	
Hay <i>situaciones</i> de introducción y aplicación.	8
No hay variedad de problemas de aplicación, son repetitivos y mecánicos.	11
Faltan situaciones que permitan distinguir comparaciones aditivas y multiplicativas.	3
No se fomenta la creación de problemas por parte del alumno, sólo su resolución.	8
Representaciones poco diversas (tabulares y simbólicas en su mayoría) no se analiza su pertinencia.	9
Se emplea un <i>lenguaje</i> sencillo y adaptado al nivel educativo.	5
En las <i>representaciones</i> no se distinguen relaciones multiplicativas entre y dentro las cantidades.	3
Los conceptos no se presentan claramente, se limitan a ejemplos particulares, y no se define covariación, invariancia, escala, tabla de proporcionalidad, constante de proporcionalidad.	12
Las descripciones de procedimientos son mecánicas, sin explicar el porqué de estos, no se argumenta.	11
No se pide al alumno justificar la respuesta de las situaciones, sólo resolverlos.	13
No se establecen proposiciones suficientes para distinguir si una situación es proporcional.	3
No se promueven los procesos de comunicación, modelización o generalización.	3
Cognitiva	
No se abordan los conocimientos previos (conversiones entre unidades de medidas)	12
No hay actividades de ampliación y refuerzo.	5
No se promueve el logro y apoyo de todos los alumnos.	6
No se advierte de errores o dificultades.	9
Afectiva	
No se fomenta lo suficiente las actitudes positivas hacia las matemáticas.	4
No existe un tratamiento adecuado de las emociones.	7
Las situaciones-problemas reflejan la utilidad diaria de las matemáticas.	4
Instruccional	
El modelo instruccional “primero ejemplos, luego ejercicios” prioriza la comprensión procedimental de modo mecánico y no la presentación clara de la teoría.	7
No se promueve el uso de recursos argumentativos para captar la atención.	4
Existen pocas tareas para trabajar en parejas que no dan lugar a debate o diálogo.	9
La autonomía no se promueve lo suficiente, no se motiva a investigar, explorar o conjeturar, las tareas son de reproducción.	9
La secuenciación no es adecuada.	4
No hay diversidad de recursos materiales.	6
Ecológica	
No hay innovación en cuanto a investigación y práctica reflexiva.	3
Buena adaptación al ámbito socio-profesional, hay problemas contextualizados.	4
Hay conexiones interdisciplinarias y con temas como el consumo y la tecnología.	4

El análisis a priori permitió también concluir la carencia de argumentación y justificación de los enunciados y procedimientos. Por ejemplo, al introducir los métodos de

reducción a la unidad y regla de tres (ver Figura 5.3) no se justifica explícitamente que estos sólo se pueden aplicar cuando las magnitudes involucradas son proporcionales. Tampoco se explica por qué se multiplica en cruz para resolver la ecuación proporcional que aparece en la regla de tres.

Esta debilidad de la lección ha sido identificada por la mayoría de los participantes (11 equipos), por ejemplo, EFM¹³, indica que “no aparecen argumentos ni las proposiciones son explicadas. Solamente aparecen una serie de pasos que corresponderían a los procedimientos, pero tampoco aparece un argumento sobre ello”. Además, todos los participantes indican que no se promueve que el alumno argumente en las situaciones propuestas.

Sólo tres equipos en cada caso (Tabla 5.9) identificaron que ninguna de las situaciones de la lección permite diferenciar entre comparaciones aditivas y multiplicativas, que las representaciones no se usan para identificar relaciones entre y dentro de las magnitudes y que no se establecen las condiciones que deben cumplir dos magnitudes para ser proporcionales. Por ejemplo, EFM¹³ indica que “la mayoría son representaciones tabulares (tablas) para situaciones que se proponen, pero estas representaciones no promueven las relaciones multiplicativas entre magnitudes ni dentro de ellas”. En efecto, como puede verse en la Figura 5.1, la representación tabular sólo enfatiza la relación multiplicativa entre las cantidades de magnitudes “tiempo” y “precio”; sin embargo, no se incluye la relación multiplicativa dentro de las cantidades de magnitudes (tiempo-tiempo o bien precio-precio). Dichos aspectos son considerados relevantes para que los alumnos comprendan el verdadero significado de la relación de proporcionalidad (Lamon, 2007; Shield y Dole, 2013) y para fomentar estrategias de pensamiento que ayuden a comprender la estructura multiplicativa de las situaciones proporcionales (Vergnaud, 1983).

El análisis de las reflexiones de los futuros maestros con relación a la idoneidad cognitiva de la lección pone de manifiesto que la mayoría de los equipos hace una correcta

valoración en relación con la poca atención de conocimientos previos. En concreto, señalan la falta de atención a los sistemas de unidades de medidas y conversiones en el tema de escalas:

concretando en el tema de escalas y mapas podemos observar que se plantean ciertos conceptos en base a afirmaciones que pueden ser complejas para el alumnado si no saben interpretarlas y previamente no las han adquirido (escalas, medidas, distancias) (EFM¹13).

Además, seis equipos reconocen como EFM¹11 la falta de flexibilidad que permita considerar las diferencias individuales en los alumnos: “ya que se promueven estrategias de resolución de ejercicios de manera automática, tampoco se fomenta el resolver un ejercicio mediante métodos variados”. Al respecto EFM¹10 reflexiona sobre el uso de las tablas de proporcionalidad en C1: “es la única estrategia ofrecida y en la mayoría de los ejercicios pide trabajar con las tablas evitando descubrir otras estrategias”. Por otro lado, la mayoría de los equipos opinan que no se presta suficiente atención a los errores y dificultades.

En el aspecto afectivo, sólo cuatro equipos hacen observaciones relacionadas a la poca atención de las actitudes (“no se promueve una participación activa del alumno”, EFM¹3) y que no se promueve lo suficiente la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos en la resolución de problemas. Sin embargo, la mayoría de los equipos han identificado la poca atención a los intereses y emociones (“no se fomentan los razonamientos lógicos, ideas originales, trabajo útil, práctico o realista”, EFM¹3), señalando que no se promueve que el alumno pueda expresar sus emociones y que no existe gran variedad de elementos motivadores.

En cuanto al aspecto instruccional, nueve equipos consideran como EFM¹10 que la lección “flaquea en los indicadores que apuestan para hacer proyectos e investigaciones que serían óptimas para integrar de manera significativa y no mecánica” por lo que “la autonomía y la deducción del alumno se vuelve nula en casi todos los procesos resolutivos” (EFM¹13).

También, siete equipos han reflexionado sobre el nivel de adecuación de la lección en cuanto a la correcta interacción autor-alumno. Por ejemplo, algunos equipos consideran como EFM¹³ que la lección “no se corresponde con lo que se pide a nivel instruccional que es la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas”, “dando una mayor importancia a procedimientos sistemáticos y a su vez rutinarios” (EFM¹¹). En esta misma línea, nueve equipos mencionan que la interacción entre alumnos no se promueve lo suficiente ya que “el autor no realiza propuestas grupales en ninguna de las actividades de las tres configuraciones. No se propone en ninguna de las actividades del libro un debate o diálogo” (EFM¹³).

Son menores las reflexiones sobre aspectos temporales. Entre ellas, mencionan que “la secuenciación que se usa no es adecuada omitiendo ideas previas, relación con otros contenidos ni tampoco se retrasa la introducción de otros contenidos hasta que el alumnado no tenga afianzados los previos” (EFM¹³), o bien que “se dedica más tiempo a la realización de tareas posteriores que a una buena explicación de la lección sobre la cual tratarán las actividades posteriores” (EFM¹⁰). También hacen observaciones pertinentes en cuanto a la poca diversidad de los recursos materiales. Finalmente, en el aspecto ecológico, sólo tres equipos hacen una crítica adecuada con relación a la poca apertura a la innovación.

Sin embargo, no todas las apreciaciones identificadas en los juicios de los futuros maestros sobre la idoneidad didáctica de la lección son pertinentes y diez equipos han realizado alguna apreciación incorrecta al valorar la idoneidad didáctica de la lección, siendo la facetas epistémica y cognitiva las más críticas. Así, tres equipos han considerado de modo erróneo que la lección incluye situaciones para aplicar las magnitudes inversamente proporcionales, lo que parece deberse a que los futuros maestros confunden los conceptos de magnitudes *no* proporcionales y magnitudes *inversamente* proporcionales. También, tres equipos consideran que se incluyen situaciones de cálculo mental en aquellas tareas que no precisan de escribir las operaciones para resolver el problema. Otros tres equipos afirman que se promueve la

comunicación, modelización o la generalización. Por ejemplo, EFM¹³ afirma que en “los problemas, sobre todo, se plantea un modelo el cual se debe seguir”. En este caso parece que los futuros maestros asocian la regulación de pasos que propone el autor como el uso del modelo de la función lineal.

En cuanto al aspecto cognitivo, la mayoría de equipos (ocho) creen que las situaciones tienen un nivel de dificultad similar, y la dificultad es adecuada, lo que sugiere que los participantes no han identificado correctamente los factores que permiten referirse a los niveles de dificultad de las tareas según la literatura, como pueden ser la relación entre los números, posición del valor faltante, cantidades discretas o continuas, ni tampoco han considerado estos para referirse a los niveles de dificultad de las situaciones (Fernández y Llinares, 2011).

Respecto a la idoneidad instruccional, las apreciaciones que consideramos incorrectas tienen que ver con la interacción entre alumnos y alumnos con el profesor o con la adecuación al currículum. Por ejemplo, tres equipos consideran como EFM¹⁶ “una correcta interacción entre alumnos y de los alumnos con el profesor mediante diferentes ejercicios que fomentan la puesta en común y la explicación de manera argumentada”. Sin embargo, en el análisis de la lección no se observan situaciones-problemas donde el alumno pueda argumentar sus respuestas y tampoco espacio para la interacción entre alumnos. Finalmente, cuatro equipos manifiestan que la lección se adapta correctamente a las directrices curriculares. Para realizar esta afirmación se centran en la descripción de los contenidos, pero omiten criterios de evaluación como, por ejemplo, el relativo a la explicación oral y por escrito del significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas (MECD, 2014a).

4.4. Propuestas de gestión de uso y cambios de la lección por los futuros maestros

Después de analizar la adecuación de la lección, los participantes debían reflexionar sobre la gestión de uso del texto y proponer cambios en el mismo para incrementar la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la proporcionalidad por medio de este recurso.

Respecto a la gestión de uso del libro de texto analizado, como se aprecia en la nube de palabras (Figura 5.13), la mayoría de los participantes han considerado que el libro texto debe servir como una “ayuda” para el docente siendo este uno de los muchos “recursos” posibles.

La mayor parte de los equipos indican que pueden utilizarse los apartados de “problemas” (siete equipos) y ejemplos para explicar los contenidos. Además, consideran de vital importancia la labor del “docente” encargado de llevar a cabo “cambios” y “reforzar” el contenido del texto, tomando en cuenta las carencias detectadas y contemplando las necesidades de los “alumnos”. Por ejemplo, EFM¹² manifiesta que:

Tras la revisión de los contenidos del libro de texto y observar que no es completo y que en ciertos casos puede llevar a la confusión, no podemos basarnos en la enseñanza-aprendizaje con un uso único del libro de texto. Este tiene que servirnos de ayuda, pero tenemos que ir más allá... podemos usar los ejemplos y ejercicios que aporta el libro de texto.

Figura 5.13

Nube de palabras sobre el modo de uso del texto analizado



Fuente. Elaboración propia.

En la Tabla 5.10, se muestran los cambios que proponen de modo específico para cada faceta. En general consideramos adecuadas todas las observaciones que han realizado en relación con posibles modificaciones y modos de uso de la lección. La mayoría de los equipos indica que se deben incorporar más ejemplos y problemas. Sin embargo, no especifican cuáles podrían ser; sólo EFM¹⁴ indica que se debería “incluir una actividad en la que el niño tenga que clasificar pares de cantidades en proporcionales o no proporcionales”.

Tabla 5.10

Propuesta de adaptaciones según facetas

Cambio sugerido según faceta	Fr.
Epistémica	
Plantear otros <i>problemas</i> y ejemplos.	9
Incluir situaciones que permitan usar diferentes <i>representaciones</i> .	2
Incorporar una explicación más adecuada de <i>conceptos</i> .	4
Fomentar que el alumno plantee <i>definiciones</i> con sus propias palabras.	3
Incluir situaciones que incentiven la <i>argumentación</i> y justificación.	5
Introducir actividades que permitan ver las <i>relaciones</i> con los enfoques del tema.	2
Cognitiva	
Recordar <i>conocimientos previos</i> de manera resumida.	8
Incluir situaciones de <i>ampliación</i> y <i>refuerzo</i> .	2
Añadir actividades de <i>evaluación</i> y <i>autoevaluación</i> .	3
<i>Advertir de errores</i> , y <i>atender dificultades</i> .	3
Proponer situaciones con <i>diferentes niveles de dificultad</i> .	2
Afectiva	
Considerar situaciones cotidianas y lúdicas, que fomenten la atención e interés.	3
Instruccional	
Incluir actividades de debate e investigación en grupos, trabajo en equipo.	4
Plantear ejercicios para fomentar la autonomía.	3
Promover el uso de diversos materiales.	5
Incluir situaciones que permitan contextualizar los contenidos.	3
Adaptar la secuenciación de los contenidos	3
Ecológica	
Plantear nuevas formas de trabajo que fomenten el pensamiento crítico.	2

Otros cinco equipos demandan la necesidad de fomentar la argumentación y justificación (“se le debería de explicar al alumno el porqué de un proceso y no darle solo la solución para obtener el resultado final”, EFM¹⁹). Sin embargo, en el aspecto epistémico, son necesarios otros cambios que apenas han mencionado los equipos. Así, por ejemplo, pocos

futuros maestros proponen incluir definiciones más adecuadas y precisas de los conceptos fundamentales, como por ejemplo EFM¹⁶ al afirmar que “sería conveniente una introducción al concepto de magnitudes proporcionales”.

También de manera mayoritaria, reconocen que hace falta atender los conocimientos previos de la lección, especialmente en lo relativo al tema de escalas, donde mencionan la necesidad de recordar y conectar con la conversión de unidades de medida. Los cambios propuestos son minoritarios en las facetas afectiva y ecológica y en el aspecto instruccional se considera fundamentalmente la necesidad de añadir actividades para trabajar en equipo (aspecto interaccional) y de diversos recursos materiales (“incluir material ilustrativo como dibujos, tablas, fotografías, planos para hacer más dinámica la exposición del texto”, EFM¹¹). Las referencias a la secuenciación de los contenidos son escasas. En este sentido, EFM¹⁰ afirma que “cambiaríamos el orden de estos ya que normalmente los ejercicios más complejos y para los que se necesita más atención se encuentran en el final y normalmente el alumno está más cansado y pierde más fácil la concentración; por ello los ejercicios de reflexión los adelantamos sin excedernos”.

El análisis de las respuestas sobre las propuestas de adaptaciones (tarea 5) y su comparación con los juicios razonados sobre la idoneidad de la lección (tarea 4) (Tabla 5.9) nos permite concluir que existen varios aspectos que, aunque fueron identificados por los futuros maestros como debilidades de la lección en las distintas facetas, finalmente no fueron considerados en la toma de decisiones de cambio (Tabla 5.10). En concreto, los futuros maestros se centraron fundamentalmente en la necesidad de incluir una mayor variedad de situaciones-problema (en lo epistémico) y recordar los conocimientos previos necesarios (en lo cognitivo), sin tener en cuenta las demás carencias identificadas previamente.

5. Conclusiones

En este capítulo hemos descrito el diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros maestros orientada a proporcionarles herramientas teórico-metodológicas para el análisis didáctico y valoración de la idoneidad didáctica de la lección de un libro de texto, que permita identificar potencialidades y limitaciones en el desarrollo de la lección, y en base a esto, reflexionar sobre la gestión de uso y adaptaciones para incrementar la idoneidad del proceso instruccional analizado.

Este tipo de acciones formativas orientadas hacia el conocimiento y las competencias didácticas, pero centradas en el contenido de la disciplina, están en línea con trabajos de Burgos, Beltrán-Pellicer et al. (2020) o Davis (2015), que señalan la importancia que tiene el contenido, tanto a la hora de revelar la complejidad de los objetos matemáticos implicados, como para desarrollar las matemáticas necesarias en su enseñanza.

De acuerdo con autores como Braga y Belver (2016) para los que el análisis de libros de texto ofrece enormes posibilidades en la formación inicial de profesores, creemos que este tipo de intervención formativa sobre análisis didáctico de una lección de libro de texto permite a los futuros docentes reflexionar sobre aspectos importantes que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollando su competencia para el análisis e intervención didáctica.

Los profesores que no analizan los materiales curriculares de forma productiva suelen presentar dificultades tales como: no reconocer los puntos fuertes y débiles de los materiales, hacer cambios contraproducentes o no realizar las modificaciones necesarias (Beyer y Davis, 2012). Por tanto, desde la formación se debe velar por que los profesionales de la enseñanza dispongan de herramientas para criticar los materiales curriculares, detectar deficiencias en los libros de texto y adaptarlos para hacer un uso adecuado de los mismos (Beyer y Davis, 2012; Lloyd y Behm, 2005).

La emisión de juicios razonados sobre la idoneidad del proceso instruccional planificado en la lección de un libro de texto requiere analizar los significados (entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas) del contenido que se incluyen, los tipos de situaciones-problemas, los conceptos, las representaciones (sus conversiones y tratamientos), los procedimientos, proposiciones y argumentos (los que se aportan y los que no). También supone la necesidad de identificar los conocimientos previos que se requieren a lo largo del proceso de instrucción y la medida en que los contenidos implementados son adecuados para los alumnos, los recursos didácticos que se contemplan, así como los modos de interacción previstos. Estos análisis deben permitir identificar las discordancias entre los significados institucionales, los elementos que obstaculicen el aprendizaje del contenido matemático por parte de los estudiantes y en general, las dificultades que surgen en la comunicación e interacción durante el proceso de instrucción.

A continuación, presentamos las conclusiones de la investigación desarrollada para responder a las cuestiones planteadas al inicio de este capítulo. Esta reflexión nos muestra tanto las limitaciones como potencialidades del diseño de la intervención que deben ser contempladas en ciclos de investigación posteriores.

5.1. Análisis didáctico realizado por los futuros maestros

Para responder a las preguntas:

¿De qué forma identifican los futuros maestros las prácticas, objetos y procesos presentes en las distintas configuraciones didácticas de una lección de un libro de texto?, y

¿cómo repercute este análisis en el reconocimiento de conflictos epistémicos y cognitivos potenciales presentes en el proceso instruccional planificado?,

hemos examinado el análisis didáctico de la lección realizado por los futuros maestros, confrontándolo con el análisis a priori de la lección realizado por el equipo investigador. De

nuestros resultados se deduce que los participantes reconocen de manera adecuada las prácticas matemáticas, teniendo más éxito en la identificación de las prácticas operativas que en las discursivas. Identifican la situación-problema que induce la actividad matemática en un contexto de proporcionalidad, pero no llegan a describir gran parte de los objetos (fundamentalmente proposiciones y argumentos) que se requieren o emergen de dichas prácticas, a través de los respectivos procesos matemáticos.

En consonancia, la identificación de conflictos, especialmente aquellos referentes a aspectos epistémicos y cognitivos específicos de la proporcionalidad o su tratamiento no es suficientemente satisfactoria. En este sentido, los participantes manifiestan la necesidad de mayor formación en aspectos epistémicos, cognitivos (además de afectivos o instruccionales) del conocimiento didáctico-matemático relativos a un contenido concreto, en este caso la proporcionalidad, para poder valorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular, los previstos o planificados en lecciones de libros de texto. De manera general, los conflictos cognitivos que indican con más frecuencia corresponden a la falta de atención a los conocimientos previos requeridos, mientras que entre los conflictos epistémicos más habituales destacan la ausencia o poca claridad de las definiciones y la falta de justificación de los procedimientos. Consideramos importante que los futuros docentes identifiquen estas carencias en las lecciones, dado el papel destacado de la argumentación para lograr una adecuada comprensión conceptual (Lin, 2018) y la necesidad de desarrollar espacios para que los alumnos discutan, modelicen y argumenten sobre relaciones y propiedades de la proporcionalidad.

5.2. Aplicación de la GALT-proporcionalidad por futuros maestros

Después de valorar su competencia para llevar a cabo el análisis didáctico de la lección, nos interesaba averiguar:

¿Qué dificultades manifiestan al aplicar la GALT-proporcionalidad?

¿Cuál es el nivel de pertinencia de sus valoraciones por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad para cada una de las idoneidades parciales y en general para la idoneidad didáctica de la misma?

La aplicación de la GALT-proporcionalidad requiere la puesta en práctica de una serie de conocimientos matemáticos y didácticos, que podrían no ser parte de la formación previa de los usuarios. Por ejemplo, en la experiencia descrita, los participantes mostraron carencias en cuanto al contenido matemático, especialmente en relación con los diferentes enfoques de la proporcionalidad y sus características, la distinción entre situaciones aditivas y multiplicativas, razones internas y externas, relaciones dentro y entre cantidades de magnitudes. La falta de conocimiento didáctico-matemático en la faceta epistémica llevó a los futuros maestros a no identificar un conflicto epistémico importante en la lección; la ausencia de proposiciones fundamentales y argumentos que justifiquen las condiciones en las que son pertinentes los procedimientos descritos (regla de tres, reducción a la unidad). Como consecuencia, en las tareas propuestas al alumno este debe asumir las condiciones de regularidad que garantiza una relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas.

También hemos identificado limitaciones de los participantes para reconocer y discriminar los tipos de problemas presentes en el texto, tanto desde el punto de vista instruccional (si su propósito es introducir, desarrollar o aplicar nociones teóricas, etc.) epistémico (si son de comparación, valor faltante, u otra) o cognitivo (la dificultad asociada, si son de ampliación o refuerzo, etc.).

En el aspecto instruccional la mayoría de los participantes de nuestro estudio, no han considerado problemático que en la lección no se haya dejado espacio para que los alumnos ganen experiencia con otros procedimientos intuitivos y aritméticos, antes de introducir formalmente la regla de tres (Shield y Dole, 2013). Esto podría estar en relación con que algunos profesores tienden a priorizar el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres)

para resolver situaciones de proporcionalidad, sin razonar lo suficiente sobre su pertinencia (Riley, 2010).

Así, los resultados muestran que los maestros en formación analizan con más éxito indicadores que tiene un carácter general en la lección que aquellos que son específicos de la disciplina, por lo que sus valoraciones en las facetas epistémica y cognitiva fue peor que en instruccional, ecológica y afectiva, siendo los primeros aquellos donde más influye la especificidad del contenido. Además, dado que las distintas dimensiones, epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica, aparecen interconectadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, no es extraño que las dificultades para valorar aspectos epistémicos repercutan en un análisis inadecuado de la faceta instruccional, fundamentalmente en lo que la interacción y secuenciación tiene de específica del contenido matemático. Esto muestra la necesidad de reforzar en los programas de formación los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores, algo que debe hacerse de manera coordinada en sus distintas facetas.

El análisis a priori de la lección hecho por los investigadores reveló importantes carencias relativas al contenido, es decir, a los significados y objetos matemáticos puesto en juego en la lección, a los conocimientos previos requeridos y la progresión en el aprendizaje, así como con la presentación del tema, los modos de interacción prevista y el uso de recursos. El análisis de los informes elaborados por los futuros maestros muestra que han logrado poner de manifiesto limitaciones relevantes de la lección del libro de texto, tras aplicar la GALT-proporcionalidad. Fundamentalmente:

- Poca representatividad de situaciones-problema, ausencia o inexactitud de argumentos y descuido de los procesos de comunicación, modelización y generalización (en el aspecto epistémico). Coincidiendo con los resultados de Yang y Liu (2019) los profesores consideran importante que el contenido sea presentado desde diferentes puntos de vista o con un número suficiente de problemas de diferente tipo.

- No se tienen en cuenta los conocimientos previos requeridos y no se fomenta el uso de diversas estrategias correctas en la resolución de las tareas de proporcionalidad (en lo cognitivo).
- La presentación que hace el autor del texto es incompleta o confusa. En el aspecto instruccional, los futuros maestros destacan la importancia de que la exposición del contenido sea clara y pertinente, así como la necesidad de buscar un argumento consensuado, mostrando su rechazo al enfoque meramente expositivo. Esta opinión aparecía reflejada en el trabajo de Yang y Liu (2019) en el que los profesores esperaban una “presentación adecuada del objeto matemático en el libro de texto” (p. 8).

Sin embargo, algunas carencias en la lección detectados por las investigadoras pasaron prácticamente desapercibidos para la mayoría de los futuros maestros. Por ejemplo:

- No se presentan tareas que permitan distinguir las situaciones multiplicativas de las aditivas y no se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre cantidades de magnitudes directamente proporcionales –aspecto fuertemente relacionado con la comprensión y adquisición del razonamiento proporcional (Lamon, 2007) –.
- No se emplean razones internas y externas, y faltan representaciones adecuadas que permitan distinguir relaciones multiplicativas que se establecen entre y dentro de las magnitudes.
- Ausencia del modelo de función lineal $y=kx$, y de un trabajo con un grado mayor de generalización.
- Falta de claridad de las condiciones que justifican una situación de proporcionalidad, lo que puede llevar a los estudiantes a utilizar un razonamiento proporcional en circunstancias donde no es pertinente (Van Dooren et al., 2009).

- Secuenciación inadecuada que impide avanzar en una construcción apropiada del razonamiento proporcional (Ruiz y Valdemoros, 2006).

Coincidiendo con estudios que reportan dificultades de profesores en formación y en servicio para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Buforn et al., 2018), una posible causa de este fenómeno puede deberse a un conocimiento didáctico-matemático deficiente en relación con la proporcionalidad, que impida a los futuros maestros interpretar o distinguir estos aspectos (Izsák y Jacobson, 2017). Así se hace necesario profundizar en los conocimientos que requieren los futuros docentes para analizar la idoneidad didáctica de recursos educativos, como pueden ser las lecciones libros de texto, en un contenido concreto.

5.3. Reflexiones sobre la idoneidad didáctica de la lección

Tras la aplicación de la GALT-proporcionalidad los futuros maestros debían elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección. En este momento, los participantes indican aquellas características que consideran positivas o negativas para justificar su valoración de la idoneidad. En relación con la pregunta: *¿qué tipo de reflexiones realizan los futuros maestros al valorar la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre proporcionalidad?*, algunos resultados son más alentadores.

A pesar de que los participantes realizaron valoraciones poco pertinentes de los indicadores de la GALT-proporcionalidad, especialmente al examinar el contenido matemático y los aspectos sobre sus aprendizajes, se apreció un mejor juicio cuando debían reflexionar de manera crítica sobre la idoneidad de la lección de forma conjunta. En este caso, precisaron fortalezas y carencias importantes en cada faceta, evidenciando una referencia implícita o explícita a los indicadores de la GALT-proporcionalidad.

En efecto, a pesar de la baja calificación obtenida por los participantes en el análisis de la idoneidad epistémica de la lección al aplicar la guía, la mayoría de los equipos (8)

reconocieron carencias importantes en esta faceta cuando tuvieron que reflexionar de manera conjunta sobre la lección. Consideraron, por ejemplo, la poca diversidad de las representaciones, que los conceptos no se definen de modo claro o que faltan conceptos fundamentales como el de constante de proporcionalidad que podrían generar falta de comprensión en el alumnado. También señalaron que los enunciados y procedimientos no se justifican y que no se favorece que el alumno argumente en las tareas.

Similarmente, aun cuando la calificación de los futuros maestros en el análisis de la idoneidad cognitiva tampoco fue adecuada, en el informe final lograron precisar aspectos conflictivos para juzgar como poco adecuada la lección en este aspecto. Por ejemplo, indicaron de manera acertada que no se atienden los conocimientos previos necesarios en la lección, no se presentan diversos métodos para resolver un problema lo que restringe la atención a las diferencias individuales o que no se advierte de errores y dificultades a los potenciales alumnos. También en lo instruccional, reflexionaron adecuadamente sobre la poca promoción de espacios para que el alumno investigue o explore y que no son suficientemente diversos los recursos materiales. Sin embargo, en las facetas afectiva y ecológica, no es posible identificar aspectos concretos en las descripciones de los participantes, como si ocurre en las otras dimensiones.

Los mejores resultados obtenidos por los participantes en la reflexión final, puede deberse que “filtraron” los indicadores que consideraron más relevantes (sobre los que posiblemente se sintieran más seguros en su valoración) tomándolos como referentes para justificar el grado de idoneidad. Por otro lado, la experiencia aquí descrita ha permitido a los participantes conocer una metodología de análisis de libros de texto que han considerado relevante para su formación profesional. Como ellos mismos afirman “sería conveniente que el docente haga un análisis con los ítems que hemos hecho en la valoración anterior ya que le ayudará a poder plantear posibles cambios en cuanto a cómo impartir la lección...” (EFM¹³).

Concluimos, de modo similar a Beyer y Davis (2012) que los maestros en formación pueden beneficiarse del uso de criterios de análisis, desarrollando mejores capacidades para aplicar su conocimiento y posibilitando la identificación de potencialidades y debilidades de los materiales.

5.4. Propuestas de gestión y modo de uso de la lección

Por último, nos interesaba valorar de qué manera puede la reflexión previa ayudar a los futuros docentes a tomar decisiones de acción. Nos planteábamos:

¿Cómo creen los futuros maestros que debe utilizarse el texto analizado?,

¿Qué cambios proponen los maestros para incrementar la idoneidad didáctica del proceso instruccional pautado por los autores del texto?

Respecto a la reflexión sobre el modo de uso del texto, todos los equipos de futuros maestros reconocieron la importancia de analizar los recursos disponibles, tomar en cuenta el contexto para hacer adaptaciones pertinentes y utilizar de manera diversa los materiales. Los participantes han puesto de manifiesto habilidades en relación a lo que Shower (2017) llama “ser desarrolladores del curriculum”. Así, en las propuestas de cambio específicas que plantean, señalan como carencias importantes la ausencia de contenidos esenciales en la lección del libro de texto, sugieren alterar el orden de los contenidos de la misma, proponen complementar los ejercicios propuestos con otras situaciones-problemas más diversas, incluir recordatorios de conocimientos previos a modo de resumen, etc. Aunque no fueron lo suficientemente específicos en la propuesta de ejemplos concretos de tareas o contenidos que han de considerarse, estas son acciones propias de un docente que reflexiona sobre el uso de los materiales curriculares.

No obstante, la influencia de la valoración de la idoneidad didáctica y la identificación de conflictos fue limitada a la hora de hacer propuestas sobre la gestión del texto en el aula, fundamentalmente en los aspectos cognitivo e instruccional. Estos resultados coinciden con

investigaciones previas en las que se pone de manifiesto que a pesar de mostrar una visión completa y equilibrada sobre la adecuación de un proceso instruccional, los profesores suelen dar mayor énfasis a aspectos epistémicos a la hora de sugerir cambios (Esqué de los Ojos y Breda, 2021) o que los profesores tienden a hacer una descripción general de lo observado y considerar escasamente elementos de análisis al proponer mejoras de los procesos instruccionales analizados (Beyer y Davis, 2012; Morales-López y Araya-Román, 2020).

5.5. Implicaciones y limitaciones

Una posible causa de las limitaciones encontradas por los futuros maestros puede deberse a un conocimiento didáctico-matemático deficiente en relación con la propia naturaleza de los objetos y procesos matemáticos, o del contenido, en nuestro caso la proporcionalidad, que impida a los futuros maestros analizar la actividad matemática implicada, los posibles conflictos y su naturaleza. La estructura sistémica de la GALT-proporcionalidad, por medio de descriptores asociados a las distintas componentes de las idoneidades parciales, nos permite, como formadores de profesores identificar dificultades en la interpretación y valoración de indicadores específicos y tomar decisiones sobre aquellos aspectos que necesitan ser reforzados en futuras intervenciones formativas.

Dado que las críticas de los profesores a los libros de texto pueden estar relacionadas con su experiencia pasada y sus conocimientos sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Lloyd, 2002), en el diseño e implementación de nuevas intervenciones formativas, sería adecuado evaluar previamente el conocimiento matemático sobre la proporcionalidad y así conocer si, por ejemplo, los participantes discriminan situaciones proporcionales de no proporcionales, distinguen comparaciones multiplicativas de aditivas, relaciones dentro y entre magnitudes, o si son flexibles a la hora de resolver justificadamente problemas de proporcionalidad en los diferentes significados. Los resultados de este diagnóstico permitirán conocer si los maestros en formación disponen de los conocimientos

necesarios para interpretar y aplicar la GALT-proporcionalidad, y tomar decisiones sobre las acciones formativas previas que les garantice un uso más competente de dicha herramienta.

Es conveniente que existan espacios de comunicación y debate donde se compartan las principales deficiencias y fortalezas halladas tanto por el equipo investigador como por los equipos de trabajo. En la implementación de este estudio, por limitaciones de tiempo no fue posible llevar a cabo este espacio de reflexión, sin embargo, en caso de ser posible, debería considerarse.

La GALT-proporcionalidad, no constituye un producto acabado y debe fortalecerse incorporando las consideraciones de los usuarios (profesores y formadores de profesores) y las reflexiones que surgen de su aplicación.

Reconocemos que, en una posterior implementación, se puede fortalecer el diseño de la experiencia incluyendo tareas que permitan a los docentes reflexionar de manera más profunda y concreta en la gestión de uso del libro y en la propuesta de cambios específicos para subsanar los conflictos detectados. Para esto conviene solicitarles que tras la detección de un conflicto den una solución concreta a este, ya que el análisis de las respuestas de los participantes refleja que los cambios que proponen suelen ser muy generales. También sería conveniente reflexionar sobre propuestas de mejoras en otras facetas como la afectiva e instruccional que han sido escasamente consideradas.

Los maestros en formación son especialmente dependientes de los materiales curriculares para guiar su enseñanza y para apoyar sus conocimientos a menudo débiles (Schwarz et al., 2008, p. 346). A pesar de que los participantes de nuestra intervención se encontraban en su último curso de formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aún están adquiriendo conocimientos y desarrollando sus competencias profesionales, por lo que no necesariamente contarán con las herramientas conceptuales necesarias para aplicar pautas propias de un análisis investigativo. Creemos que, desde el punto

de vista de la investigación, los resultados descritos en este capítulo pueden contribuir a caracterizar y concretar niveles de competencia de análisis que pueden alcanzar los maestros en formación, y ser conscientes de la formación previa y el desafío que se requiere afrontar desde la formación de profesores.

CAPÍTULO 6. SEGUNDO CICLO DE EXPERIMENTACIÓN CON FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA

El contenido de este capítulo forma parte de los siguientes trabajos publicados o en proceso de revisión:

- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
 - Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia reflexiva en futuros profesores de matemáticas mediante el análisis de lecciones de libros de texto. En XX (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (en prensa) SEIEM.
 - Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia de análisis y reflexión sobre la gestión de lecciones de libros de texto por profesores en formación. (En revisión).
-

1. Introducción

Continuando con nuestro compromiso para el desarrollo de las competencias docentes en el análisis y gestión de materiales curriculares, en este capítulo se describe el diseño, implementación y resultados de una segunda intervención formativa con futuros profesores de secundaria. Con la intervención que aquí se describe, se pretende promover en profesores costarricenses en formación, la competencia reflexiva por medio del análisis de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto de proporcionalidad, la identificación de deficiencias en la misma y la toma de decisiones para su mejora y uso efectivo, empleando la GALT-proporcionalidad (Castillo et al., 2022c).

Como objetivos de aprendizaje se persigue que los participantes reflexionen sobre el uso del texto como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que conozcan y apliquen de manera crítica y constructiva una metodología para analizar una lección de proporcionalidad de libro de texto. Dicho tópico matemático aparece como uno de los

contenidos fundamentales de aprendizaje del currículo de Costa Rica donde se destaca su aplicabilidad (MEP, 2012).

Para promover en los futuros profesores la capacidad de análisis para garantizar el paso de un modelo de uso de adherencia (bajo el cual no se suele proponer cambios al contenido del texto), a uno de creación/adaptación (caracterizado por el planteamiento de cambios concretos en base a las debilidades y el contexto; Taylor, 2013) les planteamos que, tras analizar el texto, identifiquen potenciales conflictos en la lección y elaboren propuestas fundamentadas sobre la gestión de dicho recurso. Como mostramos en el Capítulo 4, los resultados del primer ciclo con futuros profesores de secundaria (Castillo et al., 2021b; 2022a) ponían de manifiesto que, si bien los futuros profesores fueron bastante precisos al elaborar propuestas de uso del libro de texto, era necesario buscar una reflexión más profunda solicitando a los participantes la propuesta de cambios concretos ante un determinado conflicto detectado.

Además, en línea con las experiencias descritas en los capítulos previos (Capítulo 4 y 5 de esta memoria), planteamos la necesidad de indagar las creencias y conocimientos de los participantes con relación al análisis y gestión del libro de texto sin haber recibido formación específica, para luego describir logros de aprendizaje en estas tareas propuestas tras la formación. Por ello, en este capítulo nos planteamos los siguientes objetivos:

- 1) Analizar cómo evoluciona la competencia reflexiva en el análisis de lecciones de libros de texto de matemática empleando la GALT-proporcionalidad de los futuros profesores de secundaria, tras participar de la intervención formativa. Para lograr esto se analizan y evalúan las valoraciones de la lección realizadas por los participantes antes y después de la formación.
- 2) Analizar cómo evoluciona su competencia reflexiva con relación a la identificación de conflictos y reflexión sobre su modo de uso. Para conseguir este objetivo nos planteamos:

- Describir las carencias identificadas en la lección y la reflexiones sobre el modo de uso de esta antes y después de la formación.
- Analizar y valorar cuáles fueron sus propuestas concretas para solventar los conflictos detectados.

3) Evaluar la experiencia formativa con relación a la promoción de la competencia reflexiva en el análisis de lecciones de libros de texto.

A continuación, se describe brevemente la metodología seguida y el contexto de aplicación de la experiencia. En la sección 3 se presenta el diseño e implementación del experimento. Los resultados del análisis de los informes entregados por los participantes con relación a las tareas solicitadas en la experiencia y del análisis retrospectivo de esta se incluyen en la sección 4. Las conclusiones se presentan al final del capítulo (sección 5).

2. Metodología, participantes y contexto de aplicación

Siendo consistentes con el enfoque de investigación de diseño que hemos adoptado y las fases propias del mismo enfoque según Godino, Rivas et al. (2014), para la planificación y diseño de la experiencia formativa que se describe en este capítulo, se contaba con el análisis retrospectivo de las intervenciones previamente aplicadas con futuros profesores españoles de educación secundaria y de educación primaria descritas en el Capítulo 4 y Capítulo 5 de esta memoria (Burgos y Castillo, 2022b; Castillo y Burgos, 2022c; Castillo et al., 2021a; 2021b; 2022a). Como mostramos en la sección siguiente, las limitaciones encontradas en dichas acciones formativas fueron consideradas para mejorar el diseño e implementación de la nueva intervención.

La metodología de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) se emplea para examinar los protocolos de respuesta de los participantes. Los futuros profesores de matemáticas entregaban los informes en cada sesión de trabajo, mediante el uso de la plataforma “Mediación Virtual” de uso oficial en la Universidad de Costa Rica. El análisis de los datos se orienta a la

identificación de respuestas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de dificultades y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

De acuerdo con Seckel et al. (2019) en diversos estudios se ha observado que cuando los futuros profesores han de valorar (sin una pauta previamente dada) un proceso instruccional es posible organizar sus juicios mediante los indicadores de idoneidad didáctica que aparecen de manera implícita o explícita. Esto puede explicarse por el origen consensual de los criterios de idoneidad didáctica (Breda et al., 2018). Por este motivo, las facetas, componentes e indicadores que componen la GALT-proporcionalidad, se emplean como categorías deductivas de análisis que permiten categorizar el discurso de los futuros profesores de secundaria, localizando fragmentos de descripción considerados evidencias de su uso implícito.

Como en intervenciones previas, el análisis a priori de la lección por medio de la GALT-proporcionalidad fue realizado por las investigadoras y un experto colaborador externo de manera independiente. Después se confrontaron los análisis para consensuar una evaluación global y determinar los principales conflictos de la lección. Las respuestas que dieron los participantes a las tareas de evaluación propuestas se comparan con el análisis a priori, para decidir el grado de pertinencia alcanzado.

La experiencia formativa se llevó a cabo en el marco de la formación inicial que reciben estudiantes de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica (I Ciclo lectivo, año 2021), dentro de la asignatura MA-0007 Matemáticas en el Curriculum Escolar. Uno de sus objetivos es “aportar elementos teóricos curriculares específicos de la educación matemática que le permitan comprender y gestionar su responsabilidad en la planificación, diseño, implementación y evaluación de los procesos de aprendizaje de la matemática, desde los niveles meso y micro” (Escuela de Matemática de la UCR MA-0007, 2015, p.1). Dicha materia, se imparte en el segundo año de la carrera, por lo que los participantes de este segundo

ciclo (IICS), 28 futuros profesores de matemáticas (en adelante, FP^I1, FP^I2, ..., FP^I28), poseen poca o nula experiencia práctica.

3. Diseño del experimento

A continuación, describimos el diseño de la acción formativa, precisando los recursos didácticos, la metodología de trabajo seguida y las tareas propuestas¹³ a los FP. Inicialmente, estaba previsto que la duración de la intervención fuera de cuatro sesiones de clase de dos horas cada una, de manera virtual y sincrónica. Sin embargo, la situación de pandemia supuso una reducción a tres sesiones efectivas de trabajo sincrónico.

Como hemos puesto de manifiesto, en los ciclos de experimentación previa, se observó que los participantes no justificaban el nivel de cumplimiento de cada indicador en la GALT-proporcionalidad (Castillo y Burgos, 2022b; 2022c; Castillo et al., 2021a; 2021b; 2022a). Por este motivo, se decidió incluir en la guía entregada a los FP, además de la columna para registrar la valoración numérica (0, 1, 2) del grado de cumplimiento de cada indicador, otra columna en la que debían explicar las razones que los había llevado a asignar dicha valoración. Además, en la nueva intervención se pidió a los FP que aplicaran la GALT-proporcionalidad de manera global a toda la lección, mientras que en experiencias previas se descomponía el texto por configuraciones didácticas que constituían las unidades de análisis (Burgos y Castillo, 2022b; Castillo y Burgos, 2022b; 2022c; Castillo et al., 2021a; 2021b; 2022a). Este cambio pretendía aliviar el trabajo de los participantes (Castillo et al., 2021a) y facilitar una visión en conjunto las tareas de ejercitación y evaluación propuestas en la lección (normalmente separadas) con las de conceptualización o ejemplificación propuesta por el autor del texto.

¹³ En el Anexo 1.3 puede verse todas las tareas solicitadas a los participantes en detalle.

3.1. Sesión 1. Exploración inicial

En esta sesión se propuso la *tarea inicial* (pre-formación) que debían empezar a trabajar durante la sesión sincrónica de manera individual y posteriormente entregar a través de la plataforma Mediación Virtual, de uso habitual en el curso MA-0007.

Las consignas de la tarea inicial incluían dos partes. La primera tenía como objetivo indagar sobre las creencias y los conocimientos de los participantes en relación con el análisis de libros de texto. Por ello, se les solicitó responder a cuestiones generales sobre cómo creen que debería emplearse un libro de texto de matemáticas, qué características debería tener un buen libro de matemática, qué ventajas y desventajas tiene el uso del libro como un recurso en el aula, y qué herramientas de análisis de un libro conocen. También se les consultó su opinión sobre la importancia y utilidad de conocer herramientas de análisis de libros para su formación como futuros profesores.

En la segunda parte se pidió a los FP que, tras leer detenidamente toda la lección “Proporción” del libro de Matemáticas 7 de Porras et al. (2013, p.127-136)¹⁴, indicaran si la consideraban adecuada o no para abordar el tema de proporcionalidad a nivel de séptimo curso (estudiantes de 13 años), señalando fortalezas, debilidades o errores de esta, y cómo la utilizarían en una clase que tuvieran que impartir sobre el tema. Se pretendía que los participantes realizaran una primera reflexión sobre la adecuación del recurso y reconocer criterios de idoneidad implícitos en sus discursos (Breda et al., 2018; Seckel y Font, 2020; Seckel et al., 2019).

Además, como tarea a entregar de manera previa a la sesión 2, debían responder a un cuestionario de conocimientos didáctico-matemáticos¹⁵ en el que se planteaban tareas en relación con la resolución y creación de problemas de proporcionalidad directa e inversa, y la

¹⁴ Dicho texto, dirigido a estudiantes de séptimo grado de secundaria (entre 12 y 13 años), fue seleccionado por ser de uso común en el contexto costarricense.

¹⁵ Las preguntas del cuestionario pueden verse en el Anexo 1.3 de esta memoria.

detección de errores en respuestas prototípicas de alumnos. Los resultados de dicho cuestionario nos permitieron tener en cuenta a qué indicadores de idoneidad era necesario prestar una mayor atención en la sesión teórica 3, para corregir o reforzar sus conocimientos¹⁶ sobre la proporcionalidad.

3.2. Sesión 2. La idoneidad didáctica como recurso para analizar lecciones de libros de texto

Al comienzo de la sesión los participantes debían acceder a un enlace virtual para responder una encuesta por medio de la plataforma *Doodle*. Basándose en su reflexión previa, debían calificar la adecuación de la lección “Proporción” en la escala: 5 EXCELENTE, 4 MUY BUENA, 3 BUENA, 2 MALA, 1 MUY MALA, según las características positivas o negativas identificadas, los errores encontrados y su frecuencia.

A continuación, se introdujo la noción de idoneidad didáctica y se explicó cómo esta herramienta teórico-metodológica se puede aplicar al análisis y valoración crítica de procesos de instrucción previstos o implementados, y en concreto, al análisis de lecciones de libros de texto. La profesora incluyó en la presentación las respuestas que algunos de los FP dieron a la cuestión ¿qué características debería tener un libro de texto de matemática para ser un buen recurso? (ver Figura 6.1), invitando a los participantes a reflexionar sobre en qué medida habían considerado aspectos relacionados con una o varias facetas y componentes de la idoneidad didáctica.

Posteriormente se explicaron nociones fundamentales del EOS necesarias para comprender la teoría de idoneidad didáctica (Godino, 2013) tales como: práctica matemática,

¹⁶ En las experiencias previas (Burgos y Castillo, 2022b; Castillo y Burgos, 2022c; Castillo et al., 2021a; 2021b; 2022a) los futuros docentes encontraron grandes dificultades para identificar las deficiencias de la lección en la faceta epistémica, lo que podría explicarse por un conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad limitado no identificado de manera previa a la intervención.

significado (institucional/personal) de un objeto matemático y conflictos semióticos (epistémicos, cognitivos, interaccionales), mostrando ejemplos tomados de varias lecciones de proporcionalidad en libros de texto. La sesión teórica concluyó con la presentación de la GALT-Matemáticas (Castillo et al., 2022b) y la reflexión sobre la necesidad de que los indicadores se adapten al contenido matemático de interés (Breda et al., 2018; Godino, 2013).

Figura 6.1

Características de un libro de matemáticas según los FP, subrayadas según facetas

¿Qué características debería tener un libro de texto de matemáticas para que lo consideres un buen recurso?

Definiciones concretas y acertadas de conceptos claves, ejercicios, datos interesantes que motiven a los estudiantes y hagan de su lectura tan entretenida como sea posible, una buena redacción y herramientas para que los estudiantes se autocalifiquen su trabajo.

Debe ser un libro con material tanto teórico como práctico, debe, además, de tener un lenguaje matemático idóneo con ejercicios adecuados para los estudiantes.

Una de las principales, sería que sea atractivo para los estudiantes, que use temas actuales y propios del entorno para abordar los contenidos, que abarque la mayor cantidad de variantes al momento de presentar ejemplos.

- Sobre adecuación al currículo
- Sobre el contenido matemático
- Sobre aspectos cognitivos
- Sobre aspectos afectivos
- Sobre los recursos, secuenciación y presentación clara de la información

Primero que vaya de la mano con lo que se plantea en los programas de estudio de matemáticas del MEP, debe plantear situaciones problemáticas como la que se siguieren en estos, y seguir el orden que se sugiere en estos.

Fuente. Elaboración propia (Tomada de la diapositiva de clase empleada por la profesora)

Posteriormente se explicaron nociones fundamentales del EOS necesarias para comprender la teoría de idoneidad didáctica (Godino, 2013) tales como: práctica matemática, significado (institucional/personal) de un objeto matemático y conflictos semióticos (epistémicos, cognitivos, interaccionales), mostrando ejemplos tomados de varias lecciones de proporcionalidad en libros de texto. La sesión teórica concluyó con la presentación de la GALT-Matemáticas (Castillo et al., 2022b) y la reflexión sobre la necesidad de que los indicadores se adapten al contenido matemático de interés (Breda et al., 2018; Godino, 2013).

Al finalizar esta sesión se facilitó a los FP un documento elaborado de manera específica para la intervención y que recogía como aspectos esenciales: (a) resultados de investigaciones que muestran la importancia de que el profesor de matemáticas sea competente en el análisis de libros de texto, (b) la pauta metodológica basada en el EOS para realizar dicho análisis, (c) los principales conocimientos didáctico-matemáticos que han de tenerse en cuenta para analizar una lección sobre proporcionalidad. Finalmente se incluye la GALT-proporcionalidad adaptada al contexto educativo¹⁷ (educación secundaria en Costa Rica). Varios de los indicadores fueron reformulados a fin de evitar las dificultades de interpretación que habían mostrado algunos futuros docentes en intervenciones previas, fundamentalmente en los aspectos cognitivo-afectivo e instruccional (Castillo et al., 2021a; 2022a).

En la faceta epistémica la inclusión, refinamiento o modificación de algunos de los indicadores de la GALT-proporcionalidad se basa en una revisión de la literatura referente a la proporcionalidad inversa. Según Lamon (2007) comprender la proporcionalidad consiste entre otras cosas en: emplear la proporcionalidad como un modelo matemático, distinguir situaciones para las cuales la proporcionalidad no es un modelo apropiado de aquellas donde sí lo son, emplear las funciones para enfatizar las covariaciones entre cantidades de magnitudes, reconocer que la gráfica de una situación proporcional directa es una recta que pasa por el origen, y que para la inversa es una hipérbola. Por tanto, es importante introducir y conectar el tema con las propiedades de las funciones en cada caso, así como distinguir las relaciones proporcionales directas ($y = kx$, k distinto de cero), inversas ($yx = k$, k distinto de cero) y otras que no lo son, por ejemplo, incluyendo funciones afines ($y = mx + n$; con m y n distintos de cero).

¹⁷ La versión usada en esta experiencia puede verse en el Anexo 1.3.2 de esta memoria.

3.3. Sesión 3. GALT-proporcionalidad y conocimientos didáctico-matemáticos

La finalidad de esta sesión fue que los participantes se familiarizaran con la aplicación de la GALT-proporcionalidad para analizar una lección de libro de texto. Para ejemplificar su uso, recurrimos a la lección “Proporcionalidad” del libro de texto de Alvarado (2014), texto seleccionado por el uso común que tiene en el contexto costarricense y que había sido analizado previamente por las investigadoras y el colaborador externo. Así, en cada una de las facetas y componentes se presentaron ejemplos concretos de indicadores que se valoraron cuantitativamente sobre dicha lección según la escala: 0 si el indicador no se cumple; 1 si se cumple parcialmente, 2 si se cumple totalmente.

A la vez, el recurso permitía reforzar o corregir aquellos conocimientos didáctico-matemáticos que habían sido detectado como insuficientes al analizar las respuestas al cuestionario inicial (sesión 1), prestando mayor atención a los indicadores de idoneidad implicados. También se tuvieron en cuenta aquellos indicadores que, en las intervenciones de ciclos de investigación previos (Castillo y Burgos, 2022b; 2022c; Castillo et al., 2021a; 2021b; 2022a) habían tenido peor tasa de éxito en su valoración. En la faceta epistémica, estos estaban relacionados con:

- Los diferentes significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico-funcional (Burgos y Godino, 2020), y como deben incorporarse y articularse.
- La importancia de incluir las propiedades fundamentales sobre la relación de proporcionalidad: condiciones necesarias y suficientes que permiten determinar si una relación es de proporcionalidad directa o no; el carácter aditivo y homogéneo de la relación funcional (Burgos y Godino, 2020; De Bock et al., 2017).
- La necesidad de que los procesos de instrucción sobre la proporcionalidad ofrezcan oportunidades para que los alumnos distingan las comparaciones multiplicativas de las

aditivas (Fernández y Llinares, 2012) y las relaciones de proporcionalidad directa de la inversa (Lamon, 2007).

- Recomendación de los expertos de distinguir entre razones internas (relacionan cantidades de la misma magnitud) y externas (relacionan cantidades de magnitudes distintas) y de promover estrategias de pensamiento y representación que fomenten un análisis entre y dentro de los espacios de medida (Lamon, 2007; Shield y Dole, 2013).

En el resto de las facetas, la formación teórica se centró en:

- (Mediacional) Qué se considera una secuenciación adecuada para la enseñanza de la proporcionalidad según la literatura existente. Por ejemplo: empezar el estudio de la proporcionalidad con un enfoque informal-cualitativo, para luego avanzar hacia la formalización y algoritmización, retrasando el uso de la regla de tres y evitando su uso indiscriminado (Burgos y Godino, 2020; Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007).
- (Ecológica) La revisión cuidadosa de las directrices curriculares que han de atenderse según el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012).
- (Cognitiva) Factores que, desde el punto de vista matemático y didáctico, influyen sobre la complejidad de las tareas de proporcionalidad, tales como: el uso de razones enteras (los números son múltiplos entre sí) y no enteras, la manera en que se formula la tarea, la familiaridad con el contenido, la cantidad de magnitudes involucradas en un mismo problema (Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren et al., 2010).

Especial atención se prestó en la discusión a dos errores comúnmente detectados en estudiantes y profesores: a) la *ilusión de linealidad*, que lleva a tratar una situación en la cual las cantidades no mantienen una relación de proporcionalidad directa como si lo fuera (De Bock et al., 2002); b) la caracterización de la proporcionalidad entre magnitudes en base sólo a condiciones necesarias como la *propiedad en acto* “más en A, más en B” (Izsák y Jacobson, 2017). También se insistió en que el reconocimiento de relaciones inversamente proporcionales

y la resolución de problemas que implican este tipo de relación resultan más difíciles para los alumnos que las que responden a una proporcionalidad directa (Arican, 2019a).

Para contextualizar la discusión e involucrar a los participantes en la reflexión, la profesora-investigadora se apoyó en los resultados obtenidos por los participantes a algunos de los problemas planteados en el cuestionario inicial para evaluar sus conocimientos matemáticos sobre proporcionalidad. Por ejemplo, en el problema que se incluye en la Figura 6.2, 13 de los FP trataron la relación aditiva entre las magnitudes número de árboles que han plantado Ana y Luis, como multiplicativa, concluyendo erróneamente que Luis logró plantar 40 árboles (siendo el resultado correcto 24). Se discutió la solución, conectando con la ilusión de linealidad previamente explicada.

Figura 6.2

Tarea de evaluación inicial de conocimientos matemáticos

Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento “Repoblamos”. Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles.

¿Cuántos árboles habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.

En otra de las tareas (Figura 6.3), los FP debían enunciar un problema de proporcionalidad directa y otro de proporcionalidad inversa que se resolviese por medio de una ecuación proporcional previamente establecida. Mientras que 20 FP respondieron correctamente a la primera parte de dicha tarea, ningún FP logró crear un problema en el que la relación entre las magnitudes fuera de proporcionalidad inversa y empleara la proporción dada. Se trataba de brindar espacios para que los mismos participantes puedan entender los errores y dificultades documentadas en la literatura y aclarar sus propias limitaciones en la resolución correcta de las situaciones-problemas.

Figura 6.3

Tarea sobre creación de problemas de proporcionalidad directa e inversa.

Plantee dos situaciones-problemas que puedan representarse con la proporción,

$$\frac{24}{3} = \frac{x}{6}$$

de manera que una involucre **magnitudes directamente proporcionales** y la otra implique **magnitudes inversamente proporcionales**. Justifique por qué las situaciones-problemas que usted ha planteado en cada caso corresponden a una relación de proporcionalidad directa o inversa.

La sesión terminó con la presentación detallada de la tarea final (post-formación) que debían entregar de modo virtual. Para esta actividad, se propuso a los participantes que, en base a la lección del libro de texto sobre proporcionalidad de Porras et al. (2013) respondieran a las siguientes consignas:

Consigna 1. Completar las tablas del Anexo que incluyen la GALT-proporcionalidad. Estas contienen los indicadores de idoneidad según las seis facetas que la componen. En la columna de “Valoración (0,1,2)” debes incluir una valoración numérica con relación al grado de cumplimiento del indicador según el siguiente criterio: 0: no se cumple el indicador nunca; 1: se cumple parcialmente, o a veces; 2: se cumple siempre y totalmente. En la columna de “justificación” debes incluir lo que te ha ayudado a decidir sobre la valoración numérica.

Consigna 2. Teniendo en cuenta la valoración realizada en el punto 1, elabora un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Indica para cada una de ellas y luego en general el grado de idoneidad como: como baja, media o alta según consideres.

Consigna 3. Precisa los principales conflictos detectados (epistémicos, cognitivos e interaccionales). En base a los conflictos detectados, indica de forma concreta y justificada cómo solucionarías al menos cuatro de estos.

Consigna 4. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la lección de libro analizada para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?, ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? Justifica tu respuesta.

Para finalizar se les pidió que volvieran a valorar la lección de Porras et al. (2013) mediante la encuesta *Doodle* y explicaran si habían cambiado de opinión respecto al grado de adecuación asignado en la tarea inicial, precisando las razones que motivaron ese cambio.

3.4. Sesión 4. Discusión de resultados y puesta en común

En esta sesión estaba prevista la discusión y puesta en común sincrónica de los resultados del análisis de la lección de libro de texto. Sin embargo, dados los ajustes realizados sobre el cronograma del curso MA-0007 a causa de la situación sanitaria, dicha sesión no se pudo llevar a cabo. La implementación efectiva supuso la entrega del informe escrito individual y la retroalimentación por parte de la profesora-investigadora a través de la plataforma del curso una vez entregados los reportes. Teniendo en cuenta la complejidad de la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje que involucran diversas dimensiones y componentes, consideramos necesario que los FP dispusieran de 10 días para terminar su informe completo.

3.5. Valoración de la experiencia formativa por parte de los participantes

Como cierre del ciclo de diseño, se pidió a los FP que cumplimentaran una encuesta de valoración para cada uno de los siguientes ítems, empleando una escala de 1 a 5 (1 valor mínimo, 5 valor máximo):

1. Claridad de las tareas y de las consignas. (Faceta interaccional)
2. Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor). (Faceta interaccional)
3. Grado de motivación e interés suscitado por las actividades. (Faceta afectiva)

4. Nivel de aprendizaje logrado. (Faceta afectiva)
5. Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas. (Faceta afectiva)
6. Grado de pertinencia de los recursos utilizados: GALT-proporcionalidad, libros de textos analizados, ejemplos ofrecidos, lecturas. (Faceta mediacional)
7. Grado de dificultad de las tareas. (Faceta cognitiva)

También se dejaba espacio para que añadieran cualquier comentario acerca de dificultades que presentaron durante la experiencia, opiniones sobre utilidad de la GALT-proporcionalidad y propuestas de mejora.

4. Resultados

En esta sección se incluyen los resultados del análisis y evaluación de los informes de los participantes a las tareas propuestas, así como el análisis retrospectivo de la intervención formativa con relación a la competencia de análisis de la lección del libro de texto. Comenzamos mostrando los resultados sobre la evolución en la competencia reflexiva de los futuros profesores por medio de la aplicación de la GALT-proporcionalidad. A continuación, referimos a los resultados sobre la evolución de la competencia de los participantes para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material. Finalmente se incluyen los resultados de la evaluación de la experiencia formativa (análisis retrospectivo) con relación a la promoción de la competencia reflexiva en el análisis de lecciones de libros de texto.

4.1. Evolución de la competencia reflexiva en el análisis didáctico de la lección

En primer lugar, se muestran las valoraciones de la lección realizadas por los participantes en la tarea inicial (pre-formación). En segundo lugar, se analizan y evalúan las respuestas de los FP al valorar la idoneidad didáctica de la lección (consigna 2) tras haber aplicado la GALT-proporcionalidad (consigna 1) en la tarea final (post-formación).

Finalmente, para valorar el progreso de aprendizaje por parte de los FP se confrontan sus respuestas a la tarea inicial y final, teniendo en cuenta en esta última el análisis a priori de la lección desarrollado por el equipo investigador.

4.1.1. Resultados del análisis pre-formación de la lección realizado por los participantes

En el análisis pre-formación de la lección realizado, los FP utilizan de manera implícita algunos componentes e indicadores de diferentes criterios de idoneidad didáctica, en concordancia con resultados de investigaciones como las de Giacomone et al. (2018), Breda et al. (2018) y Seckel y Font (2020). Así, en los informes entregados por los FP a la tarea inicial, es posible identificar descripciones que se pueden asociar a indicadores de las distintas componentes y facetas de idoneidad didáctica incluidos en la GALT-Matemáticas. Por ello, se aplica el análisis de contenido, considerando como categorías los componentes e indicadores asociados para las distintas facetas propuestos por el EOS.

Cuando los FP leen la lección por primera vez, centran su atención en elementos concretos y asumidos por ellos como buenas prácticas. De esta manera aparecen aspectos valorados positivamente (Tabla 6.1) y otros que los FP consideran como debilidades de la lección (Tabla 6.2), aunque estas son menos que las potencialidades indicadas.

Tabla 6.1

Análisis pre-formación. Características valoradas positivamente en cada faceta por los FP (n=28)

Faceta	Descripción	Frecuencia de FP
Epistémica	Presencia de ejemplos o ejercicios diversos y adecuados Presentación clara de definiciones	20
Cognitiva	Inclusión de ideas/sugerencias para resolver las actividades Dificultad adecuada de las actividades	5
Afectiva	Uso de colores e imágenes que hacen más amena la presentación del contenido Presencia de situaciones aplicables a la vida real	10
Interaccional	Presentación clara y organizada del tema	15

En general las características que mencionan los FP de modo positivo en las facetas cognitiva y afectiva (Tabla 6.1) son correctas. También son pertinentes las debilidades que precisan en las facetas epistémica, cognitiva e interaccional (Tabla 6.2). Algunos detallan correctamente que emplear como sinónimos los términos de “indirecta” e “inversa” para definir las relaciones de proporcionalidad inversa puede causar confusión, que algunos conocimientos previos como “volumen, perímetro” no se consideran, o bien que las explicaciones en relación con la proporcionalidad inversa son demasiado breves y confusas.

Tabla 6.2

Análisis pre-formación. Características valoradas negativamente en cada faceta por los FP (n=28)

Faceta	Descripción	Frecuencia de FP
Epistémica	Algunos ejemplos y/o ejercicios no son claros. Los procedimientos no se presentan correctamente. Faltan representaciones o el lenguaje no es adecuado. Algunas definiciones no son claras	14
Cognitiva	No se contempla el estudio previo de los conceptos involucrados. Algunos contenidos o ejercicios pueden ser difíciles para alumnos de séptimo año.	10
Interaccional	La presentación del tema no es clara debido a que existen ideas desconectadas o la organización es confusa.	6
Ecológico	Se incluyen contenidos no matemáticos en la lección	4

No obstante, el contraste de los análisis pre-formación de los FP, con el análisis a priori de la lección permite identificar que no todas sus apreciaciones son correctas. Específicamente discrepamos de las valoraciones de los FP en relación con las facetas: epistémica (al considerar como adecuadas las definiciones, 8 FP), interaccional (al indicar que el autor hace una presentación clara del tema, 12 FP) y ecológica (al creer poco apropiado la inclusión de preguntas fuera del contexto matemático, 4 FP).

Figura 6.4

Definición de proporción y proporción directa

Proporción

En situaciones de la vida cotidiana existen magnitudes medibles que se relacionan entre sí. La razón (o cociente) entre las magnitudes, se llama: proporción.

Estas proporciones se pueden comportar de dos formas: proporción directa y proporción indirecta.

Proporción directa

Cuando existen magnitudes que se relacionan de manera que cuando una aumenta la otra también se incrementa de manera proporcional y viceversa, entonces estamos ante una proporción directa.

Fuente. Tomada de Porras et al. (2013, p.127).

En efecto, el análisis a priori de la lección advierte que algunas nociones se introducen de manera confusa. Por ejemplo, como puede verse en la Figura 6.4, se emplean de modo incorrecto varios términos como sinónimos (razón-cociente, razón-proporción, indirecta-inversa, proporción-relación de proporcionalidad); se da una definición circular para la proporcionalidad directa (“incrementa de manera proporcional”) e inversa. No se definen conceptos fundamentales como el de constante de proporcionalidad.

Los análisis de los FP se basan en características superficiales, algunas fundadas en sus propias concepciones y desconectadas entre sí, reflejando sólo una pequeña parte de la compleja red de indicadores vinculados a las distintas facetas de la idoneidad didáctica (Godino, 2013). Estos resultados, similares a los de otros estudios (Seckel y Font, 2020; Sun y van Es, 2015), reflejan que los participantes necesitan herramientas y formación específica para dirigir su atención hacia aspectos fundamentales en los procesos de instrucción. Los propios participantes reconocen esta necesidad cuando deben responder a la tarea: “no tengo mucho conocimiento de en qué se tiene que basar uno para dar ese tipo de opiniones...” (FP^{II}28).

4.1.2. Resultados del análisis de la tarea post-formación realizada por los FP

En esta sección, se analizan las respuestas que han dado los FP en la tarea final. Se trata de conocer qué grado de idoneidad parcial y global asignan los FP, cómo justifican esa asignación y cómo de adecuadas son sus respuestas con relación al análisis a priori.

Respecto al análisis de la tarea final, se considera que una respuesta a la consigna 2 es *pertinente* si se fundamenta en las descripciones dadas al completar las columnas “valoración”, “justificación” o ambas, cuando se aplicó la GALT-proporcionalidad (consigna 1). En caso contrario se entiende no *pertinente*. El análisis de contenido de las valoraciones consideradas pertinentes permite inferir tres categorías de respuestas.

- *Únicamente cuantitativas*. La valoración se basa en la cantidad de indicadores según su grado de cumplimiento correspondiente (total:2, parcial:1, nulo:0) o bien al cálculo de sumas o promedios sobre las valoraciones numéricas de cada indicador en cada faceta, pero sin referir indicadores específicos. Ejemplos de respuesta en esta categoría son las de FP^{II}19 al valorar la faceta epistémica: “La considero alta porque en la mayoría de los indicadores presentados en la tabla de idoneidad epistémica tienen una valoración de 1 y 2”. También la de FP^{II}18: “debido a que obtuvo 34 puntos de un total de 68 puntos”.
- *Descriptivas*. Se mencionan una serie de indicadores con relación a sus valoraciones numéricas de grado de cumplimiento correspondientes (total:2, parcial:1, nulo:0) pero no se justifica la valoración. Un ejemplo es la opinión de FP^{II}28 al valorar la faceta cognitiva:

Se encontraron conflictos importantes en relación con conocimientos previos, progresión en la dificultad de aprendizaje y evaluación, tales como la ausencia de conocimientos previos o definiciones de conceptos necesarios, también la ausencia de instrumentos que le permitan al alumno autoevaluarse, entre otros conflictos, considero que el grado de idoneidad de esta faceta es baja.
- *Argumentativas*. Se describen grupos de indicadores en relación con sus valoraciones numéricas y se justifica la valoración. Un ejemplo es la respuesta de FP^{II}22:

En esta faceta [la cognitiva], su puntaje fue de 8 respecto a los indicadores. Cabe resaltar, que hace uso de conocimiento previo para abarcar el tema y maneja una

evaluación aceptable, no obstante, lo que le resta puntos es porque, no implementa diversos mecanismos para que el estudiante pueda desarrollar diferentes estrategias, así como, el nivel de dificultad de los problemas es muy corto ya que, con un solo método de resolución es necesario para responder todo.

Los criterios de idoneidad entendidos como “normas de corrección que establecen cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje” (Breda et al., 2018, p. 264), y su precisión por medio de indicadores observables, actúan como reglas de corrección emanadas del discurso consensuado por la comunidad interesada en educación matemática o un sector relevante de ésta. Las investigadoras junto con el colaborador experto externo emplearon los indicadores de la GALT-proporcionalidad (reflejo de dichas normas establecidas en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad) para realizar el análisis a priori de la lección (de manera independiente y consensuado después). Por tanto, este análisis actúa como referente institucional para la valoración de la lección. Para determinar el grado de corrección de las respuestas de los participantes, se comparan estas con el análisis a priori realizado por el equipo investigador, de modo que si difieren de este referente las respuestas son consideradas incorrectas.

Los resultados del análisis a priori sobre el grado de adecuación (alto, medio, bajo) de cada idoneidad parcial permiten concluir que la idoneidad global de la lección es baja, ya que sólo se asocia un grado medio-bajo a la idoneidad cognitiva y ecológica, y bajo al resto de idoneidades. La valoración global, tiene en cuenta el carácter articulado de las facetas desglosadas por medio de los componentes. Se trata de que los participantes reflexionen sobre el nivel de cada idoneidad parcial para poder hacer un juicio general considerando cada parte y un equilibrio.

Finalmente, definimos tres niveles de corrección de las respuestas desarrolladas por los participantes. Las adecuadas, corresponden a las respuestas en las que el grado de adecuación

(alto, medio, bajo) coincide con el juicio experto y cuya justificación es correcta. Las poco adecuadas, son aquellas respuestas en las que el grado de adecuación valorado coincide con el experto, pero cuya justificación no es correcta (incluimos aquí las no pertinentes). También son poco adecuadas aquellas cuyo grado de adecuación no coincide con el juicio experto, pero cuya justificación es correcta. Por último, en las respuestas nada adecuadas, el grado de adecuación no coincide con el juicio experto y la justificación no es correcta (incluimos aquí las no pertinentes).

En la Tabla 6.3 se presenta la frecuencia de justificaciones según las categorías descritas anteriormente, indicando entre paréntesis la cantidad de valoraciones que son correctas según el análisis experto.

Tabla 6.3

Tipo y frecuencia de justificaciones a las idoneidades parciales

Idoneidades parciales	Tipo de justificación				
	Pertinente			No pertinente	No responde
	Cuantitativa	Descriptiva	Argumentativa		
Epistémica	5 (1)	16 (12)	4 (3)	2	1
Cognitiva	6 (5)	16 (16)	3 (3)	2	1
Afectiva	3 (3)	16 (14)	6 (6)	2	1
Interaccional	5 (5)	4 (1)	13 (6)	5	1
Mediacional	5 (1)	3 (3)	19 (18)	0	1
Ecológica	8 (6)	11 (10)	6 (6)	2	1

En todas las idoneidades parciales, las categorías más frecuentes de justificaciones corresponden o bien a descriptivas (en las facetas epistémica, cognitiva, afectiva y ecológica) o argumentativas (en las facetas interaccional y mediacional) (Tabla 6.3). Aunque no existe una clara relación entre el tipo de justificación y las respuestas finalmente correctas (el porcentaje de valoraciones correctas en las facetas cognitiva, afectiva y ecológica es similar en los tres tipos de justificación y en las facetas epistémica y mediacional, apenas hay diferencia entre las descriptivas y argumentativas), se observa que en todas las facetas salvo la afectiva e interaccional, es mayor la proporción de respuestas correctas en las justificaciones de tipo argumentativo o descriptivo. Además, el carácter descriptivo o argumentativo de la mayoría de

las justificaciones, permite identificar los indicadores de idoneidad didáctica que mencionan los FP con mayor frecuencia (7 o más participantes) y que valoran de modo negativo (Tabla 6.4), si bien sólo en las argumentativas se descubre por qué consideran que no se cumplen dichos indicadores.

Tabla 6.4

Frecuencia (Fr.) de debilidades de la lección en cada faceta señaladas post-formación por los FP

Debilidades de la lección	Fr.
Idoneidad epistémica	
No hay situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas	7
No existen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional	7
No hay diversidad de representaciones para modelizar problemas	7
No se distinguen las relaciones multiplicativas <i>dentro</i> y <i>entre</i> las cantidades de magnitudes	8
No se definen los conceptos fundamentales en el tema de proporcionalidad	12
Idoneidad cognitiva	
No se promueve el uso de diversas estrategias de solución correctas	11
No existen advertencias de posibles errores o dificultades al resolver los ejercicios	11
Idoneidad afectiva	
No existe flexibilidad para explorar ideas o métodos alternativos para resolver los problemas	7
No se promueve la participación en las tareas propuestas, ni la perseverancia	10
Falta de elementos motivadores (sólo ilustraciones)	10
Ausencia de un espacio para que los alumnos expresen lo que sienten con respecto al tema	11
No se promueve la autoestima, evitando el rechazo o miedo a las matemáticas	11
Idoneidad interaccional	
No se presentan situaciones en donde buscar el consenso en base a argumentos	7
No se proponen tareas que motiven el diálogo, comunicación o debate entre alumnos	13
Idoneidad mediacional	
Falta de fuente de referencias que se emplean en el material didáctico	12
No se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales o informáticos	21
Idoneidad ecológica	
Carencias de contenido en relación con lo establecido en las directrices curriculares	7
No se contempla la formación en valores democráticos	8
Poca presencia de contenidos intra e interdisciplinares	9

Es importante señalar que cuando las justificaciones de los FP precisan los indicadores que no se cumplen (total o parcialmente) todas sus valoraciones han sido correctas en comparación con el análisis a priori. Las precisiones correctas que destacan en el contenido matemático refieren a la “poca manifestación de representaciones comparativas, tabulares y

gráficas” (FP^{II}26), o que no se definen o introducen términos como “...fracción, cantidad de magnitud, covarianza e invariancia, función y producto” (FP^{II}1). En lo cognitivo indican la necesidad de variar las estrategias de solución correctas a las situaciones y de advertir de posibles errores conceptuales y procedimentales que pueden surgir y que son característicos del tema.

En el aspecto afectivo, algunos FP asocian la poca promoción de la participación a que no se contemplan trabajos grupales, u oportunidades para que los estudiantes puedan expresarse e intercambiar opiniones. En lo interaccional, los FP mencionan como deficiencia la falta de tareas donde el alumno pueda comunicar y justificar los procedimientos que emplea para resolverlas, comparando su solución con la de otros compañeros. En lo mediacional los FP mencionan que no se fomenta el uso de herramientas que mejoren el entendimiento en las representaciones gráficas u otras que sirvan de apoyo en la resolución de los diferentes ejercicios. Finalmente, en lo ecológico, los FP opinan similar a FP^{II}26 “los autores de este recurso no relacionan el contenido de proporcionalidad con temas transversales, sino más bien con contextos realistas”.

La cantidad de FP que indican alguna fortaleza en general (17 en total) y de modo específico en cada idoneidad parcial, es menor que la cantidad de FP que indican deficiencias (22 en total). Cuando los FP identifican alguna fortaleza del texto, los indicadores de idoneidad que mencionan con mayor frecuencia (lo indican 7 FP) corresponden a la faceta interaccional: “el autor hace una presentación clara del tema” y “se contemplan momentos para que los estudiantes trabajen de forma autónoma”, siendo ambas características positivas indicadas por los FP incorrectas. En efecto, el análisis a priori puso de manifiesto que los autores del texto no hacen una presentación clara del tema debido a que emplean de forma inadecuada varios términos como sinónimos: razón-cociente, razón-proporción, indirecta-inversa, proporción-relación de proporcionalidad (Porrás et al., 2013, p.127), la definición de proporcionalidad

directa e inversa es circular (“incrementa de manera proporcional”) y no definen conceptos fundamentales como el de constante de proporcionalidad. Por otro lado, no se proponen tareas que permitan explorar, investigar, conjeturar, o usar varias herramientas para resolver problemas, lo que limita el trabajo autónomo del alumno.

En la faceta epistémica cuatro FP señalan oportunamente que “la relación multiplicativa es explícita en diferentes contextos propuestos” y cinco indican que “el nivel de lenguaje es adecuado para los alumnos”. Mientras que en lo cognitivo cuatro FP mencionan correctamente que “existen instrumentos de evaluación” y en lo ecológico cinco FP indican que “los contenidos permiten la formación socio-profesional”.

En la Tabla 6.5, mostramos la frecuencia de FP según las categorías definidas en la sección de análisis, para determinar el grado de corrección de sus respuestas a la consigna 2. Se aprecia que más de la mitad de FP responden *adecuadamente* en las facetas cognitiva, afectiva y ecológica. Sin embargo, en las facetas epistémica e interaccional destacan las valoraciones *nada adecuadas*.

Tabla 6.5

Frecuencia de FP según nivel de adecuación de sus respuestas a la consigna 2 (n=28)

Idoneidades parciales	Nivel de pertinencia		
	Adecuada	Poco adecuada	Nada adecuada
Epistémica	4	13	11
Cognitiva	24	2	2
Afectiva	16	8	4
Interaccional	12	6	10
Mediacional	13	9	6
Ecológica	22	1	4

Finalmente, en la Tabla 6.6, puede verse que, aunque la mayoría de los participantes hacen una valoración adecuada en más de la mitad de las facetas, sólo 11 de los 28 FP concluyen que la idoneidad general es baja, coincidiendo con la valoración experta.

Tabla 6.6

Cantidad de respuestas adecuadas por facetas según grado de adecuación de idoneidad general

Valoran adecuadamente	Idoneidad general			Total
	Media	Baja	No responde	
Todas las facetas	0	2	0	2
Al menos tres facetas, pero no todas	6	9	4	19
Menos de tres facetas	4	0	3	7

Para valorar el grado de adecuación global de la lección, 21 FP se basan en las valoraciones otorgadas a las idoneidades parciales, siendo la mayoría de las respuestas (de 15 FP) de tipo cuantitativo. Siete FP mencionaron que ciertas facetas (normalmente la epistémica y la cognitiva) deben tener mayor peso, ya sea porque las consideran más relevantes o porque el número de indicadores que se incluyen en la guía es mayor. Por ejemplo, FP^{II}27 indica al respecto:

De forma general en consideración a las valoraciones de cada una de las 6 facetas, se puede observar como 3/6 son bajas y 2/6 son medias, presentando así una mayor inclinación en la evaluación general entre media y baja. Ahora bien, se ve de igual forma que la faceta epistémica tiene un grado de idoneidad bajo y esta cuenta con una mayor cantidad de indicadores que las otras facetas, por lo que se podría decir que altera con mayor fuerza el grado de idoneidad total, por lo que concluyó que la idoneidad de la lección es baja.

4.1.3. Progresión en el aprendizaje

Considerando los análisis de las tareas inicial y final, sobre la idoneidad didáctica en cada una de las seis facetas, evaluamos en qué medida el uso de la GALT-proporcionalidad y la formación facilitada permite a los FP progresar en la competencia reflexiva y su aprendizaje en los siguientes sentidos:

Autocorrección. Se trata de detectar si hay respuestas de FP que reflejaron una valoración incorrecta de la lección en alguna faceta (en este caso en las facetas epistémica, interaccional y ecológica) en el análisis pre-formación, pero que a posteriori se modifican correctamente.

Ampliación de referentes. Se pretende ver en qué medida se amplían las características positivas o negativas finalmente indicadas de modo correcto por los FP en su evaluación de la idoneidad didáctica de la lección.

Se examinan las respuestas a las encuestas *Doodle* de valoración del grado de adecuación de la lección, pre y post formación, para determinar cómo evoluciona y si coincide con la puntuación otorgada por el equipo investigador. A continuación, se describen los principales resultados del análisis y se muestran ejemplos prototípicos de respuestas correctas en cada una de las facetas.

Faceta epistémica

Autocorrección. Como hemos indicado antes, ocho de los FP valoraron incorrectamente la adecuación de los conceptos en la lección. Tras la formación siete de ellos precisaron pertinentemente que los conceptos no se presentan de forma clara. Por ejemplo, FP^{II}16 que opinaba en la tarea inicial que se “proporciona claramente las definiciones”, posteriormente afirma que “...tampoco se diferencia entre razón, fracción ni cociente, al contrario, en la 127 en la definición de proporción se define como “la razón (o cociente) entre las magnitudes” sin dejar en claro nada de esto”.

Ampliación de referentes. Tras la formación, la frecuencia de participantes (12 FP) que identifican que los conceptos fundamentales de la proporcionalidad no se presentan de manera clara y correcta es mayor que en la tarea inicial (7 FP). Por ejemplo, sugieren:

... mencionan que razón y cociente son lo mismo. La definición de proporcionalidad directa e inversa están incompletas. Se dice que, si tenemos más en A y más en B entonces es proporcionalidad directa, pero esto es solamente una condición necesaria y no suficiente (FP^{II}10).

Después de la formación los FP han reflexionado sobre la poca presencia de situaciones introductorias y la carencia de problemas que lleven a distinguir comparaciones multiplicativas de aditivas (seis y siete FP en cada caso). Con relación al lenguaje, en la tarea inicial, sólo un FP había reconocido la falta de representaciones gráficas en la lección como una deficiencia. Tras la formación, once FP más reconocen la poca diversidad de representaciones para modelizar la proporcionalidad directa o inversa o para distinguir entre dichas relaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, FP^{II}26 indica que "... se encontraron conflictos importantes con relación a la [...] poca manifestación de representaciones comparativas, tabulares y gráficas..."

Cabe mencionar que los FP lograron reconocer deficiencias importantes en la lección que no habían considerado en la tarea previa. Por ejemplo:

- Las situaciones resueltas no involucran relaciones multiplicativas dentro y entre las cantidades de magnitudes; no se usan las representaciones adecuadas para distinguir dichas relaciones (ocho FP).
- No se presentan propiedades fundamentales de las funciones de proporcionalidad directa e inversa de forma clara y correcta (seis FP).
- No se consideran situaciones cuyos modelos subyacentes comparta ciertas características, pero no todas, con la función de proporcionalidad (cinco FP).
- Los procedimientos (regla de tres y reducción a la unidad) no se presentan de manera clara ni justificada (cinco FP).

Faceta cognitiva

Ampliación de referentes. Tras la formación, 18 FP aumentaron considerablemente sus referentes al valorar la lección desde el punto de vista cognitivo, indicando que en la lección no se promueven diversas estrategias de resolución correctas (13 FP), no se prevén errores o dificultades (11 FP), o que no se existen suficientes actividades de ampliación y refuerzo (5 FP), aspectos que no se consideraron en absoluto de manera previa a la formación. Por ejemplo, FP^{II9} opina que

Existen fortalezas con relación a la dificultad de los ejercicios, debido a que tiene una dificultad manejable, en la que el estudiante no tendrá problemas y que cumple con dejar trabajo extra-clase. Después, lo que encontramos son deficiencias como, por ejemplo, el hecho de no advertir de los posibles errores o dificultades que pueden tener los estudiantes a la hora solucionarlos.

Faceta afectiva

Ampliación de referentes. Como hemos mencionado, en la actividad inicial, diez FP habían identificado rasgos positivos de la lección en el aspecto motivacional, pero ninguno señaló debilidades al respecto. Después de la formación, 22 FP mencionan de manera pertinente carencias en los componentes de actitudes, emociones o creencias. Por ejemplo, FP^{II9} afirma:

En la faceta afectiva se vieron importantes deficiencias en los componentes de emociones, actitudes y creencias. Entre las más relevantes están la ausencia de situaciones que motiven al estudiante en cuanto a la resolución de los problemas, ausencia de un espacio para que expresen lo que sienten con respecto al tema, o el interés por generar en los estudiantes un sentimiento de amor y no de odio hacia las matemáticas. Esto justifica que el grado de idoneidad sea bajo.

Faceta mediacional

Ampliación de referentes. Tras la formación 22 FP contemplaron debilidades pertinentes relacionadas a la falta de uso de recursos materiales (21 FP) o de referencias (12 FP), o que la secuenciación de los contenidos no es correcta (cinco FP). Por ejemplo, FP^{II}10 indica que “no se solicita uso de tecnología de ningún tipo, o concretamente de ningún material manipulativo, además podemos ver como la secuencia de los contenidos no se abarca en su totalidad”. Dado que de manera previa a la formación ningún participante valoró la lección desde este punto de vista, podemos considerar un avance en sus aprendizajes.

Faceta interaccional

Autocorrección. Un total de 12 FP afirmaron inicialmente de modo incorrecto que la lección analizada organiza y expone de manera adecuada el tema, basándose en la estructura “primero ejemplificación de los conceptos y después ejercitación”, omitiendo deficiencias relevantes en cuanto a la claridad de los ejemplos y el análisis de las relaciones en forma gráfica. Tras la formación, cinco de estos FP cambian de opinión respecto a su valoración previa. Por ejemplo, FP^{II}16 que indicaba en su valoración inicial: “la lección si es adecuada para abordar el tema de proporcionalidad a nivel de séptimo año, debido a que proporciona claramente las definiciones, además de brindar una cantidad amplia de ejemplos”, posteriormente afirma pertinentemente que “no enfatiza algunos conceptos claves del tema como por ejemplo magnitud que es mencionado en la presentación lo cual podría restarle claridad a la presentación del tema”.

Ampliación de referentes. Tras la formación, 19 FP lograron precisar deficiencias en relación con el poco uso por parte del autor de recursos argumentativos para explicar los contenidos, que no se busque la flexibilidad y el consenso en base a argumentos matemáticos o la carencia de tareas que motiven la interacción entre pares. Los FP sugieren de manera similar a FP^{II}4 que:

Presenta bastantes debilidades a la hora de proponer tareas grupales, no se presenta correctamente el tema, no hay argumentos que capten la atención del estudiante. La mayoría de los indicadores tienen una valoración numérica 0 por lo que considero que tiene un grado de idoneidad interaccional bajo.

Faceta ecológica

Autocorrección. De manera inicial, sólo cuatro FP valoraron aspectos de esta faceta en la lección. Las descripciones eran poco adecuadas, estaban basadas en sus propias creencias y descalificaban la presencia de situaciones en contextos no matemáticos. En el análisis post-formación, dos de estos FP reflexionan sobre su limitada visión inicial a contenidos meramente matemáticos y que después se ve enriquecida con nuevos aspectos en esta faceta. Así, FP^{II}21 afirma que tras la formación concede “una mayor importancia a temas que antes no consideraba importantes en un libro de matemáticas como valores democráticos, respeto, tolerancia, etc.”.

Ampliación de referentes. En la tarea post-formación, 17 FP han logrado ampliar los referentes para precisar de manera adecuada y objetiva tanto debilidades como potencialidades de la lección. Por ejemplo, FP^{II}3 afirma que “con respecto a las fortalezas, se puede mencionar el componente de adaptación socio profesional, [...] en cuanto a las debilidades, se puede notar la educación en valores”. Además, en esta ocasión siete FP han considerado como característica la adaptación a las directrices curriculares, aspecto que no tuvieron en cuenta en el análisis previo. Por ejemplo, FP^{II}10 indica que, si bien el currículum “solicita que se dé una representación variada de los contenidos, el libro no lo hace, además no se busca establecer una relación con otros ejes interdisciplinares”.

4.1.4. ¿Cambian los futuros profesores de opinión al valorar la lección?

Después de la lectura inicial de la lección, los FP completaron una encuesta *Doodle* en la que calificaron la adecuación de la lección en la escala 1(muy mala)-5(excelente). Tras aplicar la guía para analizar la lección y emitir un juicio razonado sobre su idoneidad, se pidió

que volvieran a responder a la encuesta, justificando su cambio de opinión en la valoración si lo hubo. Mencionemos que tras realizar el análisis a priori aplicando la GALT-proporcionalidad, el equipo investigador valoró la lección según esta escala como “2 MALA”.

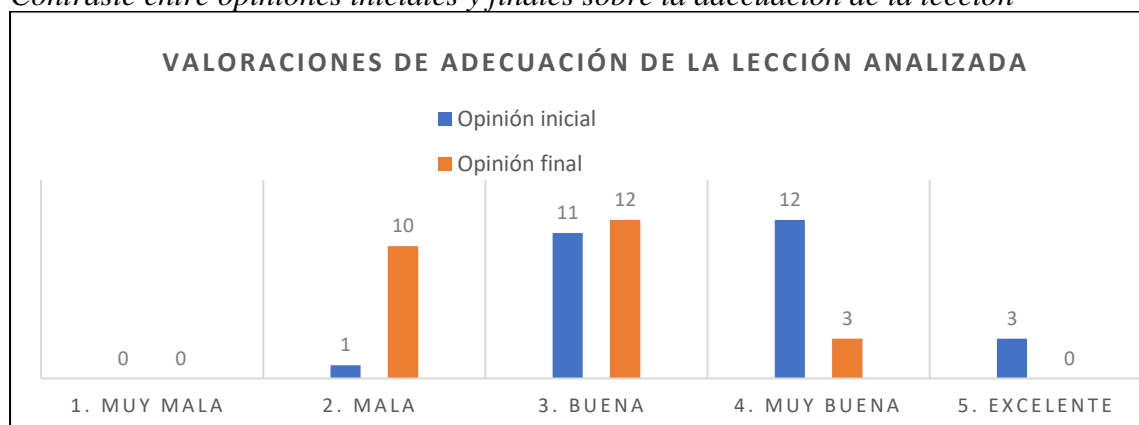
En la Figura 6.5 puede verse el contraste de las valoraciones dadas por los FP a través de dicha encuesta antes y después de la formación. A la encuesta inicial respondieron 27 FP y 25 FP a la encuesta final. Todos los cambios de opinión (16 en total) suponen una calificación menor en relación con la valoración realizada pre-formación. La mayor frecuencia de cambios de opinión ocurre en los casos de “buena” a “mala” y de “muy buena” a “buena”. Los FP que mantienen su opinión son nueve, de los que seis lo hacen al valorar la lección como “buena”.

La mayoría de FP (24 en total) afirmaron haber cambiado de opinión sobre las características que debería tener un buen libro de matemáticas, mencionando que antes tenían una visión reducida al aspecto matemático. Por ejemplo, FP^{II}25 indicó “noté que un libro de texto debe tener más que una definición y una lista larga de ejercicios (esta era mi idea general)”. Otros, atribuyeron sus cambios de opinión a la revisión de sus creencias sobre que los libros de texto y en general los recursos didácticos estaban “bien hechos”. Por ejemplo, FP^{II}8 manifiesta que:

...antes mantenía la idea de que los libros (en teoría) son realizados por personas expertas en el tema, siempre están correctamente modelados para que el estudiante aprenda. Con esta exploración me queda bastante claro que no. [...] Me queda bastante claro que [los libros de texto] no necesariamente van a cumplir con todo lo necesario.

Figura 6.5

Contraste entre opiniones iniciales y finales sobre la adecuación de la lección



Fuente. Elaboración propia.

Los FP justificaron su cambio de opinión en base a la visión más completa sobre aspectos importantes en los libros de texto lograda con la formación y sobre los que antes no habían reflexionado. Por ejemplo, FP^{II}27 afirma:

Mi opinión si cambió. Inicialmente no consideré que se pudiera evaluar la lección de un libro con tanta profundidad como se hace con el apoyo de la idea de idoneidad. Ahora conociéndola, me doy cuenta de que [evaluar la lección] supone ir más allá de si lo que se incluye está correcto o no, sino que también se debe de considerar la ausencia de elementos en la misma.

4.1.5. Síntesis de resultados

En general podemos afirmar que todos los FP han progresado en la competencia de análisis de la lección tras la formación (Tabla 6.7). En efecto, la mayoría (25 FP) han ampliado los criterios que consideran importantes valorar en las diferentes facetas, siendo la afectiva, mediacional y epistémica en las que se registra mayor aumento de referentes tras la formación (al menos 21 FP en cada caso). Además, para 20 FP, la ampliación de criterios se relaciona con cambios de opinión, ya sea respecto a cómo habían valorado un aspecto parcial de la lección (autocorrección) o bien cómo valoraron la lección globalmente (encuesta Doodle).

Tabla 6.7

Frecuencia de participantes según consecución progresos en el aprendizaje (n=28)

Logros de aprendizaje	Frecuencia
Sólo amplían los referentes en al menos 2 facetas	5
Amplían referentes en al menos 2 facetas y su valoración global es más pertinente	9
Se autocorrijen y amplían las características en al menos 2 facetas	4
Se autocorrijen, amplían las características en al menos 2 facetas y su valoración global es más pertinente	6
Otros logros	4

En la categoría “Otros logros” se consideran cuatro FP que dan una valoración cuantitativa correcta en base a la cantidad de indicadores según su grado de cumplimiento correspondiente (total:2, parcial:1, nulo:0) o bien el cálculo (sumas o promedios) de las valoraciones, en al menos dos facetas que no consideraron previamente. Por ejemplo, FP^{II}16 indicó adecuadamente sobre la faceta interaccional que “la mayoría de los indicadores tienen una valoración numérica 0, por lo que considero que el grado de idoneidad es baja”. Similarmente, FP^{II}18 afirmó de modo adecuado que “la idoneidad cognitiva es media debido a que obtuvo 7 puntos de un total de 16 puntos”.

Como se ve reflejado en esta sección, los resultados permiten mostrar tanto la eficacia de esta herramienta teórico-metodológica, como la importancia de incorporar el aprendizaje reflexivo en la formación de profesores.

4.2. Evolución de la competencia para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material

En esta sección pretendemos averiguar si la formación permite mejorar la competencia de los FP en la identificación de conflictos en la lección y les orienta en la toma de decisiones sobre la gestión del material. Para ello mostramos qué carencias indicaron los participantes en la actividad de exploración inicial, cuáles reconocieron de manera mayoritaria tras el análisis aplicando la GALT-proporcionalidad y cuáles fueron sus propuestas para solventarlos. También analizamos sus respuestas a las cuestiones sobre el modo de uso y propuestas o sugerencias de cambio antes y después de la formación.

4.2.1. Identificación inicial de conflictos en la lección

Para evidenciar el avance de los FP en la competencia de identificación de conflictos, referimos a los aspectos que precisaron en la tarea de exploración inicial. De los 28 participantes, 11 no indicaron errores o elementos que pudiera ser una limitación en el aprendizaje de los alumnos; el resto reconocieron correctamente (según el análisis a priori efectuado por el equipo investigador) conflictos que clasificamos en la Tabla 6.8 según las facetas de la idoneidad a las que afectan.

Tabla 6.8

Categorías y frecuencia (Fr.) de conflictos de la lección correctamente identificados por los FP pre-formación, (n=17)

Debilidades de la lección <i>Proporción</i>	Fr.
Faceta epistémica	14
Algunos ejemplos y/o ejercicios no son claros.	5
Los procedimientos no se presentan de manera correcta.	4
Lenguaje poco adecuado al nivel educativo, falta de representaciones.	3
Las definiciones que se plantean no son claras.	7
Faceta cognitiva	10
No se contemplan los conocimientos previos necesarios.	5
Algunos contenidos y/o ejercicios pueden ser difíciles para los alumnos.	5
Faceta interaccional	6
La presentación del tema no es clara, se presentan ideas desconectadas sin profundizar, la organización es confusa.	6

A pesar de que las carencias que indican los FP (Tabla 6.8) con relación a la faceta epistémica son todas correctas, algunos FP (5 en total) hacen observaciones superficiales y carentes de justificación. En este caso los FP emplean términos para calificar los ejercicios, procedimientos, conceptos, o el lenguaje matemático como “confusos”, “poco claros”, “ambiguos”, “cortos”, “no útiles”, “deficientes”, De los 17 FP que indicaron algún conflicto, nueve si explican el conflicto que señalan en el contenido matemático. Por ejemplo, en cuanto a la adecuación de los ejemplos o ejercicios, FP^{II}24 precisa correctamente que:

en el primer ejercicio, inciso h de la página 129, encuentro un error, pues indica que “Una sandía tiene el costo de 800 colones y por 3 sandías el precio es de 2 000 colones”,

lo esperado es que se trate de una proporcionalidad directa, en que cada sandía cueste 800 colones, y que por 3 el precio sea de 2400 colones, no de 2000, pues no se indica ningún tipo de descuento.

Respecto al lenguaje matemático, tres FP explican que puede ser conflictiva la falta de representaciones icónicas o que “es fundamental que el profesor explique adecuadamente el significado de estas letras [se refiere a la expresión $a \cdot b = k$] (lo que representan) porque pueden generar mucha confusión en las y los estudiantes” (FP^{II}13). En relación con la presentación de las definiciones, sólo cuatro FP refieren explícitamente que emplear como sinónimos los términos de “indirecta” e “inversa”, puede dar lugar a confusión en los alumnos.

En el aspecto cognitivo, sólo uno de los cinco FP que se muestran preocupados por la atención a los conocimientos previos, detallan cuáles serían relevantes de incluir: “volumen cilindro, perímetro del cuadrado, frecuencia, entre otros” (FP^{II}1). Además, algunos participantes creen que el carácter novedoso y abstracto de la proporcionalidad puede suponer dificultades de comprensión a los estudiantes.

En el aspecto interaccional, cuatro de los FP identifican debilidades en la presentación o explicación (cortas, inconclusas...) de algunos ejemplos. Por ejemplo, FP^{II}4 en referencia a los ejemplos de la Figura 6.6 indica que “solo se menciona una idea, pero no se continúa profundizando estos”. En efecto, puede observarse que el autor no introduce claramente los ejemplos, ni señala las magnitudes involucradas y las relaciones de proporcionalidad entre ellas. Los otros dos participantes que señalan un conflicto en esta faceta refieren a un orden no muy coherente y confuso.

Figura 6.6


Introducción a la proporcionalidad directa

Proporción directa


Cuando existen magnitudes que se relacionan de manera que cuando una aumenta la otra también se incrementa de manera proporcional y viceversa, entonces estamos ante una proporción directa.

Ejemplos

Un atleta da 6 vueltas en una pista en un tiempo de 9 minutos. A medida que incrementa la cantidad de vueltas, también aumentará la cantidad de tiempo transcurrido.



El precio de la gasolina super en agosto del año 2013 se encontraba en 769,61 colones por litro.



Litros	1	2	3	4	5	6
Precio	769,61	1 539,22	2 308,83	3 078,44	3 848,05	4 617,66

Fuente. Tomada de Porras et al. (2013, p. 127)

En cuanto a los conflictos indicados de manera incorrecta por los participantes, mencionamos que cuatro FP, descalifican la inclusión de preguntas fuera del contexto matemático (sobre valores y actitudes de un buen atleta) en una situación contextualizada que presenta el autor del texto. Sin embargo, lejos de ser un conflicto, garantizar una adecuada idoneidad ecológica supone, en particular, promover la educación en valores (Godino, 2013).

4.2.2. Reflexión inicial sobre el modo de uso de la lección

Para analizar las respuestas de los FP a la cuestión sobre el modo de uso de la lección (cuestión 2b de la tarea de exploración inicial), se han clasificado sus respuestas en generales (18 FP) y específicas (diez FP). Una respuesta se considera general cuando no refiere a un aspecto específico de la lección que se pidió analizar; por ejemplo, FP^{II}2 indica que usaría la lección: “como una guía y resolviendo junto con los estudiantes los ejercicios para que todo quede claro”. Por el contrario, una respuesta específica implica que los FP mencionan cómo usarían partes concretas de la lección, por ejemplo:

Únicamente como práctica para los estudiantes como el ejercicio 2 de la pág. 129 (en lugar de situaciones hipotéticas, que sean situaciones de la vida cotidiana de cada

estudiante) y el ejercicio 5 de la pág. 132. No usaría el extra-clase como tal, podría usar un ejercicio de la última parte. (FP^{II}18)

En cuanto a las partes del libro de texto que emplearían los FP, todos indican (ya sea como respuesta general o específica) que usarían los ejemplos o ejercicios del libro y nueve FP mencionan que usarían las definiciones. Estos FP ponen de manifiesto que utilizarían las definiciones, ejemplos o ejercicios tal cual están en el libro, sin identificar que en varios ejemplos y ejercicios no se explicita la condición de regularidad que garantiza que exista la relación de proporcionalidad (Gairín y Oller, 2012), lo que puede ser fuente de conflictos de aprendizaje relevantes. Tampoco reflexionan sobre la adecuación de las definiciones. Por ejemplo, en el libro se propone que “si tenemos dos variables ‘a’ y ‘b’ relacionadas de forma tal que, si aumenta una, lo hace también la otra, entonces nos encontramos con una proporción directa” (Porrás et al., 2013, p.127). Es decir, no se define claramente la relación multiplicativa de la proporcionalidad directa e inversa y sólo precisa una condición necesaria pero no suficiente para determinar la relación de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2020; Lamon, 2007).

En cuanto al modo de uso del texto, las respuestas ponen de manifiesto que todos los FP conceden gran importancia a las explicaciones del profesor necesarias para complementar a las del texto. Ocho FP refieren al trabajo en equipo, a promover la participación de los alumnos en la resolución de ejercicios, aspectos que son relevantes en cuanto el uso del libro como un recurso. Sin embargo, 22 de los FP no suelen proponer cambios concretos al contenido del libro ni considerar las debilidades que habían precisado en la respuesta a la cuestión anterior para reflexionar sobre ello. Los otros 6 FP sugieren modificaciones, pero sólo 2 de ellas son concretas (por ejemplo, FP^{II}10 indica “...eliminaría por completo la página 130 y sustituiría los ejemplos, concretamente no establecería ‘Pasos’ ”).

4.2.3. Identificación de conflictos tras el análisis didáctico de la lección

Aunque todos los participantes indicaron varios conflictos que habían sido previamente categorizados por el equipo investigador y todos los desajustes detectados los consideramos apropiados (segunda columna en las Tablas 6.9, 6.10 y 6.11, a continuación), observamos que no todas las propuestas de solución a los diferentes conflictos seleccionados por los participantes son igual de pertinentes. Por este motivo proponemos la siguiente categorización de estas:

- *no pertinente*, si no da solución al conflicto;
- *de pertinencia media*, si la solución que propone no es del todo adecuada o carece de fundamentación didáctico-matemática;
- *pertinente*, si da respuesta al conflicto en base a conocimientos didáctico-matemáticos específicos.

Por ejemplo, ocho FP plantean como conflicto que la lección no incluyen determinados procedimientos, fundamentalmente, los de reducción a la unidad o regla de tres. Ante este conflicto, cinco FP plantean como solución describir el procedimiento por medio de alguna “fórmula” o incluir algún problema que se deba resolver por medio de dichos procedimientos. Por ejemplo, para FP^{II}2 “lo recomendable es colocar la fórmula que se vaya a necesitar, de esta manera el estudiante solo tendrá que encargarse de aplicarla”, siendo una respuesta no concreta y no pertinente. Por otro lado, FP^{II}26 propone un problema concreto que resuelve por medio de la aplicación de regla de tres (ver Figura 6.7).

Figura 6.7

Propuesta de inclusión de procedimientos característicos (FP^{II}26). Pertinencia media.

Pedro quiere comprarle un ramo de flores a su novia María por su primer aniversario de noviazgo. Cuando va a comprar las flores, el vendedor le indica que 5 girasoles valen 7000 colones, sin embargo, Pedro quiere comprar 2 girasoles. ¿Cuánto dinero en colones deberá pagar? Recuerde: Cada girasol vale lo mismo.

Proporcionalidad inversa.

Regla de tres:

Girasoles Precio

5 → 7000

2 → t

Datos:

a= 5, b=7000, c=2, t=valor faltante.

Fórmula: $t = \frac{c \times b}{a}$

$t = \frac{2 \times 7000}{5}$ -Sustitución

$t = \frac{14\,000}{5}$ -Multiplicación en N

t= 2 800 -Simplificación fraccionaria

Respuesta: Pedro deberá pagar 2 800 colones por 2 girasoles.

En este caso, la respuesta se considera de pertinencia media, ya que, aunque aplica una regla de tres directa, el participante indica incorrectamente que la relación de proporcionalidad es inversa, aspecto que reitera en la justificación del cambio cuando afirma que “realice un ejercicio donde se explique paso por paso, lo que se debe llevar a cabo para determinar el valor faltante de la proporción inversa”. Por su parte FP^{II}16 plantea un problema de proporcionalidad directa, que resuelve aplicando la regla de tres correctamente, y un problema de proporcionalidad inversa que propone resolver aplicando reducción a la unidad (ver Figura 6.8). Se trata de una propuesta pertinente de solución al conflicto.

En las Tablas 6.9, 6.10 y 6.11 resumimos los conflictos detectados y sus frecuencias (Fr), así como las frecuencias de propuestas efectivas de solución a los conflictos en cada faceta epistémica, cognitiva e instruccional¹⁸, según las componentes a las que se vinculan y su grado de pertinencia (NP: No pertinente, PM: Pertinencia media, P: Pertinente). A continuación,

¹⁸ El término instruccional se usa para referirnos de forma conjunta a los aspectos mediacionales e interaccionales del proceso de enseñanza y aprendizaje.

mostramos ejemplos prototípicos de identificación de conflictos y sugerencias de solución a estos por parte de los participantes.

Figura 6.8

Propuesta pertinente de inclusión de procedimientos característicos (FP^{II} 16)

Procedimientos fundamentales de proporcionalidad

Reducción a la unidad:
 En el siguiente ejercicio de proporcionalidad inversa puede observar la resolución de este ejercicio utilizando reducción a la unidad.

Si 3 personas tienen agua para 6 días. ¿Para cuántos días tendrían 6 personas?

Cantidad de personas	3	6
Agua	6	x

¿Para cuántos días tiene agua una persona?

Una persona tendría agua para $3 \cdot 6 = 18$ días.

Entonces, ¿Para cuántos días tendrían agua 6 personas?

Seis personas tendrían agua para $\frac{18}{6} = 3$ días.

Respuesta: Tendrían agua para 3 días.

***De la misma forma sugiero realizar un ejemplo con un ejercicio de proporcionalidad directa y con otros procedimientos.

Cabe aclarar que, en todas las tablas, la categoría “otros” refiere a aquellos conflictos a los cuales no se han dado propuestas de solución, pero que si se han identificado correctamente.

En general, todos los FP identifican conflictos de modo correcto, indicándolos principalmente (17 FP) como ausencias en el grado de cumplimiento del indicador asociado a la GALT-proporcionalidad, o bien, reconociendo y describiendo los mismos. En el aspecto epistémico, todos los participantes identificaron correctamente algún conflicto, aunque sólo un 43, 33% de las soluciones a los conflictos que refieren son pertinentes.

Tabla 6.9*Conflictos epistémicos identificados por los FP y frecuencia (Fr.). Grado de Pertinencia.*

Componente	Descriptor del conflicto por componente de la faceta epistémica	Fr.	Propuesta de solución al conflicto			
			NP	PM	P	Total
Problemas	Existen ejercicios incorrectos.	5	0	2	2	4
	Muestra poco diversa y representativa de tareas.	6	1	1	2	4
	No incluye situaciones que permitan distinguir comparaciones multiplicativas de las aditivas.	14	1	1	1	3
	Faltan situaciones para distinguir relaciones de proporcionalidad directa e inversa.	2	0	0	1	1
	Las situaciones no involucran relaciones multiplicativas dentro y entre cantidades de magnitudes.	11	2	0	1	3
	No existen situaciones de cálculo mental sobre la proporcionalidad.	9	1	1	3	5
	Lenguajes	No se emplean diferentes tipos de representación de la relación de proporcionalidad o estas son incorrectas.	15	0	3	2
Conceptos	No se presentan de manera clara los conceptos fundamentales.	15	2	2	2	6
Proposiciones	No se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para identificar relaciones de proporcionalidad directa e inversa.	4	0	0	3	3
	No se presentan las propiedades fundamentales de las funciones de proporcionalidad directa e inversa.	11	1	1	0	2
Procedimientos	No se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad.	8	2	1	2	5
Argumentos	Las proposiciones y procedimientos no se explican y argumentan.	3	0	0	1	1
	No se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones por diversos tipos de razonamientos.	6	1	1	0	2
Procesos	No existen situaciones para que el alumno argumente y formule conjeturas sobre relaciones de proporcionalidad o las investigue.	15	0	4	7	11
Otros	No se usan representaciones para distinguir situaciones directamente proporcionales, inversamente proporcionales, ...	30	0	0	0	0
Total		153	13	21	26	60

Los conflictos mayormente identificados en relación con las situaciones-problemas corresponde a la falta de situaciones que permitan distinguir situaciones aditivas de las multiplicativas, un aspecto clave en el estudio del razonamiento proporcional (Shield y Dole, 2013). Sin embargo, únicamente tres FP proponen una solución concreta a este conflicto, de las que sólo es pertinente la que propone FP^{II}25 (Figura 6.9).

Figura 6.9

Propuesta de situación para diferenciar comparaciones aditivas y multiplicativas pertinente (FP^{II}25)

En este caso, buscaría un ejercicio para asignarlo a los estudiantes, como el siguiente: Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento “Repoblamos”. Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles. ¿Cuántos árboles habrá plantado María y cuántos habrá plantado Luis? Comenta como lo has averiguado.

Otro conflicto identificado por 11 de los participantes es que en la lección no se diferencian las relaciones multiplicativas dentro y entre las cantidades de magnitudes, lo que señalan en su mayoría como ausencia del indicador. En este caso sólo tres FP se plantean solucionar el conflicto indicado, dos de ellos sólo sugieren agregar una nota para aclarar estas relaciones en el texto sin dar más detalles, y FP^{II}25 propone de modo concreto incluir flechas en la representación tabular de la de la pág. 127 para precisar estas relaciones (ver Figura 6.10).

Figura 6.10

Propuesta pertinente de identificación de relaciones dentro y entre magnitudes (FP^{II}25)

	$\times 2$						
	↻						
Litros	1	2	3	4	5	6	
Precio	769,61	1539,22	2308,83	3078,44	3848,05	4617,66	
	↻						
	$\times 2$						

En cuanto a los demás conflictos del componente problemas, cabe destacar que cuatro FP mencionan correctamente y de modo específico conflictos con relación a algunas situaciones propuestas en el texto. Por ejemplo, mencionan de forma pertinente que los ejercicios 1h de la página 129 y el ejercicio 3 de la página 131 pueden originar confusión puesto que no son tareas de proporcionalidad, o que el ejercicio 2 de la página 131 presenta datos irrelevantes en el problema. Cabe destacar, que, en la tarea inicial, sólo un FP hizo referencia de modo específico a errores en las situaciones-problemas. También dos FP especifican que hay pocas tareas y que sólo se proponen situaciones algebraicas, tabulares y de valor faltante. Sus apreciaciones sobre el conflicto indicado son correctas, dado que como hemos mencionado previamente, desde la investigación se recomienda incluir situaciones vinculadas a los diferentes significados de la proporcionalidad: de comparación cualitativa, de semejanza y escalas, y situaciones que empleen el modelo de la función de proporcionalidad directa e inversa (Aroza et al., 2016; Burgos y Godino, 2020).

Más de la mitad los participantes (15 FP) identifican un conflicto en relación con el lenguaje matemático. En este caso 12 de los FP indican específicamente que en la lección no se usan representaciones gráficas para modelizar las relaciones de proporcionalidad. Este aspecto es efectivamente conflictivo principalmente porque en el currículo costarricense de secundaria (MEP, 2012) se contempla su estudio para séptimo año. En cuanto a las soluciones concretas al conflicto, sólo cinco de los 15 FP plantean una solución al conflicto, indicando la necesidad de añadir representaciones gráficas, si bien no especifican cuáles, o consideran sólo representaciones icónicas y no gráficas. Con lo cual únicamente dos repuestas se consideran pertinentes, como la de FP^{II}26 (ver Figura 6.11), quien plantea un problema que representa gráfica y tabularmente.

Figura 6.11

Propuesta de inclusión de representación gráfica pertinente (FP^{II}26)

Situación: En el hospital San Juan de Dios, en el año 2020 se establecieron 500 camas en la unidad de cuidados intensivos para pacientes con COVID. El primer día se internaron 50 pacientes en este espacio, si se siguen internando la misma cantidad de pacientes por día, entonces, ¿cuántos días deben pasar para que estén completas las 500 camas disponibles?

Resolución del ejercicio:

Aplicando la fórmula que plantea el libro para la proporcionalidad directa:

a= 500, que son la cantidad total de camas que hay en el hospital.

k=50, la cantidad de pacientes que se internan por día (constante).

b= días en los que se completan las 500 camas disponibles.

Desarrollo: $a = k \times b$

Sustituyendo los valores: $500 = 50 \times b$

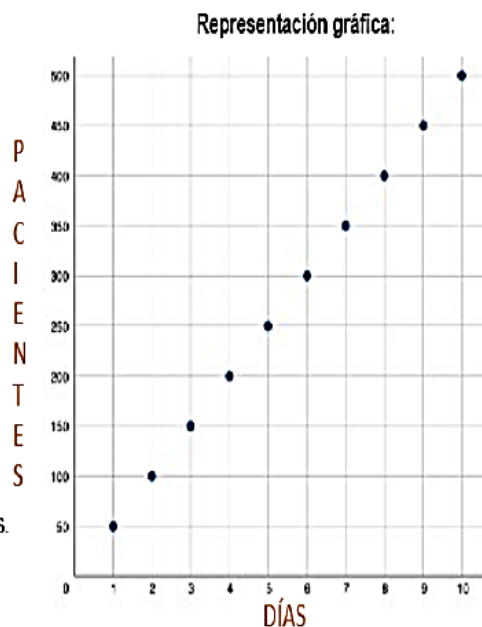
Despejando la variable b: $\frac{500}{50} = b$

Simplificando la fracción: $10 = b$

Respuesta: Para que estén las 500 camas ocupadas, deben transcurrir 10 días.

Representación tabular:

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pacientes	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500



En relación con los conceptos, nueve FP suelen referirse de modo específico a que no se define claramente razón, magnitud y constante de proporcionalidad, o bien indican que no se aclara que proporcionalidad indirecta o inversa son sinónimos. Las propuestas no pertinentes, corresponden a sugerencias sobre añadir los conceptos ausentes, sin hacer una propuesta concreta. Las soluciones de pertinencia media son aquellas en las que se proponen definiciones concretas; por ejemplo, FP^{II}20 para el concepto de razón “se refiera a la constante que se obtiene como resultado de comparar dos cantidades medibles (magnitudes)”, sin aclarar que la razón es una comparación multiplicativa. También se considera de pertinencia media la propuesta de FP^{II}16 (ver Figura 6.12) de definición de constante de proporcionalidad para la relación de proporcionalidad inversa.

Figura 6.12

Propuesta de definición de constante de proporcionalidad de pertinencia media (FP^{II}16)

Proporcionalidad inversa

Cuando se tienen dos variables que se relacionan, de manera que cuando una aumenta, la otra disminuye de manera proporcional y viceversa, entonces estamos ante una proporción inversa.

Formalicemos matemáticamente este concepto:

Si tenemos dos variables "a" y "b" y la multiplicación de ellas da una constante, entonces la proporción entre las variables "a" y "b" es inversa.

Notación matemática $a \cdot b = k$, k es una constante, se desprende también, $a = \frac{k}{b}$.

Fuente: Porras y Gamboa (2013)

NOTA :
"La razón o cociente entre las cantidades que se corresponden es siempre la misma; este cociente se llama **constante de proporcionalidad**" (Santillana, s.f, p.100)

Las soluciones pertinentes en este componente persiguen aclarar la relación entre los términos indirecta e inversa, sin embargo, ningún participante menciona que la definición no aclara que quiere decir "incrementa de manera proporcional", resultando en una definición "circular" y poco precisa.

Cuatro de los 15 FP que identifican conflictos en relación con las proposiciones, mencionan que no se establecen las condiciones suficientes necesarias y suficientes para garantizar una relación de proporcionalidad, en este caso lo hacen de modo justificado, refiriendo a ejemplos específicos donde esto no se cumple en el texto. Todas las soluciones al conflicto en este caso son pertinentes. Por ejemplo, FP^{II}11 y FP^{II}25 indican que agregarían la condición de regularidad que no se explicita en los ejercicios 5b, 5c (ver Figura 6.13) de la página 136. Proponen de modo concreto que cambiarían la pregunta indicando que "en una empresa distribuidora 6 empleados que tienen el mismo rendimiento tardan 3 horas en descargar un camión de producto. ¿Cuánto tiempo tardarían 9 empleados con el mismo rendimiento?" (FP^{II}25).

Por su parte, FP^{II}10 indica como conflicto que "se establece como suficiente que: si más en una cantidad entonces más en la otra implica una relación de proporcionalidad". Al respecto,

plantea que como solución “se puede definir magnitudes directamente proporcionales, como: dos magnitudes son directamente proporcionales sí al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número”. No obstante, dicha definición se basa sólo en la relación multiplicativa escalar y no en la funcional (Lamon, 2007). Los otros 11 FP señalan, como ausencia del indicador correspondiente, que no se establecen las propiedades fundamentales de las funciones de proporcionalidad. En este caso, ninguna solución al conflicto es pertinente.

Figura 6.13

Problemas planteados al alumno donde no se explicitan las condiciones de regularidad

5. Resuelva los siguientes problemas de proporción directa e inversa. Se debe justificar mediante una estrategia de solución que fundamente su respuesta.		
a) Un criador de cabras tiene 4 de ellas, las cuales comen 50 kg de alimento por semana. Si él tuviera 80 cabras, ¿cuánto alimento requiere?	b) 12 peones duran 10 horas en coger todo el café de un terreno de 1 200 metros cuadrados. Si la cuadrilla fuese de 20 peones. ¿Cuánto hubiesen tardado?	c) En una empresa distribuidora 6 empleados tardan 3 horas en descargar un camión de producto. ¿Cuánto tiempo tardarían 9 empleados?

Fuente. Tomada de Porras et al. (2013, p.136)

Con relación a los procesos, más de la mitad de los participantes encuentran conflictivo, que no existan situaciones que permitan al alumno establecer conjeturas y argumentar sus soluciones. La identificación del conflicto se hace mayoritariamente como ausencia del indicador correspondiente en la GALT-proporcionalidad. En este caso, encontramos siete respuestas pertinentes que corresponden sobre todo a propuestas de situaciones nuevas que demandan de modo específico al alumno que argumente la respuesta. Otros FP sugieren añadir a problemas específicos de la lección el requerimiento de justificar “el porqué de las proporciones usadas y el porqué de los razonamientos” (FP^{II}19), promover que los estudiantes expongan sus soluciones al resto de la clase, o dialoguen al respecto (“reúnase con 5 compañeros, explique, argumente (diálogo) dicho problema, para que verifiquen si la situación está planteada correctamente”, FP^{II}26). Los demás conflictos que han detectado los

participantes en la faceta epistémica son referidos como carencias en el indicador de la GALT-proporcionalidad, tal y como se resume en la Tabla 6.9.

Tabla 6.10

Conflictos cognitivos identificados por los FP y frecuencia (Fr.). Grado de Pertinencia.

Componente	Descriptor del conflicto por componente de la faceta cognitiva	Fr.	Propuesta de solución al conflicto			Total
			NP	PM	P	
Conocimientos previos	El texto no contempla los conocimientos previos necesarios de acuerdo con el nivel educativo.	14	4	2	0	6
Diferencias individuales	No se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	6	0	0	1	1
	No se promueve el uso de diversas estrategias correctas.	14	6	2	4	12
Progresión dificultad	No se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad.	7	2	1	0	3
	No se advierten de errores y dificultades de los alumnos.	16	3	0	0	3
Evaluación	No se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.	4	1	0	1	2
Otros	Los contenidos pretendidos no tienen una dificultad manejable.	8	0	0	0	0
Total		69	15	5	7	27

Un total de 23 FP identificaron correctamente algún conflicto cognitivo, sin embargo, sólo un 28% de las soluciones este tipo de conflictos son pertinentes. Como se aprecia en la Tabla 6.10, la mitad de los FP reconocen como aspecto conflictivo que no se contemplen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la proporcionalidad (en todos los casos lo referido como ausencia del indicador). Aquellos FP que proponen solución a dicho conflicto lo hacen en su mayoría de modo no pertinente indicando únicamente que podría incluirse recuadros llamativos con definiciones necesarias, pero sin indicar cuáles. Sólo dos de ellos plantean explícitamente incluir la definición de razón y cociente. También 14 FP identifican correctamente la poca diversidad de estrategias para atender a las diferencias individuales (“falta de alternativas para resolver los problemas”, FP^{II}12). De los 12 FP que proponen una solución al conflicto, sólo cuatro lo hacen de manera pertinente. Para ello, diseñan una tarea

especifica que solicitan al alumno resolver por medio de regla de tres o reducción a la unidad o bien recurriendo a diferentes representaciones (tabulares y gráficas).

Con relación a la progresión de dificultad, la mayoría de FP mencionan como un conflicto que no se advierta de errores y dificultades a los alumnos. Sin embargo, ningún FP plantea una solución concreta al mismo. Los demás conflictos cognitivos identificados por los participantes se establecen como ausencia del indicador correspondiente tal y como se describen en la Tabla 6.10. Únicamente con relación a la dificultad de las situaciones propuestas, cuatro FP precisan, por ejemplo, que puede resultar difícil para los alumnos el incluir conceptos como frecuencia de onda en la situación de la página 133 del texto.

Tabla 6.11

Conflictos interaccionales identificados por los FP y frecuencia (Fr.). Grado de Pertinencia.

Componente	Descriptor del conflicto por componente de la faceta instruccional	Fr.	Propuesta de solución al conflicto			
			NP	PM	P	Total
Interacción autor-alumno	El autor no hace una presentación adecuada del tema (presentación clara, organizada...)	6	0	0	2	2
	No se promueven situaciones para buscar consensos con base al mejor argumento.	8	1	0	1	2
Interacciones discentes	No se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes puntos de vista con argumentos matemáticos.	20	4	3	3	10
Autonomía	No se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos, investigan y conjeturan...)	7	1	0	1	2
Otros	La secuenciación de contenidos y actividades no es adecuada...	5	0	0	0	0
Total		46	6	3	7	16

En lo instruccional, 26 FP plantean alguna disparidad, aunque sólo son pertinentes menos de la mitad de las soluciones que proponen a dichos conflictos. Como se aprecia en la Tabla 6.11, la mayoría de FP identifican como conflicto que no se proponen tareas que

favorezcan el diálogo o debate entre los alumnos. Indican para ello la carencia de trabajos en grupo que permita generar espacios para que se brinden estas oportunidades. En cuanto a las soluciones que plantean, la mayoría sólo plantean de modo muy general que se realicen tareas grupales por lo que no se consideran pertinentes. Sólo tres FP plantean o refieren a alguna situación específica para dar solución concreta al conflicto, como lo hace FP^{II}14 (ver Figuras 6.12 y 6.14).

Figura 6.14

Propuesta pertinente de trabajo grupal, debate y diálogo pertinente (FP^{II}14)

Se podría tomar un ejercicio como el 5 de la página 136 y solicitarles a los estudiantes que hagan tríos donde cada uno resuelva uno de los ejercicios y exponga su solución a los demás.

Por otro lado, FP^{II}12 indica de modo específico que en la lección “se aborda el tema de las proporciones desde el punto de vista aritmético, pero adolece de un abordaje desde el punto de vista algebraico funcional”, aspecto que también es correcto según el análisis a priori. Como se describe en la Tabla 6.11 los demás conflictos interaccionales identificados por los participantes son planteados como carencia del indicador correspondiente.

4.2.4. Reflexión final sobre el modo de uso de la lección

Como antes, para analizar las reflexiones de los FP sobre el modo de uso de la lección (cuestión 4 de la tarea final), se clasificaron sus respuestas en generales y específicas. Se observa que, un total de 23 FP proponen cambios o mejoras al contenido del libro cuando responden a esta cuestión (se registraron 95 sugerencias en total), considerando las debilidades que habían precisado en la respuesta a la cuestión anterior para reflexionar sobre ello. La mayor frecuencia de sugerencias de cambios se plantea con relación a la faceta epistémica (54 en total), seguida de la cognitiva (19 en total) e instruccional (16 en total). En la Tabla 6.12, puede

observarse el total de respuestas de cada tipo, así como una categorización de estas según propongan cambios a la lección en una o más facetas, o no los sugieran.

Tabla 6.12

Tipología de respuestas sobre modo de uso de la lección

	Tipo de respuesta		
	General	Específico	Total
Proponen cambios sólo en la faceta epistémica		4	4
Proponen cambios sólo en 2 facetas		10	10
Proponen cambios sólo en 3 facetas	3	3	6
Proponen cambios en más de 3 facetas	1	2	3
No proponen cambios	3	2	5
Total	7	21	28

Sólo se registran tres sugerencias de mejora para cada una de las facetas afectiva y ecológica, las cuales refieren a incluir espacios de discusión para que los alumnos puedan manifestar sus emociones y creencias sobre la matemática (FP^{II}26) o bien que los contenidos se relacionen con otros, por ejemplo, con la geometría (FP^{II}9). Como se observa en la Tabla 6.12 la categoría que más frecuencia tiene es aquella en donde los participantes responden sugiriendo cambios en al menos dos facetas, que suelen ser la epistémica y cognitiva (5 en total) o bien la epistémica e instruccional (4 en total). Cuando se plantean cambios en tres facetas estas suelen ser la epistémica, cognitiva e instruccional (5 en total). El siguiente es un tipo de respuesta general en la que se proponen cambios en tres facetas (epistémica, cognitiva e instruccional):

Cambiaría la redacción de los conceptos, a una más clara y completa.

Proponer ejercicios para trabajar en clase, esto puede ayudar al estudiante para comprender mejor el tema.

Cambiaría el hecho de que no se plantean estrategias de autoevaluación debido a que estas ayudarían a que el estudiante se conozca mejor (FP^{II}4).

En cuanto a las partes del libro de texto que emplearían los FP, todos indican como antes que emplearían ejemplos, ejercicios o definiciones, pero en esta oportunidad casi la mitad

de los FP (12 en total) sí han reflexionado correctamente sobre la pertinencia o no de los ejemplos y definiciones que usarían. Por ejemplo, FP^{II}20 indica que:

...tomaría toda la página 129 y le cambiaría ciertos aspectos... se debe incluir la condición de regularidad, ya que no está presente en ninguno de los ejercicios...Luego de esto, a la actividad 2 le añadiría que cada estudiante tenga que comunicar sus ideas y estrategias con sus compañeros, para reforzar la justificación de su razonamiento y también para que puedan escuchar el de los demás.

Además, se observa que dicho participante detalla de manera correcta y específica cambios en las facetas epistémica e instruccional que son importantes para una buena enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad (la condición que permite garantizar la aplicabilidad de dicha relación, y la pertinencia de comunicar y debatir sobre diversas estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad).

4.3. Análisis retrospectivo del ciclo de diseño

Siguiendo el enfoque metodológico de una investigación de diseño, es necesario tomar conciencia de las limitaciones y desafíos que han de abordarse en futuras intervenciones. Esto supone, realizar una valoración de la idoneidad didáctica del proceso formativo implementado con los futuros profesores de matemáticas, en cada una de sus facetas. En las facetas cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, es importante la información obtenida a través de la encuesta de valoración de la experiencia que cumplimentaron los 28 FP. De manera general, la puntuación mediana en todos los ítems fue superior a 4 (excepto en el ítem 7 que obtuvo una media de 3.7) y la moda en todos ellos es 4 o 5.

Idoneidad epistémica. Las tareas propuestas involucran a los futuros profesores en la identificación de fortalezas y debilidades de la lección y la formulación de argumentos sobre sus juicios de valor. En definitiva, el diseño incluye conocimientos didáctico-matemáticos en relación con el contenido matemático, en nuestro caso la proporcionalidad, que los FP deben

poner en juego al responder a las tareas propuestas. Teniendo en cuenta el análisis a priori y los resultados de la intervención, concluimos que se cumple el criterio global de idoneidad epistémica de un proceso de formación de profesores (Godino, Batanero, Contreras et al., 2013), siendo esta alta.

Idoneidad ecológica. Los contenidos, implementación y evaluación se corresponden con los establecidos en el programa del curso MA-0007, las etapas de implementación están articuladas y son coherentes con el contexto institucional dado que se trata de profesores en formación inicial. El diseño propuesto muestra una apertura hacia la innovación basada en la investigación y en la práctica reflexiva, por lo que consideramos que la idoneidad ecológica es alta.

Idoneidad cognitiva. Con la experiencia formativa se pretendía que los participantes conocieran una metodología para analizar las lecciones, la aplicaran de manera crítica y constructiva y reflexionaran sobre el uso del texto como recurso. Se han detectado logros de aprendizaje en los FP en tres sentidos: ampliación de sus criterios de análisis, autocorrección en la valoración y argumentación del cambio de juicio sobre la evaluación global de la lección en base a un análisis más crítico. Sin embargo, también se detectó que los participantes tuvieron dificultades al llevar a cabo esta tarea. Esto puede asociarse a la falta de conocimientos didácticos y matemáticos previos necesarios para lograr mejores resultados, como muestra la valoración del ítem 7 “grado de dificultad de las tareas” de la encuesta de valoración de la experiencia. Los resultados del análisis de los informes complementarios a la encuesta reflejan que un total de 19 FP¹⁹ afirmaron haber tenido alguna dificultad relacionada con el contenido de proporcionalidad (ocho), la interpretación de los indicadores de la guía (siete), o la comprensión de las nociones teóricas asociadas a la idoneidad didáctica (diez). Por este motivo, pensamos que la idoneidad cognitiva es media-baja.

¹⁹ Tres FP no respondieron y el resto no tuvo ninguna dificultad.

Idoneidad afectiva. En la experiencia formativa se han tenido en cuenta, en diferentes momentos, las creencias de los FP sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en particular, sobre el uso y gestión del libro de texto. Los resultados de la encuesta de valoración revelan buenos resultados en cuanto al grado de motivación e interés de las actividades (ítem 3, media de 4.2), al nivel de aprendizaje que los participantes creen haber alcanzado (ítem 4, media de 4.1) y la pertinencia de la experiencia para su formación como profesores de matemáticas (ítem 5, media de 4.8). Creemos por tanto que la idoneidad afectiva es alta.

Idoneidad interaccional. En el diseño de la experiencia, se promueve el trabajo autónomo por parte de los participantes (Godino, Batanero, Contreras et al., 2013). Además, se obtienen buenos resultados en la valoración de la “claridad de las tareas y consignas” (ítem 1, media de 4.1). Como hemos mencionado, el diseño de la experiencia aquí descrita constituye una reformulación de diseños previamente aplicados (Castillo et al., 2021b; 2022a). Los resultados muestran que reforzar la formación sobre aquellos indicadores que habían sido conflictivos (deficiencias de interpretación y valoración por los participantes) en intervenciones previas, tuvo efectos positivos ya que finalmente fueron valorados de modo oportuno por la mayoría de los FP. Por ejemplo, en la faceta epistémica al menos 23 FP valoraron de modo correcto dos de los indicadores sobre los que se prestó mayor atención (presencia de problemas para distinguir las relaciones multiplicativas de las aditivas, así como las relaciones multiplicativas dentro y entre las cantidades de magnitudes). Asimismo, los indicadores en los que se insistió en la faceta cognitiva, ecológica y mediacional también fueron correctamente valorados por al menos 21 FP.

Sin embargo, los FP dieron la puntuación mínima de 2 al ítem “adecuación de la metodología seguida”, por lo que es necesario promover mayores espacios de discusión y puesta en común. Creemos que es fundamental que exista un intercambio de respuestas finales,

que, aunque estaba previsto en el diseño de la experiencia, no pudo finalmente llevarse a cabo. En base a esto consideramos que la idoneidad interaccional es media-alta.

Idoneidad mediacional. Los resultados de la encuesta muestran buenos resultados con relación a la adecuación de los recursos empleados (ítem 6; media 4.3). Además, 25 FP valoraron positivamente la utilidad de la GALT-proporcionalidad al analizar lecciones de libros de texto. Sin embargo, tal y como lo plantean once FP es necesario invertir más tiempo para que puedan familiarizarse con el uso de recursos como la GALT-proporcionalidad:

Me encanto el taller lástima que no se pudo dedicar un poquito más de tiempo. [...] Creo que con más tiempo se habrían podido trabajar más dinámicas que refuercen la comprensión de la idoneidad didáctica que, como tal es parte importante de un desarrollo para el docente y el estudiante (FP^{II}23).

Habría sido necesario disponer de mayor tiempo para facilitar oportunidades a los participantes de conocer y familiarizarse con el marco teórico empleado en este diseño. Por ello la idoneidad mediacional es media.

5. Conclusiones

La promoción de la competencia de análisis de procesos instruccionales no es una tarea trivial para los formadores de profesores. En diversos contextos se han investigado formas de incentivar a los futuros profesores a ser más analíticos cuando hacen juicios de valor sobre los materiales curriculares, alertando sobre la necesidad de ayudarles a incorporar referentes teóricos y a emplear argumentos, de manera que no se basen únicamente en sus propias creencias o experiencias (Lloyd, 2002; Shaver, 2017). En este sentido, el interés de este capítulo ha sido describir el diseño e implementación de una acción formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria para desarrollar la competencia reflexiva por medio del análisis de lecciones de libros de texto. A continuación, hacemos referencia a las conclusiones asociadas a cada uno de los objetivos que nos hemos planteado.

5.1. Sobre la promoción de la competencia de análisis didáctico de lecciones de libros de texto y la evaluación de la experiencia formativa con relación a este objetivo

Los resultados muestran que los futuros docentes hacen valoraciones adecuadas (descriptivas esencialmente, pero también argumentativas) sobre las idoneidades parciales y que la mayoría (21 FP) también realizan un análisis global pertinente. Además, los futuros profesores (25 participantes) reconocen la potencialidad y utilidad de dicha guía en el desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica. Por ejemplo, FP^{II}12 afirma:

Es una herramienta muy útil para analizar una lección, ahora veo debilidades y fortalezas que antes de llevar este curso no podía ver, como los tipos de ejercicios, la estimulación de la iniciativa del estudiante y el uso de métodos alternativos de resolver una situación problema.

Podemos afirmar, en base a dichos resultados, que el análisis de lecciones de libros de texto empleando la idoneidad didáctica como recurso, es una actividad formativa motivadora para los futuros docentes, que permite poner en juego la diversidad de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas necesarias para un futuro profesional reflexivo de la educación. No obstante, los resultados del análisis también advierten sobre la importancia de realizar este tipo de experiencias en ciclos continuos en la formación docente. En efecto, los futuros profesores necesitan superar dificultades y consolidar su conocimiento sobre el contenido matemático, en nuestro caso, la proporcionalidad, a la vez que adquieren de modo progresivo mayor competencia en la valoración sobre la práctica que lo involucra.

En el caso específico de la intervención aquí descrita, los resultados de esta experiencia nos permiten concluir que en la faceta epistémica sería necesario profundizar en la reflexión más puntual de indicadores relacionados con la presentación clara de los conceptos fundamentales del tema, así como la adecuación de las “proposiciones” y “argumentos”. En efecto, los FP no consideraron que no se establece con claridad las proposiciones suficientes y

necesarias para identificar relaciones de proporcionalidad directa e inversa, y que no se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemática con diversos tipos de razonamientos o métodos de prueba, algo que es fundamental para un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional. También ha de promoverse un análisis más profundo de las características de las situaciones-problemas, prestando atención a sí las mismas promuevan momentos adidácticos, donde existan espacios para la acción, comunicación y validación (Godino, 2013). Finalmente se debe buscar espacios de discusión compartida para incentivar a los FP a argumentar sobre fundamentos didáctico-matemáticos sus valoraciones.

5.2. Sobre la promoción de la competencia en la identificación de conflictos y reflexión sobre el modo de uso de la lección

En base a los resultados podemos concluir que los participantes de esta experiencia han progresado en la competencia de identificación de conflictos y reflexión sobre modo de uso en los siguientes sentidos:

- Mientras que de manera previa a la formación 11 FP no identifican ninguna debilidad en la lección, posteriormente, todos los FP fueron capaces de identificar al menos un tipo de conflicto (epistémico, cognitivo e instruccional) de modo correcto, precisándolo como ausencia de cumplimiento de un indicador de la GALT-proporcionalidad o bien de modo descriptivo. Esto muestra además que los futuros profesores se apoyaron en la herramienta que formó parte de la formación recibida, relegando juicios o creencias propias (Beyer y Davis, 2012; Brown, 2009; Nicol y Crespo, 2006).
- Más de la mitad de los FP (19 en total) propusieron al menos una solución pertinente a algún conflicto identificado de modo correcto.
- Cuando los FP responden a la cuestión sobre modo de uso tras la formación, 19 de ellos persiguen cierto equilibrio en el proceso instruccional, planteando mejoras o cambios

en las diferentes facetas (al menos en dos diferentes) y no sólo en una de ellas (Breda et al., 2018).

- Tras la formación se registra un mayor número de respuestas específicas, lo que indica que los FP prestan más atención a aquellas configuraciones didácticas o partes de estas que usarían o no, y que cambiarían o no, en la lección.
- Un mayor número de participantes proponen cambios o sugerencias pertinentes, teniendo en cuenta las debilidades identificadas correctamente cuando responden a esta cuestión. En este sentido, once FP pasan de una respuesta general en la que no proponen cambios a una solución específica en la que sí proponen cambios específicos. Por ejemplo, FP^{II}17 en la tarea de exploración inicial indicaba que lo usaría “para presentar el tema a tratar, después utilizaría los ejemplos expuestos en el libro para poder explicar las formas de resolver los problemas presentados y al final que resuelvan unos cuantos ejercicios que el libro presenta”. Posteriormente, reflexionó que:

Introduciría cambios... Uno de ellos sería el de el de agregar un pequeño ejercicio al final de explicar la proporcionalidad directa...una parte que si eliminaría del libro es el ejercicio 7 de la página 133, porque considero que para poder realizar esa actividad los estudiantes deben de tener conocimientos previos en Física.
- También once FP pasan de no proponer cambios a sí hacerlo o aumentan el número de propuestas de cambio con relación a los que sugerían inicialmente, aunque no cambian su tipo de respuestas (general/específica) antes y después de la formación. Asimismo, se comprobó que en todos los casos en donde los FP proponen cambios, la mayor parte de las respuestas son específicas.
- No obstante, también hemos comprobado que los participantes de nuestra experiencia omitieron discordancias en algunos ejemplos o problemas, así como en las definiciones de proporcionalidad inversa y directa en el texto analizado, sobre las que no tomaron

decisiones de adaptación importantes para garantizar un proceso instruccional adecuado. Esta dificultad puede deberse a carencias en conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad, que se observan también cuando no logran plantear soluciones concretas (sólo dos FP resolvieron de modo pertinente todos los conflictos que identificaron), o reflexionar correctamente sobre el modo de uso de la lección (16 lo hicieron incorrectamente). Esto refuerza la necesidad de desarrollar acciones formativas orientadas hacia el conocimiento especializado y las competencias didácticas centradas en el contenido matemático, para obtener mejores resultados en las tareas de valoración y gestión de materiales curriculares, por ejemplo, de libros de texto.

CAPÍTULO 7. SEGUNDO CICLO DE EXPERIMENTACIÓN CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

El contenido de este capítulo aparece recogido en los siguientes artículos:

- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 34(2), (en prensa).
 - Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022). Competencia de análisis y reflexión sobre la gestión de lecciones de libros de texto por maestros en formación (En revisión).
-

1. Introducción

En este capítulo se describe el diseño, implementación y resultados de una segunda intervención con futuros maestros de primaria que pretende promover su competencia reflexiva mediante el análisis de la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto. Las guías del profesor, los libros de texto y los recursos digitales son herramientas primordiales para los docentes que sirven de enlace entre las nociones planteadas en el plan de estudios previsto y el mundo tan diferente y complejo del aula (Valverde et al., 2002). Los profesores interpretan y actúan como mediadores de los contenidos incluidos en las lecciones de los textos que utilizan, por lo que deben disponer de los conocimientos y competencias necesarias para hacer un uso adecuado de estos recursos teniendo en cuenta las necesidades de sus estudiantes (Kim, 2007; Lloyd, 2002).

Como hemos mencionado, diversos estudios dan cuenta de las dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad que muestran tanto los profesores en formación inicial como en servicio (Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009; Buforn et al., 2018; Van Dooren et al., 2008). Estas deficiencias pueden diagnosticarse y corregirse por medio de la reflexión sobre los procesos instruccionales previstos en lecciones de libros de texto, generando aprendizaje en los docentes (Nicol y Crespo, 2006; Remillard y Kim, 2017).

Partiendo de los resultados obtenidos en las primeras experiencias formativas (Capítulos 4 y 5 de esta memoria) reformulamos el diseño para realizar un segundo ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria en el que, como aspecto novedoso, solicitamos a los participantes elaborar propuestas fundamentadas sobre la gestión de dicho recurso basados en el análisis de la lección y en los conflictos que identificaron.

En línea con estas experiencias anteriores, pero teniendo en cuenta los resultados obtenidos para mejorar el diseño del nuevo ciclo de experimentación, en este capítulo nos proponemos analizar cómo evoluciona la competencia para el análisis reflexivo de lecciones de libros de texto de los maestros en formación. Para ello:

- Se confrontan los análisis pre-formación y post-formación que han realizado los participantes respecto de la lección de libro de texto.
- Analizamos el progreso en la identificación de conflictos y reflexión sobre su modo de uso, lo que nos lleva a: 1) identificar y describir las carencias que indicaron los participantes en una tarea de diagnóstico inicial, 2) analizar y valorar los conflictos que precisaron tras la formación y cuáles fueron sus propuestas para solventarlos.

A continuación, se presenta brevemente la metodología seguida y el contexto de aplicación de la experiencia. En la sección 3 se describe el diseño e implementación del experimento. Los resultados del análisis de los informes entregados por los participantes con relación a las tareas solicitadas en la experiencia se incluyen en la sección 4. Las conclusiones sobre la implementación y evaluación de la intervención finalizan el capítulo.

2. Metodología, participantes y contexto de aplicación

Similarmente al resto de acciones formativas previas, se aplica el método de las investigaciones de diseño (Cobb et al., 2003) en un contexto real de clase que incluye en ciclos sucesivos el diseño, implementación y análisis retrospectivo (Godino, Rivas et al., 2014).

En los capítulos 4 y 5 de esta memoria se describieron los resultados de intervenciones con futuros docentes de primaria (Castillo y Burgos, 2022b; 2022c) y secundaria (Castillo et al., 2021a, 2021b, 2022a), destinadas a desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica del proceso instruccional planificado en lecciones de libros de texto de proporcionalidad aplicando la GALT-proporcionalidad. Los resultados de ambas intervenciones mostraron que los participantes no usaban argumentos a la hora de determinar el nivel de cumplimiento de cada indicador de la GALT-proporcionalidad y encontraron dificultades para valorar con rigor indicadores de la faceta cognitiva, afectiva (especialmente en relación con las creencias), interaccional y mediacional. Tanto los futuros profesores de secundaria como los de primaria, mostraron un conocimiento didáctico-matemático limitado sobre el razonamiento proporcional que pudo limitar su comprensión sobre determinados indicadores (Castillo y Burgos, 2022b; 2022c; Castillo et al., 2021a). Sin embargo, aun cuando la valoración de los indicadores no fue suficientemente pertinente, la aplicación de la GALT-proporcionalidad ayudó a los participantes en la reflexión sobre la idoneidad global de la lección (Castillo y Burgos, 2022b; 2022c; Castillo et al., 2021a).

Además, en relación con la identificación de conflictos, se observó que los maestros en formación identificaron aquellos que eran relativos a la presentación del contenido, a los conocimientos previos requeridos y la progresión en el aprendizaje, así como a los modos de interacción prevista y el uso de recursos. Sin embargo, otros conflictos, relacionados con un conocimiento específico de la proporcionalidad pasaron inadvertidos por la mayoría de los futuros maestros (Burgos y Castillo, 2022b).

En este capítulo se describe el segundo ciclo de investigación con futuros maestros de primaria implementado en el curso lectivo 2020-201 con 48 estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria. Al igual que el primer ciclo de investigación (Capítulo 5 de esta memoria) la experiencia formativa se desarrolló en el marco de la asignatura Diseño y

Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Primaria (sexto semestre), en la Universidad de Granada.

En este nuevo ciclo, se contempló una primera fase de exploración inicial, para detectar las concepciones previas de los participantes sobre las características que consideran adecuadas en una lección de libro de texto, y poder valorar con mayor fiabilidad cómo la formación les permite desarrollar su competencia reflexiva. Además, se solicita el análisis de la adecuación didáctica en el conjunto de la lección. Para reforzar la reflexión y la justificación por parte de los participantes, se mejora el instrumento para que la evaluación del grado de cumplimiento de los indicadores de idoneidad sea tanto cualitativa como cuantitativa. Por último, se analiza en esta nueva intervención si la experiencia formativa influye en las creencias de los profesores en formación sobre qué aspectos son importantes en una lección de libro de texto. Cabe recordar que los estudiantes del grado han recibido de manera previa a la experiencia, formación en aspectos epistémicos, cognitivos, instruccionales y curriculares que se espera sean capaces de poner en práctica con relación al diseño y valoración de unidades didácticas en cualquier tema de educación primaria.

En este capítulo analizamos la información recogida en dicho segundo ciclo (IICP) a partir de las anotaciones del observador/investigador y las respuestas escritas de los futuros maestros de primaria que denominamos en adelante como (FM^{II}1, FM^{II}2, ..., FM^{II}48) a la tarea de evaluación propuesta al final del curso. Éstas fueron examinadas por el equipo investigador aplicando el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) y considerando como categorías los componentes e indicadores asociados para las distintas facetas propuestos por el EOS.

3. Diseño e implementación del experimento

La intervención está organizada en cuatro fases que incluyen distintos recursos didácticos y momentos de trabajo individual, grupal y de evaluación final.

3.1. Exploración inicial. ¿Qué valoran los futuros maestros en una lección de libro de texto?

Se plantea a los estudiantes, como actividad voluntaria de manera previa a la sesión formativa sobre análisis de libros de texto, que lean de manera detenida la lección “Proporcionalidad y Porcentajes” de González et al. (2015) y respondan a las siguientes cuestiones a través de la Plataforma Moodle del curso:

- ¿Qué aspectos consideras más importantes en una lección de libro de texto de matemáticas?
- ¿Qué te ha parecido la lección que acabas de analizar? ¿Qué características positivas destacarías? ¿Qué características negativas observas?
- ¿Has identificado algún error o algún elemento que pueda suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos?

El objetivo de esta tarea de diagnóstico es detectar las creencias y concepciones previas de los FM sobre las características que consideran adecuadas en una lección de libro de texto e involucrarlos en una primera reflexión sobre la valoración de dichas características en una unidad concreta dedicada a la proporcionalidad. Esto nos permitirá evaluar cómo evoluciona su competencia de reflexión didáctica.

3.2. Introducción al análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas

La formación sobre el análisis didáctico de lecciones de libros de texto se desarrolla con los FM a lo largo de dos sesiones de clase (de 2 horas de duración cada una)²⁰.

En la primera sesión se presenta el análisis de la lección del libro de texto como medio para identificar elementos que pueden ser potencialmente conflictivos, desde el punto de vista de: (a) los conocimientos matemáticos que se espera que logren los alumnos, (b) los

²⁰ Debido a la suspensión de las clases de manera presencial por la pandemia durante la implementación de la experiencia, estas sesiones fueron impartidas de forma virtual a través de la plataforma Google Meet.

conocimientos previos que requieren para comprender el desarrollo de la lección, (c) el proceso instruccional que propone. A continuación, se describe una metodología de análisis de lecciones de libros de texto basada en las herramientas del EOS. Las pautas dadas son:

1. Descripción general de la lección y división en configuraciones didácticas (unidades elementales de análisis).

2. *Análisis ontosemiótico*. Para cada una de las configuraciones didácticas en que se divide la lección, se trata de:

a) detallar las *prácticas matemáticas* que se proponen;

b) identificar los *objetos matemáticos* que intervienen en las mismas;

c) describir los principales *procesos matemáticos*.

3. *Valoración de la idoneidad didáctica de la lección* en las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional.

El análisis ontosemiótico de una lección se ejemplifica usando el texto “Porcentajes y proporcionalidad” del libro de Ferrero et al. (2015) para sexto curso de primaria. Después de esta primera sesión formativa, se dedica la correspondiente sesión de prácticas de la asignatura (trabajo en equipos) a la realización de la primera parte del análisis (descripción general y análisis ontosemiótico de las distintas configuraciones) de la lección de proporcionalidad para sexto curso de primaria de González et al. (2015).

3.3. *La idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión*

En la segunda sesión formativa se presenta la idoneidad didáctica como criterio global para valorar un proceso de instrucción (o una parte de este) previsto, planificado o implementado. La reflexión sobre la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre un tema específico requiere tener en cuenta tanto el análisis de prácticas, objetos y procesos previo como los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho contenido (en nuestro caso,

la proporcionalidad)²¹. Finalmente se introduce la GALT-Matemáticas como instrumento que permite guiar el análisis de lecciones de libros de texto, destacando la necesidad de adaptarla al contenido específico de la lección incorporando los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho tema (en nuestro caso, la proporcionalidad).

3.4. Evaluación de la competencia de análisis de idoneidad didáctica

Después de la segunda sesión formativa, los FM trabajan de manera individual sobre el análisis de la idoneidad didáctica de la lección de proporcionalidad de González et al. (2015). Es la misma lección considerada en la sesión de trabajo colaborativo para realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos.

Se les facilita las tablas que componen la GALT-proporcionalidad (adaptada de Castillo et al., 2022c; ver Anexo 1.4.2.) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en las facetas: epistémica-ecológica (contenido y adaptación de la lección a las directrices curriculares), cognitiva-afectiva (aprendizaje, actitudes e intereses), instruccional (recursos materiales, interacciones que se promueven en las tareas y su secuenciación, etc.). Los indicadores miden el grado de máxima idoneidad en cada componente, de manera que la lección será más idónea respecto de un componente en la medida que se cumpla en un mayor número de configuraciones los indicadores correspondientes.

En esta ocasión, teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo de investigación²², la lección se considera globalmente y no se analiza la idoneidad en cada configuración didáctica de la misma. Además, para organizar la valoración de la lección, se añadieron en las tablas de la GALT-proporcionalidad dos columnas a la derecha de los indicadores. En la primera

²¹ Dado que durante el curso los FM debían elaborar una unidad didáctica en un tema concreto (distinto para cada equipo de trabajo habitual) como objetivo de aprendizaje fundamental de la asignatura, la profesora utilizó el contenido de la proporcionalidad para ejemplificar el tipo de análisis epistémico-ecológico, cognitivo e instruccional que guía la elaboración de las unidades didácticas.

²² En las experiencias previas se propuso a los participantes descomponer el texto por unidades de análisis, analizando cada una de ellas aplicando la GALT-proporcionalidad. Los futuros profesores no relacionaron unas configuraciones con otras y encontraron que el desglose era excesivo (Castillo et al., 2021a;2021b).

columna los FM deben incluir una valoración numérica con relación al grado de cumplimiento del indicador: 0 (no se cumple el indicador), 1 (se cumple parcialmente o a veces), 2 (se cumple totalmente) y en la segunda las justificaciones necesarias sobre la puntuación asignada. A continuación, teniendo en cuenta lo observado por medio de la valoración de los indicadores, los FM deben emitir un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección (baja, media o alta) en cada una de las facetas.

Finalmente, se les pidió responder a la siguiente consigna:

¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? En base a los conflictos detectados, precisa de forma concreta y justificada cómo solucionarías al menos cuatro de estos.

4. Resultados

En esta sección se incluyen los resultados de la evaluación de los informes de los participantes a las tareas propuestas. En primer lugar, mostramos la evolución de la competencia reflexiva de los futuros maestros por medio de la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica. En segundo lugar, valoramos el progreso en la competencia de los participantes para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material.

4.1. Evolución de la competencia reflexiva en el análisis didáctico de la lección

En primer lugar, para mostrar el avance logrado en la competencia reflexiva se confrontan los análisis pre-formación (respuestas que han dado a las características iniciales que debería tener un buen libro de texto, y su valoración previa a la lección) y post-formación (aplicación de la GALT-proporcionalidad y juicio razonado de la idoneidad didáctica) de la lección. También comprobamos si modifican sus creencias sobre las características que debe tener una “buena lección de libro de texto de matemáticas.

4.1.1. Significados iniciales sobre las características que debe tener una buena lección de libro de texto

Al analizar las reflexiones de los FM con relación a los aspectos que consideran más importantes en una lección de libro de texto de matemáticas, es posible identificar descripciones que se pueden asociar a indicadores de las distintas componentes y facetas de idoneidad didáctica incluidos en la GALT-Matemáticas. De los 45 FM (tres no respondieron), 30 hicieron alguna referencia a aspectos epistémico-ecológicos, 37 a cognitivo-afectivos y 29 a características de tipo instruccional.

En la Tabla 7.1 se incluyen los indicadores de la GALT-Matemáticas más referidos en cada dimensión y componente. En la categoría otros, se encuentran aquellas menciones a indicadores con baja frecuencia (inferior a 4), de los que se citan los más usuales. Como se aprecia en la Tabla 7.1, la dimensión cognitivo-afectiva es la que registra mayor número de referencias a indicadores.

En el aspecto epistémico, los FM consideran importante que la lección incluya múltiples ejemplos y problemas suficientes y variados (“número de actividades suficientes y centradas en lo más importantes”, FM^{II}20). También destacan la importancia de un lenguaje “claro y sencillo” (FM^{II}28) y que el texto venga acompañado de imágenes “suficientes y útiles” (FM^{II}20) para “explicar los contenidos” (FM^{II}16), siempre “relacionadas con los ejercicios” (FM^{II}28).

También mencionan que los contenidos deben explicarse de manera clara (“Es muy importante el contenido. Es fundamental que una lección ofrezca explicaciones claras para que los alumnos puedan comprenderlo”, FM^{II}12). En lo ecológico, destacan la importancia de que se tengan en cuenta las directrices curriculares (“deben ajustarse a los contenidos que aparecen en el currículum de Educación Primaria”, FM^{II}21) y se contemplen temas transversales

(también “aspectos socioculturales”, FM^{II}29) algo con lo que los FM están familiarizados en la asignatura en la que se desarrolló la experiencia.

Tabla 7. 1

Aspectos fundamentales y frecuencia (Fr.) destacados por los FM en una lección de libro de texto para cada dimensión

Componentes	Indicador	Fr.
Dimensión epistémico-ecológica		40
Problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas para contextualizar, ejercitar, ampliar y aplicar el conocimiento matemático.	9
Lenguajes	Se utilizan diferentes expresiones y representaciones para modelizar situaciones, analizando su pertinencia y utilidad.	7
Conceptos	Se presentan los conceptos fundamentales del tema de forma clara, correcta y adaptada al nivel educativo al que se dirigen.	5
Adaptación al currículo	Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	7
Conexiones intra e interdisciplinarias	Existen relaciones con otros contenidos intra e interdisciplinarios (temas transversales, historia de la matemática, ...)	5
Otros	Los procedimientos se justifican de manera adecuada, se fomenta que el alumno justifique, los contenidos se presentan sin errores.	7
Dimensión cognitivo-afectiva		85
Diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	10
Progresión en la dificultad	Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad.	9
Evaluación	Se proponen instrumentos de evaluación y autoevaluación.	8
Emociones	Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos. Existen elementos motivadores.	23
Valores	Se promueve que el estudiante valore la precisión y utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	14
Otros	Se contemplan los conocimientos previos necesarios, los contenidos pretendidos tienen una dificultad manejable, se fomentan métodos alternativos de solución de los problemas.	21
Dimensión instruccional		39
Interacción autor-alumno	El autor hace una presentación clara y bien organizada del tema, enfatiza los conceptos claves del tema.	18
Interacción entre alumnos	Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes.	5
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedica el espacio suficiente a los contenidos de mayor dificultad de comprensión.	6
Otros	Se promueve el uso de materiales manipulativos, se fomenta el uso de visualizaciones para introducir conceptos, etc.	10

En el aspecto cognitivo-afectivo, más de la mitad de las apreciaciones tienen que ver con el interés y utilidad de los contenidos y las tareas propuestas a los estudiantes, así como con que se incluyan elementos motivadores. Por ejemplo, FM^{II}26 considera

relevante que contenga actividades relacionadas con la vida y el entorno de los alumnos, para que puedan observar la utilidad de las matemáticas en un contexto real [...] que las actividades y tareas planteadas en el libro de texto sean dinámicas y atractivas para los alumnos, para poder fomentar la motivación de estos.

En menor medida, algunos FM valoran que la lección incluya actividades que sirvan de repaso y autoevaluación (“un repaso de la unidad como autoevaluación propia previa al examen”, FM^{II}3) y que se contemple la progresión en la dificultad de aprendizaje, avanzando “de lo más sencillo a lo más complejo” (FM^{II}43).

Finalmente, la mayoría de las reflexiones de los FM en el aspecto instruccional mencionan el diseño atractivo y la presentación adecuada del contenido, que suelen interpretar como una explicación acompañada de ejemplos resueltos y de dibujos ilustrativos. También consideran importante la distribución de los contenidos (“el orden y la secuenciación tanto de las actividades como de los contenidos, los cuales, para mí, deben ir de lo global a lo particular”, FM^{II}33) y que se planteen “actividades que fomenten el trabajo cooperativo y en grupos” (FM^{II}28).

4.1.2. Análisis inicial sobre la lección de proporcionalidad de un libro de texto

En primer lugar, es interesante observar que todas aquellas características que identifican como positivas o negativas en los ámbitos cognitivo-afectivo o instruccional, habían sido señaladas como cualidades que debía tener una lección de libro de texto de matemáticas en la pregunta previa. Sin embargo, en la valoración de la lección de proporcionalidad, reconocemos algunas características nuevas en el aspecto epistémico-ecológico. Además, en

general son menos las características indicadas de manera negativa frente a aquellas señaladas de forma positiva.

Para cada una de las dimensiones, epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional, incluimos en las Tablas 7.2, 7.3 y 7.4, respectivamente, los tipos de características y sus frecuencias cuando son valoradas como positivas (VP) o negativas (VN) por los FM. Estas aparecen clasificadas por medio de los indicadores con los que se relacionan de la GALT-proporcionalidad, según los componentes de cada dimensión. Como antes, en la categoría otros, se encuentran aquellas referencias a indicadores con baja frecuencia (menos de 4).

Tabla 7. 2

Aspectos valorados de manera positiva o negativa por los FM en la dimensión epistémico-ecológica

Componente	Indicador	VP	VN
Problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de tareas que permitan contextualizar y aplicar la proporcionalidad y porcentajes.	12	8
	Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.	9	-
Lenguajes	El nivel del lenguaje es adecuado a los alumnos.	8	-
	Se utilizan diferentes tipos de representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, manipulativa, etc.) para modelizar situaciones de proporcionalidad	7	-
Conceptos	Se presentan de manera clara y correcta los conceptos fundamentales de proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente.	-	6
Otros		6	6
Total		42	20

De los 45 FM, 24 indicaron alguna característica positiva y 17 lo hicieron de manera negativa en la dimensión epistémico-ecológica. Los FM valoran de forma positiva la gran variedad de ejercicios en cada configuración de la unidad, la inclusión de actividades de cálculo mental (algo sobre lo que no habían reflexionado en la primera consigna), la adecuación del lenguaje y especialmente el uso de gráficos y de la tabla de proporcionalidad como medio de representación (“explica la relación entre dos magnitudes a través de una tabla de proporcionalidad, recurso que me parece sencillo para aplicar con los alumnos”, FM^{II}5). En

menor medida (categoría “otros” en Tabla 7.2, VP) hacen referencia a que se permite a los alumnos que inventen problemas (“se les propone que ellos mismos inventen y planteen problemas”, FM^{II}12) o bien a la correspondencia de los objetivos y contenidos con el currículo.

Por otro lado, los FM destacan como carencias en la lección aspectos relativos al componente problemas (también el más valorado positivamente en esta faceta). La mayoría considera que se proponen “demasiados problemas” o que estos no son apropiados o están descontextualizados. Encuentran deficiencias también en la definición de los conceptos fundamentales. Por ejemplo, FM^{II}25 “como algo negativo, destacaría que no se encuentran todos los conceptos que pueden ayudar al alumno a entender el contenido, por ejemplo, las magnitudes proporcionales.” De forma minoritaria (categoría “otros” en Tabla 7.2, VN) mencionan que no se presentan de manera correcta los procedimientos o que no se emplean diversos tipos de razonamiento en la justificación de los enunciados.

En el ámbito cognitivo-afectivo (Tabla 7.3) de los 45 FM 43 indicaron alguna característica positiva y 21 lo hicieron de forma negativa. En el primer caso, destacan como potencialidades de la lección aquellas cualidades que consideraban deseables en la consigna previa, es decir, la presencia de actividades de refuerzo (por medio del repaso final) y ampliación (en el “ponte a prueba”) y que las situaciones propuestas incluyan elementos para captar el interés de los alumnos (“uso de personaje como hilo conductor para motivar los alumnos”, FM^{II}19; “aparecen talleres y retos para motivar al alumnado”, FM^{II}20). Además, opinan que incluir problemas relativos a compras y rebajas puede mostrar la utilidad de la proporcionalidad en situaciones de la vida diaria. También señalan que las etiquetas “Ten en cuenta” incluidas en la lección pueden ayudar a los alumnos con su aprendizaje (“Los “Ten en cuenta...” tienen información importante que ayudan a los/as niños/as con posibles dificultades que puedan tener”, FM^{II}15).

Tabla 7.3

Aspectos valorados de manera positiva o negativa por los FM en la dimensión cognitivo-afectiva.

Componente	Indicador	VP	VN
Conocimientos previos	Se contemplan los conocimientos previos (fracciones y su equivalencia, magnitudes y su medida) necesarios.	-	4
	Los contenidos pretendidos tienen una dificultad manejable.	7	4
Diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	20	-
Progresión en la dificultad	Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (con números enteros y no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, ...)	7	-
	Se advierte de posibles errores conceptuales o procedimentales: ilusión de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias, usar estrategias aditivas erróneas.	9	-
Evaluación	Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.	9	-
Emociones	Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos. Existen elementos motivadores.	23	6
Valores	Se promueve que el estudiante valore la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	13	4
Otros		6	9
Total		94	27

De manera poco frecuente (categoría “otros” en Tabla 7.3, VP) valoran de forma positiva que se apoya a los estudiantes en el aprendizaje (“ayudan a los alumnos en la realización de las actividades”, FM^{II}39) o que se potencia el trabajo práctico o realista.

Cuando expresan limitaciones en esta dimensión, se centran igualmente en el grado de interés para los alumnos de las tareas (“las situaciones están fuera del contexto del estudiante”, FM^{II}26; “problemas no muy realistas para el contexto de un niño de 11 años”, FM^{II}42) o su utilidad (“ejercicios no prácticos, no aplicables a la vida diaria de los alumnos”, FM^{II}38). Aunque no son frecuentes, se observan algunas reflexiones más específicas sobre el aprendizaje del contenido matemático que se trata en la lección. Por ejemplo, en relación con los conocimientos previos, algunos FM consideran que falta establecer una adecuada relación con las fracciones o que se debería recordar la conversión de unidades en las magnitudes; también mencionan que el grado de dificultad de los contenidos sobre porcentajes o escalas no es

adecuado (“los contenidos que, desde mi punto de vista, pueden causar mayor dificultad de aprendizaje son el cálculo del porcentaje de una unidad y las escalas”, FM^{II}23).

Tabla 7.4

Aspectos valorados de manera positiva o negativa por los FM en la dimensión instruccional

Componente	Indicador	VP	VN
Interacción autor-alumno	El autor hace una presentación clara y bien organizada del tema, enfatiza los conceptos claves del tema.	14	7
Interacción entre alumnos	Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes.	4	7
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedica el espacio suficiente a los contenidos de mayor dificultad de comprensión.	7	-
Recursos materiales	Se promueve el uso de materiales manipulativos (escalímetro, pantógrafo, compás de proporción) e informáticos (Geogebra, Excel...)	4	4
Otros		-	6
Total		29	24

De los 45 FM, 24 indicaron alguna característica positiva y 18 negativa con relación a la dimensión instruccional (Tabla 7.4). Al igual que cuando precisaron las características que consideraban fundamentales en una lección de libro de texto, la claridad y adecuación de la presentación del tema vuelve a ser el aspecto positivo más destacado (“explicaciones claras y sencillas”, FM^{II}12; “presenta en cada punto una explicación con ejemplos”, FM^{II}18). También destaca la pertinencia en la secuenciación (“los contenidos se estructuran de forma adecuada pasando desde los más simple a los más complejo”, FM^{II}29). Con relación a debilidades de la lección, centran su atención también en los aspectos interacciones, donde en este caso señalan que la explicación es insuficiente (“la teoría y su explicación es insuficiente”, FM^{II}30) o mejorable, y que no se incluyen los conceptos fundamentales (“falta explicar conceptos clave”, FM^{II}15). También consideran inadecuado el grado de interacción entre los alumnos, al mencionar, por ejemplo, que se sigue un método expositivo que limita el trabajo colaborativo (“No me ha parecido una lección alejada de la enseñanza tradicional de las matemáticas”, FM^{II}17).

Comparando los resultados de las Tablas 7.1,7.2,7.3 y 7.4, se observa un mayor número de indicaciones de lo que se considera adecuado o no en el proceso enseñanza planificado cuando se plantea como medio específico de reflexión una lección concreta de libro de texto.

4.1.3. *Idoneidad didáctica de la lección por medio de la GALT-proporcionalidad*

Como en cada implementación desarrollada en esta tesis, el análisis a priori de la lección según las distintas facetas, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica por medio de la GALT-proporcionalidad fue realizado por las investigadoras y un experto colaborador externo de manera independiente y después se confrontaron los análisis para consensuar una evaluación global.

Tabla 7.5

Frecuencias en la valoración de la idoneidad didáctica según dimensiones (n=45)

Grado de idoneidad	Epistémico-Ecológica	Cognitivo-afectiva	Instruccional
Baja	2	13	24
Bajo-media	10	9	4
Media	26	17	16
Medio-alta	4	4	0
Alta	3	2	1

Como resultado, la idoneidad didáctica fue valorada como baja en cada una de las dimensiones: epistémico-ecológica (puntuación 15 sobre 62, 17 de 31 indicadores valorados con 0), cognitivo-afectiva (puntuación 7 de 24, 6 de 12 indicadores valorados con 0) e instruccional (puntuación 3 sobre 18, 6 de 9 indicadores valorados con 0). Sin embargo, como se deduce de la Tabla 7.5, la mayoría de los FM consideraron que el grado de idoneidad va de media a alta en las dimensiones epistémico-ecológica y cognitivo-afectiva (73,34% y 51,11% respectivamente). La valoración fue mejor en la faceta instruccional, donde el 53,33% consideraron un grado de idoneidad bajo. En menor medida el 28,89% de los FM consideraron correctamente como baja la idoneidad cognitivo-afectiva.

Los juicios empleados por los FM para justificar su asignación son de dos tipos:

- Cuantitativo. Basados en el número de indicadores en cada faceta valorados con 0, 1 o 2 puntos, o su promedio. Por ejemplo, FM^{II}12 valora la idoneidad instruccional como baja indicando:

La gran parte de los indicadores tienen una valoración de 0, otros muchos presentan un 1 y no hay ningún indicador que tenga como valoración 2, por lo tanto, podemos decir que la idoneidad didáctica es baja.

- Descriptivo. Descripción de los aspectos positivos o negativos en la lección entendidos como grado de cumplimiento de los indicadores. Por ejemplo, FM^{II}34 asigna una idoneidad baja en el aspecto instruccional, atendiendo a:

Gran parte de las tareas que se plantean son muy mecánicas y no se usan materiales manipulativos que permitan un aprendizaje más significativo. En alguno de las configuraciones creo que se debería dedicar más tiempo, como puede ser las magnitudes proporcionales. Es adecuado dedicarle el tiempo suficiente antes de pasar a trabajar la regla de tres. Además, cabe destacar que hay pocos ejercicios que fomenten la colaboración entre compañeros y la reflexión en grupo. Tampoco encontramos que la unidad trabaje de forma interdisciplinar, no se relaciona con ninguna otra materia en concreto.

Aunque no hay diferencia significativa entre las justificaciones de un tipo y las de otro (47,41% de tipo cuantitativo, 52,59% descriptivo), si observamos una mayoría de tipo descriptivo en las valoraciones como baja (correcta) o bajo-media (parcialmente correcta) en las tres dimensiones.

Aquellos FM que valoraron de manera incorrecta la idoneidad didáctica de la lección en la dimensión epistémico-ecológica, no identificaron carencias importantes en relación con el contenido matemático. Así, un porcentaje alto de FM valoraron de manera positiva (2 puntos) algunos indicadores que en el análisis a priori identificamos como de nulo cumplimiento (0

puntos) y que suponen serias carencias en el proceso de enseñanza planificado sobre proporcionalidad. Destacamos los siguientes:

- Se usan representaciones adecuadas que permiten distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro y entre magnitudes. El 42,22 % de los FM lo valoraron con 2 puntos. Estos, o bien dijeron simplemente que “se cumple el indicador en su totalidad” o consideraron únicamente la presencia de representaciones pictóricas o gráficas (“se utilizan dibujos y gráficos en los problemas de magnitudes”, FM^{II}28), sin valorar si estas representaciones permiten distinguir ambos tipos de relaciones, como se recomienda para un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Shield y Dole, 2013).
- Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales (estrategias aritméticas, reducción a la unidad, regla de tres, cálculo de porcentajes). Como antes, un 42,22 % de los FM lo valoraron con 2 puntos. En este caso, cuando justifican su asignación, mencionan que dichos procedimientos tienen un espacio específico en la lección (“se dedica un apartado específico a la reducción a la unidad y regla de tres”, FM^{II}35) o que el alumno tiene claro qué procedimiento seguir para resolver los problemas propuestos (“las explicaciones aclaran bien qué procedimientos hay que seguir en su realización”, FM^{II}16).
- La proporcionalidad aparece relacionada con los números racionales. El 55,56% de los participantes valoran con 2 puntos este indicador. La mayoría no lo justifica y cuando lo hacen se basan en la inclusión de fracciones en el procedimiento de regla de tres, los porcentajes y la escala (“los porcentajes, la regla de tres y las escalas están estrechamente ligadas con los números racionales”, FM^{II}44).
- Se hace explícita la relación de la proporcionalidad con las magnitudes (los valores numéricos que intervienen en situaciones de proporcionalidad corresponden a medidas

de cantidades de magnitudes). El 62,22% de los FM valoraron con 2 puntos este indicador, motivados fundamentalmente por la presencia de diversas magnitudes en los ejemplos y actividades propuestas (“se presenta la relación entre diferentes magnitudes: euros y entradas, km y tiempo...”, FM^{II}5).

Aquellos FM que sí valoraron de forma correcta o parcialmente correcta (es decir, como baja o bajo-media, respectivamente) la idoneidad en esta faceta, reconocieron estos indicadores como de cumplimiento parcial o nulo e identificaron algunas otras carencias en la lección. Por ejemplo, observaron que en la lección no se establecen las propiedades fundamentales de la relación de proporcionalidad y los procedimientos están desprovistos de justificación (“no encontramos argumentos por parte del autor, se omiten las justificaciones”, FM^{II}5). También que las situaciones de aplicación son poco diversas y representativas de los contenidos (la mayoría de valor faltante), no explicitan la relación multiplicativa en situaciones proporcionales, no permiten distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y principalmente involucran razones internas, es decir, entre diferentes valores de la misma magnitud y no externas, entre valores de magnitudes diferentes (“escasez de situaciones que involucren el uso de razones externas”, FM^{II}8). Además, reconocen que las representaciones no permiten identificar y distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes. No se establece la naturaleza proporcional de los porcentajes ni de las escalas (“se incluyen los porcentajes, pero a pesar de esto no existe en el libro ningún apartado o explicación que los relacione con la proporcionalidad”, FM^{II}29).

Desde el punto de vista cognitivo-afectivo, la lección no tiene en cuenta las diferencias individuales y tampoco fomenta la flexibilidad y creatividad en la resolución por parte de los alumnos. Así, el equipo investigador valoró con 0 puntos los indicadores correspondientes en la GALT-proporcionalidad. Sin embargo, el 51,11% de los FM consideran que la lección tiene

en cuenta las diferencias individuales “a través del “Repaso a la unidad” donde hay actividades para repasar y reforzar los contenidos” (FM^{II}32) y la presencia de dos procedimientos (reducción a la unidad, regla de tres) para resolver diversos problemas, valorando con 2 puntos ambos indicadores en la GALT-proporcionalidad. Sin embargo, las actividades propuestas en la configuración de “Repaso a la unidad” o “Ponte a prueba” no se consideran de refuerzo ni ampliación, y no se emplean otras estrategias (construcción progresiva, aditivas, multiplicativas, etc.) que no sean las descritas por los FM.

Aquellos participantes que valoraron adecuadamente la lección en esta dimensión identifican carencias con relación a los conocimientos previos, la atención a las diferencias individuales, desarrollo del pensamiento flexible y propuesta de instrumentos adecuados de evaluación o autoevaluación. Por ejemplo, FM^{II}5 indica:

En el plano cognitivo-afectivo, no se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos de resolución de problemas. En cuanto a la dificultad de los contenidos presentados es manejable para el nivel educativo al que se dirige, pero no se promueve el uso de diversas estrategias, ni situaciones con diferentes niveles de dificultad. Tampoco se contemplan los conocimientos previos.

Finalmente, en el aspecto instruccional, observamos que la presentación no es del todo adecuada. En efecto, se omiten conceptos (constante de proporcionalidad, relación de proporcionalidad directa entre magnitudes) y propiedades (simetría de la relación de proporcionalidad, carácter aditivo y homogéneo de la función lineal) esenciales en el tema, no se emplean diversos recursos argumentativos, no hay momentos en los que el alumno asuma la responsabilidad de estudio, y la secuenciación no sigue las recomendaciones didácticas sobre la progresión en la enseñanza de la proporcionalidad (Shield y Dole, 2013; Streefland, 1985). Más de la mitad de los FM reconocieron la mayoría de estas carencias en la lección (lo que los llevó a valorar la idoneidad instruccional como baja). Sin embargo, el 33,33% de los FM

consideran totalmente satisfactoria (2 puntos) la secuenciación de contenidos (“la secuenciación es adecuada, los contenidos aparentemente más difíciles, tienen mayor ejemplificación”, FM^{II}41), sin tener en cuenta la pertinencia de progresar desde un pensamiento aditivo al multiplicativo, retrasando la introducción de la regla de tres hasta adquirir destreza en otros procedimientos menos formales (Shield y Dole, 2013).

4.1.4. Reanálisis de las características que debe tener una buena lección de libro de texto. El caso de la proporcionalidad.

Para analizar si la intervención motiva un cambio en las creencias de los FM, preguntamos a los participantes si habían modificado su opinión sobre la lección después de analizarla por medio de la GALT-proporcionalidad. De los 45 participantes, dos no respondieron a la consigna y 16 mantienen su opinión inicial sobre la lección. Si esta era positiva (6 FM), consideran que es posible utilizar el material con mejoras que reconocen de manera más clara tras el análisis de la idoneidad didáctica. Si esta era negativa (10 FM) justifican que inicialmente observaron que no era del todo adecuada si bien han podido realizar una revisión más exhaustiva. Por ejemplo, FM^{II}8 indica:

Ahora he reconocido muchas más carencias que antes no había apreciado. [...] Al desconocer cómo realizar un análisis de manera correcta, no identifiqué la cantidad de conflictos que ahora, ya que en ese momento solo identifiqué la falta de explicaciones claras que facilitarían la adquisición del contenido y la realización de las actividades y problemas.

Otros 27 FM afirman haber cambiado de opinión y consideran tener una visión más crítica de la lección, lo que justifican por la identificación de un mayor número de conflictos (17 FM) o de aspectos relevantes que considerar en una lección que antes no habían apreciado (10 FM). En este caso, los participantes elaboran un informe detallado de cuáles son esas

características importantes o conflictos que habían pasado por alto en su valoración inicial, haciendo referencia a los indicadores o a la valoración de la idoneidad didáctica en las distintas facetas. Por ejemplo, FM^{II}21 señala:

Mi opinión ha cambiado porque pensaba en el primer análisis que realicé que era una lección bastante completa y detallada pero ahora pienso que se pueden mejorar varios elementos (los indicadores que he valorado con uno e incluir los que he valorado con cero).

Similarmente, FM^{II}45 comenta:

Ha variado muchísimo debido al hecho de que he podido realizar un análisis más completo y exhaustivo que me ha permitido localizar los puntos débiles y fuertes de la lección de libro, así como establecer unas pautas para contrarrestar esas carencias ya que puedo localizar los conflictos de forma más detallada y centrándome en aspectos concretos. Algunos de ellos son los siguientes: no presenta de forma clara y correcta los conceptos claves, se echa en falta algunas definiciones; no incluye evaluación o autoevaluación; las proposiciones son escasas; utiliza pocos tipos de razonamientos; debería incluir material manipulativo; sería conveniente potenciar la creatividad e ideas originales de los niños; se emplean muy poco los recursos argumentativos.

Además, para evaluar cómo influye la formación recibida en las creencias de los FM sobre los aspectos que son importantes en una lección de libro de texto, pedimos finalmente que distinguieran los tres indicadores que considerasen más importantes para la valoración de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto, en cada una de las dimensiones²³.

²³ Es necesario tener en cuenta que el número de indicadores en la dimensión epistémico-ecológica es muy superior al de la cognitivo-afectiva e instruccional.

Tabla 7.6*Indicadores considerados más importantes en cada faceta (n=45)*

Componente	Indicador	Fr.
Dimensión epistémico-ecológica		
Problemas	Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de proporcionalidad y porcentajes.	15
Lenguajes	Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a los que se dirige	17
Conceptos	Se presentan de manera clara y correcta los conceptos fundamentales para el nivel educativo correspondiente: proporcionalidad directa entre magnitudes, covarianza de cantidades, invarianza de la razón, constante de proporcionalidad	17
Dimensión cognitivo-afectiva		
Conocimientos previos	Se contemplan los conocimientos previos (fracciones, equivalencia de fracciones, medida de magnitudes) necesarios de acuerdo con el nivel educativo	16
Diferencias individuales	Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo el uso de diversas estrategias correctas (de construcción progresiva, aditivas, multiplicativas, etc).	17
Emociones	Se potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.	15
Dimensión instruccional		
Interacción entre alumnos	Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes soluciones o puntos de vista, utilizando argumentos matemáticos	26
Autonomía	Se plantean momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio: exploran ejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas resolver problemas y comunicarlos	28
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedicando el espacio suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión	26

En la Tabla 7.6 se incluyen los tres indicadores que fueron seleccionados con mayor frecuencia en cada una de las facetas. Comparando dicha tabla con la Tabla 7.1, en la que se resumían las características fundamentales, clasificadas según facetas y componentes de la idoneidad didáctica, que los FM incluyeron para responder a *¿qué aspectos consideras más importantes en una lección de libro de texto de matemáticas?*, observamos que:

- En la faceta epistémico-ecológica se mantiene la importancia de que el material incluya una muestra diversa y representativa de tareas que permita contextualizar el contenido,

en este caso, el de la proporcionalidad y los porcentajes, y que los conceptos fundamentales aparezcan de manera clara y correcta (aumentando el número de FM que lo indican como rasgo fundamental de la lección). El tercer indicador seleccionado como esencial para considerar como idónea la lección en esta faceta, tiene que ver con la pertinencia del lenguaje para el nivel educativo. En la valoración previa se prestaba más atención a la claridad y riqueza de expresión y representación.

- En la dimensión cognitivo-afectiva se mantiene el valor otorgado por los FM a las emociones (potenciar la creatividad y el trabajo práctico y útil por parte de los alumnos), siendo este el aspecto más valorado en la tarea inicial. Los nuevos indicadores seleccionados como más importantes incorporan los conocimientos previos y la garantía de acceso a todos los alumnos por medio de la flexibilidad en el uso de estrategias correctas, que apenas habían sido referidos en dicha reflexión inicial.
- En la faceta instruccional, que fue la menos referida en la tarea inicial (sobre todo mencionaron la importancia de la claridad en la presentación y organización de la lección), se mantiene la relevancia dada a la interacción entre alumnos y secuenciación de los contenidos, pero los FM escogen como tercer indicador el relativo a la componente autonomía.

Los FM han seleccionado como fundamentales algunos indicadores de la GALT-proporcionalidad que previamente habían evaluado de manera incorrecta en la lección. Por tanto, en base a esos rasgos que consideran prioritarios, podrían juzgar como adecuada una lección de libro de texto, con carencias que no tendrían en cuenta en la gestión del recurso. Esto plantea la necesidad de reforzar su conocimiento didáctico- matemático en estos aspectos. En concreto, en la faceta cognitiva, garantizar el acceso a todos los alumnos requiere conocer y ser flexible en el uso de diversas estrategias correctas. Sin embargo, más de la mitad de los FM mostraron en su valoración, una visión limitada de las posibles formas de abordar situaciones-

problemas de proporcionalidad y de la necesidad de progresar en este tipo de estrategias para que los alumnos logren un adecuado razonamiento proporcional. En el aspecto instruccional, la tercera parte de los FM consideraron como adecuada la secuenciación de contenidos, centrando su valoración únicamente en la mayor ejemplificación de los contenidos más difíciles y sin tener en cuenta la pertinencia de progresar desde lo intuitivo a lo formal, retrasando la introducción de la regla de tres (Streefland, 1985). También, casi la cuarta parte de los participantes, opinaron que la lección contempla momentos para que los alumnos sean autónomos en su aprendizaje. En este sentido, es necesario que los FM comprendan que fomentar la autonomía, supone incorporar situaciones que permiten a los alumnos ser espontáneos, dinámicos y participativos (Santaolalla, 2014), desarrollando la capacidad intelectual para enfrentarse a problemas reales y situaciones nuevas (Rey y Penalva, 2002). No se trata sólo de plantear problemas para que los alumnos resuelvan (como consideraban estos FM) sino de promover que planteen cuestiones y le den respuesta, exploren ejemplos y contraejemplos como medio para investigar y conjeturar. Supone dejar espacio para que los alumnos busquen y empleen diversas herramientas para hacer conexiones y razonar sobre problemas.

4.2. Evolución de la competencia para identificar conflictos en la lección y tomar decisiones sobre la gestión del material.

Para analizar si la formación permite mejorar la competencia de los FM para identificar conflictos en la lección y les orienta en la toma de decisiones sobre la gestión del material, en esta sección, mostramos qué carencias indicaron los participantes en la tarea de diagnóstico, cuáles reconocieron de manera mayoritaria tras el análisis y cuáles fueron sus propuestas para solventarlos.

4.2.1. Identificación inicial de conflictos en la lección

Para mostrar el avance en la identificación de conflictos, es importante tener en cuenta qué aspectos precisaron los participantes en la tarea de exploración inicial. De los 48 participantes, 19 (es decir, un 39,58%) indicaron explícitamente que no observaban ningún error o elemento que pudiera suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos. Los demás participantes identificaron conflictos que hemos clasificado según la dimensión a la que afecta:

Conflictos epistémico-ecológicos (22 observaciones)

- a) Los problemas no son adecuados o están descontextualizados (“la descontextualización de algunos de los ejercicios [...] algunos ejercicios se plantean de manera liosa”, FM^{II}14).
- b) Las representaciones son poco adecuadas o requieren explicación (“falta de analogías con representaciones pictóricas”, FM^{II}13).
- c) Faltan contenidos fundamentales con relación al tema de la proporcionalidad o no están suficientemente explicados. Aquí se detalla, por ejemplo, la “explicación inadecuada de las magnitudes proporcionales” (FM^{II}40) o “de relación de proporcionalidad por medio de las tablas” (FM^{II}35).
- d) No se explica “para qué sirve el porcentaje” (FM^{II}29), los porcentajes no aparecen conectados con las fracciones y “no se estudian aumentos y disminuciones porcentuales” (FM^{II}2).
- e) Algunos procedimientos fundamentales no están explicados: la regla de tres, cálculo de las distancias por medio de la aplicación de escala, “falta explicación de la reducción a la unidad” (FM^{II}43).

Conflictos cognitivo-afectivos (10 observaciones)

- a) Falta de atención a conocimientos previos de fracciones, número decimal, unidades de medida y la conversión entre ellas.
- b) Dificultad de los problemas. Se considera que incluye “ejemplos demasiado complejos” (FM^{II}32), “algunos problemas son difíciles y podrían frustrar a los alumnos por no poder resolverlos” (FM^{II}26).
- c) No se fomenta el razonamiento matemático (“se sigue una estrategia explicada como ejemplo a los diversos problemas que se plantean, se frena el razonamiento matemático induciendo a seguir unos patrones”, FM^{II}11) ni la flexibilidad de estrategias para resolver los problemas (FM^{II}15).
- d) No se consigue motivar al alumnado (“se da todo “hecho”, no motiva que los alumnos aprendan por descubrimiento”, FM^{II}24).

Conflictos instruccionales (13 observaciones)

- a) Exposición mecanizada que no involucra al alumno (FM^{II}3) y limita su autonomía (“un único modo de explicar los contenidos impide el logro de aprendizaje de los alumnos”, FM^{II}48).
- b) La presentación del tema no es adecuada: algunos conceptos fundamentales no están explicados, o la explicación insuficiente podría generar dificultades en los estudiantes (“para obtener el cuarto término en la regla de tres, tener dificultades para comprender las magnitudes proporcionales, entender y utilizar la escala de un mapa”, FM^{II}27; “con los términos IVA, descuento”, FM^{II}30).
- c) Algunos enunciados de los problemas o sus condiciones son confusos.
- d) No se incluyen actividades manipulativas.
- e) La secuenciación de contenidos no es adecuada (“debería explicar porcentajes después de magnitudes proporcionales”, FM^{II}23).

A pesar de que fueron pocos los FM que lograron explicitar estas limitaciones, salvo aquellas que consideran excesiva la complejidad de las tareas, son todas adecuadas.

4.2.2. Identificación de conflictos tras el análisis didáctico de la lección

En la tarea de evaluación final, todos los participantes indicaron varios conflictos que habían sido previamente categorizados por el equipo investigador. Se registraron un total de 324 observaciones en el aspecto epistémico-ecológico, 181 en el cognitivo-afectivo y 178 en el instruccional. De los 48 participantes, 30 detallaron y justificaron los conflictos encontrados, mientras que 18 los indicaron como ausencia o parcialidad en el grado de cumplimiento del indicador asociado en la GALT-proporcionalidad. Para cada una de las dimensiones, destacamos en las Tablas 7.7, 7.8 y 7.9, respectivamente los conflictos significativos detectados más representativos (por al menos 10 de los 48 FM). A continuación, mostramos ejemplos prototípicos de su identificación por parte de los participantes.

Figura 7.1

Definición de porcentaje

Un **porcentaje** representa una parte de un total. Se expresa mediante un número seguido del símbolo %. También se representa con una fracción de denominador 100.

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p. 112)

Respecto a la dimensión epistémico-ecológica (Tabla 7.7), los FM destacan fundamentalmente la falta de claridad en la definición del porcentaje (Figura 7. 1) o de escala (“el autor no incluye una definición general de escala, sino que la particulariza al caso 1:50000”, FM^{II}24) y que ambas nociones no aparezcan conectadas con la relación de proporcionalidad de magnitudes, lo que impide justificar en base a ésta los procedimientos que involucran el cálculo o aplicación de escalas.

Tabla 7.7*Conflictos epistémico-ecológicos identificados por los FM y frecuencia (Fr.)*

Componente	Descriptor del conflicto	Fr.
Problemas	No se promueve que el alumno formule problemas sobre proporcionalidad y porcentajes	30
	No se presentan situaciones que permitan distinguir comparaciones multiplicativas de aditivas, ni otras en las que ambas relaciones se trabajen de manera simultánea	12
	No se proponen situaciones de cálculo mental que involucren el razonamiento proporcional	17
Lenguajes	No se emplean diferentes tipos de representación de la relación de proporcionalidad ni se fomenta que los alumnos interpreten o traduzcan entre ellos.	18
Conceptos	No se presentan de manera clara los conceptos fundamentales (constante de proporcionalidad, covarianza de cantidades, invarianza de la razón)	28
	No se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales	18
	No se define con claridad la naturaleza proporcional del porcentaje	18
Proposiciones	Las proposiciones fundamentales del tema no aparecen de forma clara ni correcta	12
	No aparecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir cuando la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa	12
Procedimientos	Los problemas permiten a los alumnos decidir que procedimientos propios de la proporcionalidad son más adecuados	15
Argumentos	Las proposiciones y los procedimientos no aparecen justificados o el argumento es siempre del mismo tipo	22
Proceso de argumentación	No se proponen situaciones para que el alumno investigue, formule conjeturas y argumente sobre relaciones de proporcionalidad	18
Modelización/ Generalización	No se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para comprender relaciones entre magnitudes o generalizarlas	23
Conexión intra e interdisciplinar	El tema no aparece relacionado con otros contenidos transversales, historia de las matemáticas o de otras disciplinas	18

Por ejemplo, FM^{II}23 indica:

Es confusa la definición de porcentaje. No queda claro si es sinónimo o no de fracción.

No se aclara por qué las fracciones obtenidas son equivalentes. No se explicita la relación entre la razón “a de cada b” y la fracción a/b. No se explica que sólo las fracciones decimales se pueden expresar como porcentajes y que no todas las fracciones lo son.

También señalan conflictivo que el texto no incluya una definición clara y general de magnitudes proporcionales, sino que la descripción se particulariza a los ejemplos introductorios, vinculados con la representación por medio de una tabla de proporcionalidad. Por ejemplo, FM^{II}37 indica “no aparece una definición de lo que son las magnitudes proporcionales. Se usa la expresión tabla de proporcionalidad como sinónimo de serie de números proporcionales; se presentan como tales, tablas con 3 o 4 columnas, sin indicar que la serie es ilimitada”. Similarmente, otros participantes señalan como FM^{II}33 que “aparece un conflicto en cuanto a la explicación de por qué dos magnitudes son proporcionales. Únicamente, se justifica que no son proporcionales porque no pueden formar una tabla de proporcionalidad” (Figura 5.1).

El papel dado al registro tabular, y la carencia de explicación y justificación sobre su uso, puede llevar como indican varios FM a “pensar que la presencia de una tabla bidimensional supone la existencia de una relación de proporcionalidad” (FM^{II}23). Además, mencionan la ausencia de una definición explícita de constante de proporcionalidad (“no se hace explícito que la razón entre las cantidades que se corresponden debe ser siempre la misma: constante de proporcionalidad”, FM^{II}5) y que no se introduce ni emplea el modelo de la función lineal (“dejando también a un lado la relación de proporcionalidad con el modelo matemático de la función lineal”, FM^{II}45).

Aunque indican la carencia de las proposiciones fundamentales, no precisan cuales son éstas o qué proposiciones de las que incluye el autor son imprecisas o están incompletas. Únicamente FM^{II}33 aprecia que “no se especifica la constante de proporcionalidad ni tampoco las condiciones de regularidad que permiten considerar magnitudes directamente proporcionales”.

En cuanto a la ausencia de argumentación o justificación de los procedimientos en el libro de texto, los participantes indican como FM^{II}5 que “no se explica de forma adecuada el

procedimiento de reducción a la unidad en el libro de texto. Sólo indica ‘dividimos entre dos, es decir, reducimos a la unidad’ (ver Figura 5.2).

Ciertamente, cuando el autor del texto presenta el procedimiento de regla de tres, no explica por qué se escriben en forma de fracción los pares de valores que se corresponden, por qué son iguales las fracciones, o por qué se resuelve multiplicando ‘los datos conocidos que están en cruz’. Tampoco hace referencia a la propiedad: ‘en una proporción el producto de medios es igual al producto de extremos’. En este sentido, los participantes consideran como FM^{II}46 que “los procedimientos de reducción a la unidad y regla de tres no son claros, pudiendo darse el caso de que algunos alumnos no se den cuenta de que, para poder aplicarlos, es necesario que las magnitudes sean proporcionales”. En efecto, en la lección no se analizan o discuten qué condiciones deben cumplirse o qué supuestos hay que aceptar para que el modelo de proporcionalidad directa sea aplicable. Además, indican que estos son los únicos procedimientos dados y que no se ofrece al alumno la posibilidad de “discutir o explicar su punto de vista sobre otros procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad” (FM^{II}46).

De igual forma, todos los FM indicaron algún conflicto en la dimensión cognitivo-afectiva y todos son correctos (Tabla 7.8). Los participantes consideran que en la lección debería prestarse más atención a los conocimientos previos necesarios para abordar con éxito el estudio. Por ejemplo, indican como FM^{II}12 que la lección “no recuerda los conceptos de magnitud, unidad de medida, cantidad y valor numérico de las medidas; si el alumno no está familiarizado con estos conceptos puede ser que se cree un problema.” También señalan como limitación la falta de flexibilidad en la resolución de las situaciones-problema propuestas (“en casi ninguna ocasión se promueven estrategias diversas, por lo cual no hay apoyo individual”, FM^{II}35).

Con relación a la progresión en la dificultad, 15 participantes consideran que la dificultad es similar en las tareas. Su justificación se basa en que son actividades “todas del mismo tipo” sin llegar a contemplar los aspectos en relación con el contenido que influyen en la dificultad de las tareas, por ejemplo, la presencia de números enteros y no enteros, que no siempre se establezcan relaciones de divisibilidad entre las cantidades y que el orden de presentación de los datos en los problemas no sea siempre el mismo (Fernández y Llinares, 2011; Van Dooren, et al., 2009).

Tabla 7.8

Conflictos cognitivo-afectivos identificados por los FM y frecuencia (Fr.)

Componente	Descriptor del conflicto	Fr.
Conocimientos previos	No se contemplan los conocimientos previos en relación con fracciones, equivalencia de fracciones o medida de magnitudes	20
Diferencias individuales	La falta de diversidad de estrategias (construcción progresiva, aditivas, multiplicativas) evita el acceso y logro de todos los estudiantes	19
Progresión en la dificultad	La dificultad de las situaciones propuestas es similar.	15
	No se advierte de posibles errores (ilusión de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias o uso de estrategias aditivas erróneas)	22
Evaluación	No se proponen instrumentos de autoevaluación	28
	Los modos de evaluación no son adecuados para que los alumnos conozcan sus progresos y adquieran los conocimientos y competencias esperadas	12
Actitudes	No se fomenta la flexibilidad de los alumnos para explorar métodos alternativos de resolución de problemas.	24
Emociones	No existen elementos motivadores, ni se razonamientos lógicos u originales	17
Valores	No se promueve que el estudiante valore la utilidad de las matemáticas en su vida diaria (trabajo poco realista)	10

También consideran conflictivo que no se advierta a los alumnos de posibles errores (“en ocasiones aparecen recuadros que recuerdan elementos importantes de los procesos a seguir, pero no contemplan otro tipo de errores o dificultades”, FM^{II}23; “no se habla de errores comunes o fallos que puedan cometerse para intentar evitarlos previamente y beneficiar al alumnado”, FM^{II}45) y lo sitúan junto a la particularización en la presentación por parte del autor de la relación de proporcionalidad y de los procedimientos de reducción a la unidad y

regla de tres, como potencial uso de estrategias aditivas erróneas en algunas de las tareas propuestas. Por ejemplo, FM^{II}23 menciona que el alumno puede usar este tipo de estrategias en un problema de comparación (Problema 4 en Figura 7.2):

Otro conflicto cognitivo, lo podemos encontrar en el ejercicio 4, debido a que el alumno se fijará en el número de errores que ha tenido cada niño, decantándose por el niño pequeño como mejor resultado obtenido, sin tener en cuenta la proporcionalidad de aciertos y errores (FM^{II}23).

Figura 7.2

Tareas propuestas

<p>4 Dos hermanos comparan sus resultados en un examen. El mayor ha respondido correctamente a 25 preguntas de las 30 que tenía su prueba, y el pequeño a 16 de las 20 que tenía la suya. ¿Quién ha obtenido mejores resultados?</p>	<p>7 Una fotografía mide 15 cm de ancho y 10 cm de largo. Si Fiona quiere ampliarla para un marco de 45 cm de ancho, ¿cuánto medirá el largo?</p> <p>A. 30 cm B. 150 cm C. 50 cm D. 3 cm</p>
--	---

Fuente. Tomada de González et al. (2015, p. 123)

También FM^{II}45 considera que el “no advertir los errores” junto a que no se explique “de forma adecuada, la naturaleza multiplicativa en las comparaciones entre magnitudes proporcionales”, puede derivar en el uso incorrecto de estrategias de tipo aditivas:

Por otro lado, en el ejercicio 7, se presenta un conflicto cognitivo, debido a que [el alumno] vería la diferencia que hay entre 45cm y 15cm que serían 30cm y se lo sumaría a 10 cm, dando como resultado 40 cm o simplemente fijándose en los 30 cm y pondría ese resultado, pero sin asociar que es un problema de proporcionalidad.

Además, gran parte de los FM indican la falta de tareas de autoevaluación o que el uso como actividades evaluativas por parte del docente de los problemas de la lección, no permitiría medir correctamente la adquisición de conocimientos y competencias matemáticas. Finalmente mencionan el carácter rígido de la lección (“se centran en un solo método de resolución sin dar cabida a la flexibilidad, no hay ejercicios en los que se permita a los alumnos indagar ni explorar

métodos nuevos” FM^{II}7) y que no ofrece a los alumnos la posibilidad de valorar la utilidad de las matemáticas:

Se explica los mecanismos a seguir para realizar el procedimiento de reducción a la unidad y la regla de tres, pero no va más allá no se explica la utilidad de estos. No se crea en los alumnos la necesidad de utilizarlos en otro contexto o en su vida real (FM^{II}33).

Tabla 7.9

Conflictos instruccionales identificados por los FM y frecuencia (Fr.)

Componente	Descriptor del conflicto	Fr.
Interacción autor→alumno	La presentación del contenido por parte del autor no es clara ni está bien organizada	22
	No se promueven situaciones donde se busque consenso en base al mejor argumento	26
	No se usan diversos recursos argumentativos para implicar al estudiante	18
Interacción entre alumnos	Las tareas no favorecen un diálogo entre estudiantes donde cuestionen y argumenten sobre diferentes puntos de vista	26
Autonomía	No se plantean momentos para que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio	11
Recursos materiales	No se promueve el uso de materiales manipulativos para el estudio de la proporcionalidad (escalímetro, pantógrafo, compás de proporción, Geogebra...)	37
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades no es adecuada y no se reserva espacio suficiente a los contenidos más complejos	15

Como se observa en la Tabla 7.9, entre los principales conflictos instruccionales identificando por los participantes destacan las carencias en las componentes interaccionales y la escasa propuesta de recursos materiales en la lección. De manera similar a FM^{II}23, los participantes consideran que:

El autor no subraya conceptos clave como simetría de la relación de proporcionalidad, la constante de proporcionalidad, diferencia entre situación de proporcionalidad, procedimientos para resolver las situaciones y sistemas de representación empleados, y el porcentaje como expresión de proporciones. No se enfatiza ni se insiste en dialogar entre

compañeros para poner puestas en común. A penas se promueve el uso de materiales manipulativos.

En relación con la secuencia, también plantean que esta no es la adecuada. Fundamentalmente consideran que no se atiende a la progresión en los diversos significados de la proporcionalidad, que no se han incorporado otros procedimientos antes de incluir la regla de tres y que contenidos como las escalas requieren de una mayor explicación. Por ejemplo,

La secuencia no es la mejor ya que se debería de haber explicado la proporcionalidad con experiencias intuitivas referentes a la estimación, la regla de tres debería de haberse explicado al final de todo, una vez que los alumnos adquirieran la experiencia suficiente en este tema. No se le ha dedicado suficiente espacio al contenido de escalas que puede ser más complejo para ellos (FM¹¹13).

4.2.3. Propuesta de mejora y solución a conflictos

Además de la identificación de carencias, la toma de decisiones sobre el uso de los materiales forma parte de la competencia de intervención didáctica que deben adquirir los FM. Así, se solicitó a los participantes que sugiriesen cambios para mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto y elaborar propuestas concretas de solución efectiva a los conflictos que habían indicado (al menos cuatro de estos).

Las sugerencias de mejora que incluyeron fueron todas significativas y apropiadas (segunda columna en las Tablas 7.10, 7.11 y 7.12, a continuación). En relación con las propuestas de solución a conflictos, se considera, como en el Capítulo 6, la siguiente categorización:

- *no pertinente*, si no da solución al conflicto;
- *de pertinencia media*, si la solución que propone no es del todo adecuada o carece de fundamentación didáctico-matemática;

- *pertinente*, si da respuesta al conflicto en base a conocimientos didáctico-matemáticos específicos.

Por ejemplo, más de la mitad de los participantes plantean como conflicto que determinados conceptos no se presentan en la lección de manera clara, fundamentalmente, los de magnitudes proporcionales, porcentaje o escala. Ante este conflicto, sugieren definiciones que incluir en la unidad. Como se observa en la Figura 7.3, FM^{II}44 aprecia adecuadamente que la lección no introduce una definición de magnitudes proporcionales. Sin embargo, su propuesta de solución a este conflicto no es pertinente, en tanto la definición que propone es incorrecta:

Figura 7.3

Propuesta de definición de magnitudes proporcionales no pertinente (FM^{II}44)

No queda clara la diferencia entre magnitud proporcional y no proporcional. El libro presenta los siguientes enunciados: “El tiempo y el precio son magnitudes proporcionales. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad”. “El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales”.

En esta parte, añadiría la definición de magnitudes proporcionales, de manera que el alumnado comprenda qué significa y pueda comprobarlo con el ejemplo.

Por tanto, podríamos añadir:

“Una proporción es una igualdad entre dos razones. Dos magnitudes son proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye respectivamente, en la misma medida, por ejemplo: (Ejemplo propuesto en la lección).

Consideramos de pertinencia media la propuesta de FM^{II}40, al mismo conflicto, dado que como se observa en la Figura 7.4, si bien incluye una definición de la relación de proporcionalidad, esta no es del todo completa: no establece la relación funcional (no incluye la noción de constante de proporcionalidad) y particulariza la relación multiplicativa escalar.

Figura 7.4

Propuesta de definición de magnitudes proporcionales de pertinencia media (FM^{II}40)

Para dar solución al concepto de relación proporcional y su naturaleza multiplicativa, la definiría como: "Decimos que dos magnitudes son directamente proporcionales si cuando se duplica, triplica, etc., la medida de una cantidad de la primera magnitud, la medida de la otra magnitud también se duplica, triplica, etc."

En las Tablas 7.10, 7.11 y 7.12 resumimos las sugerencias de mejora y las frecuencias de propuestas efectivas de solución a conflictos en las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional, según las componentes a las que se vinculan y su grado de pertinencia (NP: No pertinente, PM: Pertinencia media, P: Pertinente).

Como hemos mencionado, estas mismas categorías fueron empleadas para analizar los informes de los futuros profesores de secundaria, en el segundo ciclo de intervención formativa (Capítulo 6). Resulta interesante que, en ambas experiencias (IICS, IICP), la mayoría de las propuestas de solución a los conflictos considerados por los futuros docentes corresponden aspectos epistémicos de las lecciones del libro de texto analizadas (60 en el IICS y 70 en el IICP). En relación con el grado de pertinencia de las propuestas efectivas de solución, mientras que en este IICP hay un mayor número de soluciones categorizadas como de pertinencia media en las tres dimensiones (epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional), en el IICS existen más soluciones categorizadas como pertinentes en las facetas epistémica e instruccional. Sin embargo, el mayor número de soluciones en lo cognitivo resultan no pertinentes.

Tabla 7.10*Propuesta de mejora y solución a conflictos epistémico-ecológicos. Grado de Pertinencia.*

Componente	Sugerencias de cambio	Propuesta efectiva de solución al conflicto			
		NP	PM	P	Total
Problemas	– Incluir problemas de semejanza, comparación. – Plantear actividades de cálculo mental en cada configuración.	7	8	1	16
Lenguajes	– Mejorar representaciones.	2	1	0	3
Conceptos	– Definir lo que son magnitudes proporcionales y no proporcionales. – Definir porcentaje y escala, relacionándolos con la proporcionalidad.	5	17	4	26
Proposiciones	– Destacar la relación escalar y la funcional.	2	0	0	2
Procedimientos	– Dar flexibilidad en resolución de problemas. – Explicar con detalle y separadas reducción a la unidad y regla de tres.	3	3	2	8
Argumentos	– Justificar todos los procedimientos	2	0	0	2
Procesos (Argumentación/ Modelización)	– Pedir a los alumnos que justifiquen todas las soluciones – Incluir función lineal con Geogebra	4	5	1	10
Currículo	– Relacionar con otros contenidos	2	1	0	3
Total		27	34	8	70

Los FM han propuesto solución a 70 de los conflictos epistémico-ecológicos identificados (es decir, al 26,44% de los que fueron identificados con cierta representatividad). Sin embargo, un porcentaje elevado de las propuestas se consideran no pertinentes. Con relación al componente problemas, aunque la mayoría de sugerencias de mejora tienen que ver con la necesidad de incluir problemas que cubran todos los significados de la proporcionalidad (Aroza et al., 2016), en concreto, señalan de semejanza o comparación, o que los alumnos planteen problemas de proporcionalidad (usualmente a partir de una “tabla de proporcionalidad”) la mayoría de propuestas concretas de solución a conflictos refieren a que el cálculo mental se contemple en todas las configuraciones (magnitudes proporcionales, reducción a la unidad, regla de tres, escalas) y no sólo con los porcentajes.

Más de la tercera parte de las propuestas abordan la necesidad de incluir en la lección definiciones apropiadas para los conceptos fundamentales: magnitudes proporcionales (Figuras 7.3 y 7.4), porcentajes y escalas. Sin embargo, en su mayoría las que plantean no son del todo adecuadas, o no mejoran las carencias que las motivan. En el caso de las magnitudes proporcionales, las definiciones o bien no son adecuadas (basadas en la propiedad en acto, “más en A..., más en B”) o bien sólo consideran la relación multiplicativa escalar (Figura 7.4). En el caso del porcentaje, destacan el porcentaje como símbolo, como fracción decimal y sólo en escasas ocasiones tratan de vincularlo con la relación de proporcionalidad, como se muestra en la Figura 7.5.

Figura 7.5

Propuesta de definición de porcentaje dada por FM^{II}44

Para dar solución al conflicto del concepto de porcentaje y su relación con la proporcionalidad, definiría el concepto como: “Un porcentaje es un símbolo matemático, %, que representa una cantidad dada como una fracción cuyo total (denominador) es 100. Los porcentajes pueden expresarse como una fracción decimal de denominador 100. Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el tanto por ciento de una cantidad se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada 100 de esa cantidad.”
--

Para la escala, proponen definirla como “una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida” (FM^{II}33). En otros casos, las propuestas de solución a conflictos son menos específicas, planteando, por ejemplo, pedir que argumenten la solución a los problemas, incluir la función lineal (por medio de Geogebra) o temas transversales y otros contenidos relacionados con la historia matemática.

Los participantes plantean propuestas de solución al 31,14% de los conflictos cognitivo-afectivos identificados. De estas, el 63,46 % se consideran con cierta pertinencia. La mayoría se centran en incluir en cada configuración, o bien globalmente al final de la lección, unas actividades de autoevaluación que deben venir resueltas al final del libro del alumno. En algunas de las propuestas, los FM consideran también un buen momento para incluir diversas estrategias de solución. Así FM^{II}39 indica:

Al final de la lección, dedicaría una sección de EVALUACIÓN y AUTOEVALUACIÓN, con problemas que incluyeran distintas maneras de darles solución ... Así se solucionaría el tener que llevar a cabo una evaluación a parte y que ellos mismos vean su evolución y sus puntos débiles y fuertes.

Tabla 7.11

Propuesta de mejora y solución a conflictos cognitivo-afectivos. Grado de pertinencia.

Componente	Sugerencia de mejora	Propuesta de solución al conflicto			
		NP	PM	P	Total
Conocimientos previos	– Incluir actividades para detectar y reforzar conocimientos previos	1	3	3	7
Diferencias individuales	– Incluir actividades de ampliación y refuerzo	3	2	0	5
Progresión en aprendizajes	– Ampliar el grado de complejidad de las tareas	2	5	0	7
Evaluación	– Cambiar configuración “repasa” por tareas reales de autoevaluación	6	17	0	23
Actitudes/ Emociones	– Proponer situaciones donde los alumnos conjeturen y exploren otros métodos – Proponer actividades más atractivas e interesantes	5	2	3	10
Total		17	29	6	52

Por otro lado, plantean comenzar la lección con unas actividades introductorias que permitan detectar qué conocimientos previos, con relación a fracciones, equivalencia de fracciones o medida de magnitudes, disponen los alumnos. Por ejemplo, FM^{II}4 indica:

me centraría en conocer conocimientos previos como el uso de fracciones o si saben que es una magnitud, para ello se podría realizar un cuestionario previo debido a que, muchas veces nos anticipamos a lo que los alumnos saben y conocen.

Para garantizar una adecuada progresión en los aprendizajes consideran necesario aumentar el nivel de complejidad, si bien no llegan a concretar tipos de actividades con las que lograría ese incremento. También proponen advertir a los alumnos de posibles dificultades con ciertos contenidos o errores frecuentes:

Solucionaría este conflicto añadiendo antes de la explicación del autor acerca del contenido a explicar en cada configuración, advertencias acerca de qué dificultades se pueden encontrar los alumnos en este apartado. Qué les puede resultar más complejo y los errores más comunes que suelen tener los alumnos en su comprensión (FM^{II}21).

En el aspecto afectivo, plantean como propuesta de mejora incluir “actividades que fomenten la curiosidad” (FM^{II}16), “no tan rutinarias, actividades más atractivas” (FM^{II}25). También creen que mejoraría el aspecto afectivo de la lección proponer situaciones donde los alumnos conjeturen y exploren ideas o métodos alternativos (FM^{II}17), pero no concretizan de qué forma.

Como se observa en la Tabla 7.12, en el caso de la propuesta de solución a conflictos instruccionales (el 40% de todos los indicados), si bien la mayoría sugiere el uso de recursos materiales o informáticos, no suelen explicitar qué tipo de recursos (salvo Geogebra o Excel) o de qué manera los usarían. Son propuestas que no se concretan en actividades para implementar en el aula, a excepción de la construcción de figuras a cierta escala, la elaboración o interpretación de mapas o la toma de medidas para el diseño de planos (Figura 7.6).

Tabla 7.12

Propuesta de mejora y solución a conflictos instruccionales. Grado de pertinencia

Componente	Sugerencias de mejora	Propuesta efectiva de solución al conflicto			
		NP	PM	P	Total
Interacción autor→alumno	– Ampliar y mejorar la explicación de cada configuración	7	7	0	14
Interacción entre alumnos	– Incluir actividades grupales – Pedir a los alumnos que dialoguen y debatan sobre las tareas	2	11	0	13
Autonomía	– Fomentar el trabajo autónomo	1	1	0	2
Recursos materiales	– Incorporar materiales manipulativos	16	8	4	28
Secuenciación	– Cambiar el orden de las configuraciones	0	4	1	5
Total		26	31	5	62

Figura 7.6

Propuesta de uso de recursos materiales (FM^{II}46)

Ausencia del uso de recursos y materiales variados: En la configuración de mapas y escalas, utilizaría mapas y planos reales para que los alumnos tuvieran que interpretarlos correctamente. Por ejemplo, podríamos realizar una actividad en la que los alumnos, por grupos, tienen que dibujar un plano del colegio y, posteriormente, calcular la escala a la que lo han hecho utilizando los pasos como unidad de medida.

Otros, proponen el uso de Google Maps (“Por ejemplo, con Google Maps calcular la distancia desde el colegio a la casa de cada alumno a través de la escala que nos ofrece esta herramienta, FM^{II}12). En general, se observa una falta de conocimiento sobre aquellos materiales que pueden ser adecuados para la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad (“no hacen falta materiales muy específicos, porque cualquier material que se pueda dividir ya puede ser útil para trabajar la proporcionalidad”, FM^{II}22).

Sobre la secuenciación, creen que mejoraría el proceso de estudio alterar el orden de presentación de las configuraciones, de manera que aparezcan las magnitudes proporcionales antes que los porcentajes y posponer la introducción de la regla de tres (“cambiaría el orden de las configuraciones, de manera que se trabajara la regla de tres como último contenido tal y como se indica en la secuencia apropiada de la proporcionalidad”, FM^{II}28).

En el componente interaccional, los participantes proponen mejorar la presentación del tema (“mejoraría la explicación en cada configuración didáctica, que es demasiado escueta y particularizada”, FM^{II}3), enfatizando los conceptos fundamentales del tema (constante de proporcionalidad, carácter simétrico de la relación de proporcionalidad, fundamentalmente) pero no llegan a hacer una descripción suficientemente precisa. Sí son más concretos cuando su propuesta se asocia a alguna de las tareas propuestas. Por ejemplo, para FM^{II}33 la formulación de la actividad 17 (Figura 5.10) puede dar lugar a un conflicto y sugiere el enunciado alternativo que aparece en la Figura 7.7.

Figura 7.7

Propuesta de reformulación a la actividad 17 (FM^{II}33)

Aparece un conflicto muy claro en el ejercicio 17, esto se debe a que, en esta actividad, nos plantean ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales?

En él aparecen una serie de recuadros donde aparecen una serie de magnitudes. Sin embargo, aparecen ancladas por parejas y además tienen el mismo color, lo cual puede llevar al niño a entender que esos pares de magnitudes son proporcionales únicamente porque los dos recuadros tienen el mismo color. Esto, yo lo cambiaría, y pondría todos los recuadros del mismo color para que no hubiera confusiones y además tampoco uniría los recuadros cada uno que fuera independiente.

Planteamiento de la actividad 17 corregida: ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son proporcionales? Explica porque lo son.

Litros de leche comprados	Precio total
Edad de una persona	Altura de la persona
Número de espectadores	Cantidad de entradas vendidas
Velocidad de un tren	Número de pasajeros

Finalmente, para garantizar una adecuada interacción entre los alumnos, los participantes proponen emplear algunas de las tareas más significativas de cada configuración para trabajarlas de manera colaborativa y aprovecharlas para que argumenten y justifiquen sus respuestas. En este sentido, también proponen añadir “justifica tu respuesta” en todos los problemas de la lección.

5. Conclusiones

En este capítulo hemos descrito el diseño, implementación y resultados del segundo ciclo de investigación con futuros maestros de primaria. A continuación, referimos a las conclusiones con relación a los objetivos previamente planteados.

5.1. Sobre la evolución de la competencia reflexiva en el análisis de lecciones de libros de texto

Haber incluido una valoración inicial de la lección, en un primer momento de diagnóstico, nos ha permitido observar con mayor fiabilidad la evolución en la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los participantes. Inicialmente los FM realizan valoraciones de la lección en las que, si bien usan implícitamente criterios de idoneidad didáctica, sus narrativas son superficiales y limitadas a algunos pocos aspectos que consideran esenciales. En las valoraciones finales se observan juicios críticos y pormenorizados que contemplan un mayor número de componentes de las distintas facetas que aparecen interconectadas en los procesos instruccionales. Así, se aprecia que en sus pareceres mencionan de manera explícita indicadores de idoneidad didáctica, que son valorados correctamente por la mayoría de los participantes en las dimensiones cognitiva-afectiva e instruccional. Además, aunque sólo 12 FM valoraron de manera adecuada la idoneidad epistémico-ecológica, estos reconocen la importancia de la argumentación y son más específicos en aspectos propios del contenido de proporcionalidad, por ejemplo, al valorar correctamente la necesidad de que se establezca de manera precisa la relación multiplicativa entre magnitudes proporcionales o que se diferencien comparaciones aditivas de las multiplicativas.

De acuerdo con el Capítulo 4 de esta memoria, en las experiencias previas (Castillo et al., 2021a) los resultados reflejaron incoherencias entre los juicios razonados sobre la idoneidad didáctica de la lección y las valoraciones de los indicadores en la GALT-proporcionalidad (por ejemplo, algunos participantes indicaban como negativas características que habían valorado con un 2 en el indicador asociado). En esta nueva intervención, todos los participantes han referido a los indicadores de la GALT-proporcionalidad en su juicio razonado sobre la idoneidad (ya sea de modo cuantitativo o descriptivo) y su parecer es consecuente con las valoraciones de los indicadores en el instrumento. Esta mejora en los resultados puede deberse

a que, en esta ocasión, los participantes aplicaron la guía de modo general a la lección logrando una visión más completa de ésta y a que se pidió que justificaran las puntuaciones dadas a los indicadores de la GALT-proporcionalidad, lo que les permitía reflexionar de manera más detallada sobre su decisión.

Por otro lado, hemos observado un cambio significativo en la motivación de los participantes con la utilidad de la GALT-proporcionalidad en comparación con las experiencias previas (Castillo et al., 2021a, Capítulo 4 de esta memoria). Esto puede deberse a que en esta intervención los participantes han tenido la oportunidad de encontrar el significado de los criterios de idoneidad (Schwarz et al., 2008) a través de la tarea pre-formación de exploración inicial. Como sugieren Schwarz et al. (2008) el uso de herramientas analíticas para ayudar a los maestros a tener una postura crítica debe tener significado accesible para estos, de lo contrario, pueden adquirir una posición de rechazo a la tarea o calificarla como demasiado difícil y poco práctica para su profesión.

Los resultados de la intervención muestran que el análisis de lecciones de libros de texto, empleando la idoneidad didáctica como recurso, es una actividad formativa que los futuros docentes consideran útil e interesante. Según manifiestan los participantes, la GALT-proporcionalidad les ayuda a seleccionar los aspectos críticos para tener en cuenta en el análisis de una lección de libro de texto:

Estas tablas [de la GALT-proporcionalidad] son una guía para conocer la calidad del libro de texto en cuestión. De la otra forma no te permitía fijarte en detalles realmente relevantes para el aprendizaje de los alumnos o, por el contrario, te fijabas en detalles que no tenían gran relevancia (FM^{II}9).

Las tablas [de la GALT-proporcionalidad] nos llevan a profundizar sobre los aspectos más importantes que se tienen que tener en cuenta en una lección de libro de texto, para que ésta funcione correctamente ya que este es el objetivo principal. No disponer de

estas tablas con los indicadores, hace que resulte complicado analizar dicha lección ya que habrá aspectos demasiado importantes que dejemos de lado (FM^{II}38).

No obstante, los resultados también advierten sobre la importancia de que los futuros profesores consoliden conocimientos y competencias didáctico-matemáticas necesarias para un futuro profesional reflexivo de la educación. Coincidimos con Remillard y Kim (2017) en que el tipo de análisis realizado es especialmente importante para los docentes de educación primaria, que normalmente no tienen una amplia preparación en matemáticas y, por tanto, están más inclinados a confiar en los recursos curriculares:

Al principio yo pensaba que casi todo estaría bien, que no habría ningún conflicto ya que si hubiese muchos conflictos no sería un libro que los alumnos utilizan en el colegio, etc. [...] Un solo vistazo del libro te puede parecer el mejor libro para tus alumnos, pero cuando te pones a analizar el libro tal vez tenga más conflictos de lo que te hubieses imaginado. Eso me ha pasado a mí (FM^{II}11).

Como afirma Santaolalla (2014) es habitual que los docentes consideren a los libros como una garantía de calidad y que estos pueden reemplazar al profesor, incluso “otros docentes... tienen tan poca confianza en su formación personal que no se atreven a hacer algún cambio en los libros de texto o a omitir algo incluso aunque parezca razonable” (p.194). De aquí la importancia de que los futuros profesores adquieran seguridad con su propia formación, y de que dispongan de los conocimientos didáctico-matemáticos suficientes para poder detectar las deficiencias y errores en libros de texto y otros recursos educativos. Al respecto, observamos que los participantes de nuestra experiencia se sintieron más seguros para llevar a cabo estas tareas al contar con una herramienta que guiara su análisis, adquiriendo una visión más crítica de la calidad del texto y modificando en su caso la opinión inicial sobre la lección.

5.2. Sobre la evolución de la competencia reflexiva en la identificación de conflictos y reflexión sobre modo de uso

En relación con el desarrollo en la competencia de los FM para identificar conflictos y tomar decisiones sobre la gestión del libro, un porcentaje elevado de los participantes indicó explícitamente que no observaban ningún elemento que pudiera obstaculizar el aprendizaje por parte de potenciales alumnos, si bien aquellos que indicaron alguna carencia, lo hicieron en general de manera oportuna, mostrando rasgos asociados a las distintas facetas que afectan a los procesos instruccionales, especialmente, en lo epistémico-ecológico.

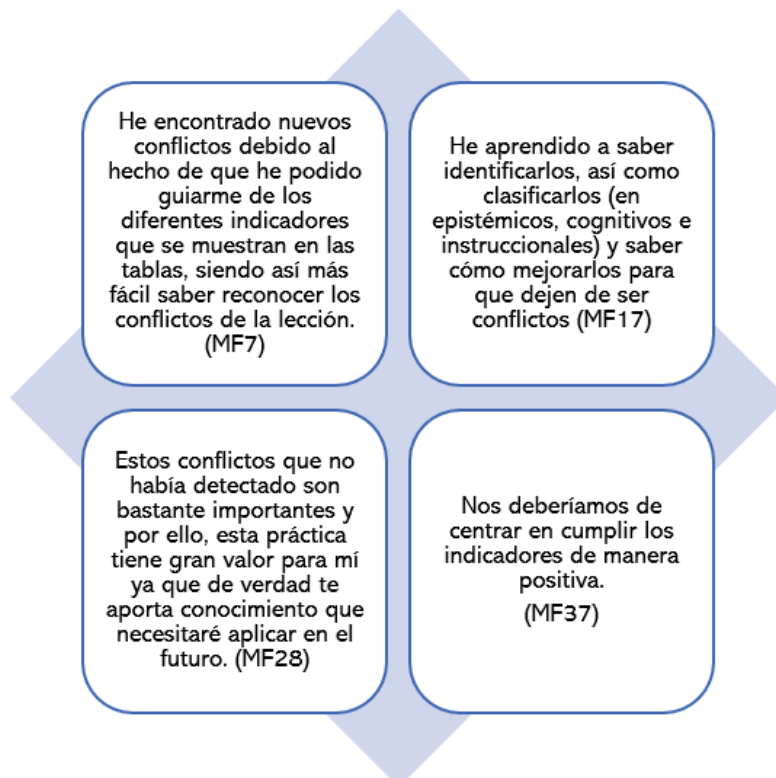
El análisis de las tareas de evaluación muestra que la formación sobre el análisis didáctico y la valoración de la lección en base a los criterios de idoneidad didáctica permite mejorar la competencia de los FM para identificar conflictos en la lección. Sin embargo, en relación con la toma de decisiones fundamentadas sobre la gestión del material, las propuestas de solución a conflictos no han sido del todo precisas o efectivas. Los participantes sabían qué querían cambiar, pero no tanto cómo.

Que los FM propongan solución a unos conflictos y no a otros, puede deberse a varios motivos. Por un lado, a sus propias creencias sobre cuáles son los aspectos más importantes para garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje “idóneo”. Los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios (en lugar de normas que son reglas) y por tanto son graduales (Breda, 2020). En tanto consensos a priori, los criterios de idoneidad parciales deben tratarse de manera conjunta, dando un peso relativo diferente a cada criterio en función del contexto. En la búsqueda del carácter idóneo de un proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, del equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto o las necesidades de los estudiantes inclina las decisiones en una determinada dirección (Breda, 2020).

Por otro lado, sus conocimientos didáctico-matemáticos influyen en sus propuestas para abordar unos aspectos con mayor seguridad que otros. Por ejemplo, hemos observado que las definiciones que plantean para magnitudes directamente proporcionales, porcentaje o escala, que califican como deficitarias en la lección, tampoco son adecuadas, o también que no llegan a precisar nuevas situaciones para trabajar de forma articulada los distintos significados de la proporcionalidad (Aroza et al., 2016), aunque lo habían considerado como carencia en la lección. A pesar de los FM recibieron formación sobre factores que afectan a la dificultad (Fernández y Llinares, 2011; Van Dooren, et al., 2009) y la diversidad de estrategias en problemas de proporcionalidad (Lamon, 2007), y de que identificaron conflictos en cuanto a la atención a la diversidad y progresión en el aprendizaje, no diseñaron tareas específicas para atenderlos. Los participantes dieron mayor respuesta a conflictos en el aspecto instruccional, siendo esta más adecuada cuanto menos dependía del contenido matemático.

Figura 7.8

Reflexiones de FM sobre la acción formativa



A la luz de estos resultados, creemos relevante fomentar este tipo de acciones formativas orientadas hacia el conocimiento y las competencias didácticas, pero centradas en la importancia del contenido a la hora de desarrollar las matemáticas necesarias para su enseñanza (Burgos, et al., 2020; Davis, 2015; Esqué de los Ojos y Breda, 2021). Los FM consideran necesario disponer de este tipo de guías basadas en los criterios de idoneidad didáctica para identificar conflictos y saber cómo gestionarlos (Figura 7.8).

Además, les ayuda a expresar sus ideas en términos formales, empleando un lenguaje profesional (“al identificar el fallo, quizá no sabía cómo expresarlo en términos didáctico-matemáticos”, FM^H29), aspecto que se puede considerar una evidencia de mejora en la competencia reflexiva de los participantes (Ivars et al., 2018).

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

En esta tesis hemos abordamos dos problemáticas, por un lado, la elaboración de instrumentos para guiar el análisis sistemático de lecciones de libros de texto de matemáticas de educación primaria y secundaria, en particular aquellas centradas en el estudio de la proporcionalidad. Por otro lado, el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas con futuros docentes de primaria y secundaria para desarrollar su competencia en el análisis crítico y constructivo de lecciones de libros de texto de matemáticas empleando los instrumentos de análisis previamente elaborados.

El marco teórico selecto para fundamentar y orientar nuestra investigación ha sido el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007). Con relación a la primera problemática, las nociones teóricas y metodológicas del EOS, en particular la idoneidad didáctica, y su sistematización por medio de componentes, subcomponentes e indicadores permite desarrollar instrumentos para un análisis sistemático y exhaustivo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular el proceso instruccional previsto o planificado en una lección de libro de texto de matemáticas por sus autores. Como sugiere Törnroos (2005) “el currículo potencialmente implementado abarca los libros de texto y otros materiales didácticos escritos utilizados en clase” (p. 317).

En cuanto a la segunda problemática, el modelo CCDM de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor desarrollado en el EOS (Godino et al., 2017), constituye el marco que sustenta el conocimiento del profesor de matemáticas y genera herramientas eficientes para desarrollar sus competencias didáctico-matemáticas (análisis de significados globales, análisis ontosemiótico y análisis de la idoneidad didáctica). La ingeniería didáctica, fundamentada en la aplicación de las herramientas del EOS es el enfoque metodológico seguido para planificar, realizar y valorar las diversas acciones formativas con los futuros profesores.

En este capítulo presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de la investigación. En primer lugar, exponemos el logro de los objetivos propuestos (Capítulo 1), así como las principales aportaciones que se derivan de este estudio en relación con las hipótesis de investigación previamente planteadas. Seguidamente presentamos las limitaciones de este estudio y proponemos líneas de investigación abiertas. Por último, referimos a otros aportes científicos derivados de esta investigación relacionados a los tres focos de atención que se abordan en este estudio (análisis de libros de texto, formación de profesores, enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad).

1. Conclusiones en relación con los objetivos e hipótesis de investigación

En este apartado, se presenta la discusión sobre el cumplimiento de los objetivos de investigación planteados en el Capítulo 1 de esta memoria, contrastando con los resultados descritos en los capítulos 4, 5, 6 y 7. Empezamos retomando cada uno de los objetivos específicos (OE1, OE2, OE3) e hipótesis iniciales (H1, H2, H3, H4 y H5), para culminar valorando el logro del objetivo general (OG) de esta investigación.

1.1. Conclusiones en relación con el primer objetivo específico

El tratamiento del OE1 se presentó en el Capítulo 3 de esta memoria.

OE1: Desarrollar instrumentos para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas que tenga en cuenta las facetas y componentes de la idoneidad didáctica, tanto para los procesos de instrucción matemática en general (GALT-Matemáticas) y en el tema de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad).

La elaboración de ambas guías (GALT-Matemáticas y GALT-proporcionalidad) supuso la revisión de investigaciones previas en relación con la propuesta de instrumentos para realizar un análisis sistemático de lecciones de libros de texto de matemáticas usados en educación primaria y secundaria. Esto permitió conocer los elementos que se deben tener en cuenta para realizar dicho análisis. Cuando estos reflejaban un consenso en la comunidad

científica de educación matemática se propusieron como indicadores de idoneidad didáctica específicos que conforman las guías.

Dichas guías deben entenderse como herramientas que facilitan al profesor la toma de decisiones sobre cómo usar una lección de libro de texto en el aula para optimizar el proceso instruccional. Además, las guías no sólo se pueden aplicar al análisis de lecciones de libros de texto, sino que pueden apoyar un análisis sistemático de otros procesos de instrucción planificados o implementados (Burgos y Castillo, 2021). Asimismo, no deben verse como productos acabados: constituyen instrumentos de análisis de una lección de un libro de texto que, al ser aplicada y discutida por los formadores de profesores y por los propios profesores e investigadores, debe ser progresivamente mejorado y enriquecido.

Como se evidenció en el Capítulo 1, son pocos los estudios que proponen un instrumento para guiar el análisis global de lecciones de libros de texto fundamentado desde la propia Didáctica de las Matemáticas. En nuestra revisión de antecedentes sólo los estudios de Monterrubio y Ortega (2012) y de Santaolalla (2014) lo proporcionan por lo que, en este sentido, la GALT-Matemáticas supone un aporte importante en esta área de investigación. Además, la guía que hemos elaborado posee dos cualidades que no se contemplan en estos estudios previos y que resaltan su carácter novedoso:

- Por un lado, la GALT-Matemáticas proporciona una organización de los indicadores de análisis que permite visualizar claramente el papel esencial de la actividad matemática y de los demás factores para tener en cuenta en su examen. Así, en los estudios de Monterrubio y Ortega (2011) y Santaolla (2014) se considera algunos aspectos del contenido como el análisis de las actividades o lenguaje. Por ejemplo, Monterrubio y Ortega (2011) consideran un organizador denominado “contenidos” en donde se propone el análisis general de su “presentación, (...), procedimientos teóricos” (p.114), los “ejemplos, razonamiento matemático, temas transversales, educación en atención a

la diversidad...” (p.114). Similarmente en Santaolalla (2014) se considera el organizador “contenidos” en donde propone en general analizar su “justificación y tratamiento” (Santaolalla, p. 395). En definitiva, el organizador “contenidos” es general, perdiendo especificidad en el análisis del contenido matemático y descuidando otros elementos como los conceptos, proposiciones, argumentos, procesos matemáticos.

- Los estudios de Monterrubio y Ortega (2011) y Santaolalla (2014) proponen instrumentos que se conforman por organizadores y dentro de estos se propone una lista de aspectos para analizar, pero sin orientar sobre cómo deberían estar presentes en el libro de texto. En este sentido, la GALT-Matemáticas al contemplar no sólo la organización por facetas, componentes, subcomponentes sino también considerar la formulación de indicadores de idoneidad, proporcionan mayor claridad al usuario sobre qué elementos valorar en la lección de libro de texto y cómo deberían estos estar presentes (permitiendo una valoración cuantitativa cuando sea de ayuda).

Por su parte, la GALT-proporcionalidad, como síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos para tener en cuenta en el diseño, implementación y evaluación de procesos de instrucción matemática sobre dicho contenido, constituye un puente entre el complejo entramado de información didáctica disponible (contenida en trabajos de investigación, documentos curriculares, recursos instruccionales, entre otras fuentes) y la práctica efectiva de la enseñanza (Godino et al., 2012). La GALT-proporcionalidad permite guiar el análisis, más allá del contenido matemático, de una lección de libro de texto de proporcionalidad, y orienta la reflexión global de las distintas facetas implicadas. Esta es una aportación novedosa y relevante según la revisión de antecedentes que hemos realizado en esta investigación, ya que los estudios encontrados que analizan lecciones de libros de texto de proporcionalidad se restringen al análisis de aspectos meramente matemáticos.

En esta investigación se ha aplicado la GALT-proporcionalidad al análisis de cuatro lecciones de libros de texto para su valoración en cada faceta. Las lecciones de libros de texto seleccionadas para el análisis fueron las siguientes:

- Lección de Arias y Maza (2015, p.136-149) dirigida a estudiantes de primer año de educación secundaria obligatoria en el contexto español (1º ESO), que se propuso para su análisis a los futuros profesores de secundaria participantes del primer ciclo de experimentación (ICS). Dicha lección se descompuso en cuatro unidades de análisis: la razón y proporción, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa y porcentajes.
- Lección de González et al. (2015), dirigida a estudiantes de 6º curso de educación primaria españoles. La lección fue dividida en tres unidades de análisis: magnitudes proporcionales, reducción a la unidad y regla de tres; escalas y mapas (González et al., 2015, p.116-121) y se propuso para su análisis a los futuros maestros de educación primaria participantes del primer ciclo de experimentación (ICP). Esta misma lección se consideró para un segundo ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria (IICP), pero de manera ampliada (González et al., 2015, p. 112-127), considerando el tema de porcentajes y las actividades de aplicación que se incluyen en el texto. En dicho IICP, la lección se consideró dividida en configuraciones sólo para el análisis didáctico (ontosemiótico), y de forma global para el análisis empleando la GALT-proporcionalidad.
- Lección de Porras et al. (2013, p.127-136) dirigida a estudiantes costarricenses de séptimo grado de educación secundaria considerada de forma global para su análisis, que se propuso para su análisis a los futuros profesores de secundaria participantes del segundo ciclo de experimentación (IICS).
- Lección de Alvarado (2014, p. 92-107) dirigida a estudiantes costarricenses de séptimo grado de educación secundaria considerada de forma global para su análisis, que se

empleó como ejemplo de análisis en la formación teórica que recibieron los futuros profesores de secundaria participantes del segundo ciclo de experimentación (IICS).

Nuestra investigación propone que la valoración de la pertinencia de una lección de proporcionalidad de libro de texto, no debe contemplar sólo los aspectos que refieren al contenido matemático, sino que es preciso evaluar las demás facetas (cognitiva, afectiva, instruccional, ecológica) involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El consenso del análisis realizado constituyó el marco de referencia (análisis a priori) para la posterior evaluación de los informes de los participantes en las experiencias formativas que se han llevado a cabo en cada caso. Este análisis permitió concretar debilidades y potenciales conflictos presentes en dichas lecciones. Dado que las carencias aquí detectadas pueden ser útiles a los autores de estas lecciones, para corregir y proponer mejoras, así como evitar en la medida de lo posible potenciales conflictos en el aprendizaje de los estudiantes, mostramos a continuación una síntesis de las que consideramos más relevantes:

- En la lección de Arias y Maza (2015) en relación con la faceta epistémica no se hace explícita la relación multiplicativa que caracteriza a las situaciones proporcionales, no se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional, ni se establecen conexiones de la proporcionalidad con las fracciones y números racionales. Respecto a las dimensiones cognitiva-afectiva, no se promueven diversas estrategias correctas para la resolución de problemas ni se promueve la participación en actividades, tratando actitudes como la perseverancia, responsabilidad, etc. Respecto al aspecto instruccional la presentación de los porcentajes es rutinaria y aparece desconectada de las secciones previas. Tampoco se introduce la regla de tres después de que el alumno haya podido ganar experiencia en métodos más intuitivos, desatendiendo las recomendaciones de diversas investigaciones (Fernández, 2001; Fernández y Linares, 2012).

- En cuanto a la lección de González et al. (2015), resulta significativo la ausencia o inexactitud de argumentos y el descuido de los procesos de comunicación, modelización y generalización, así como la presentación inadecuada de la definición de porcentaje. Destaca la ausencia de una definición general para la relación de proporcionalidad directa, ya que sólo parece vinculada a la tabla de proporcionalidad, y para el concepto de escala donde sólo se define para casos particulares (en el aspecto epistémico). También resalta el que se obvie los conocimientos previos requeridos por los alumnos y que no se fomenta el uso de diversas estrategias correctas en la resolución de las tareas de proporcionalidad (en lo cognitivo). La lección se organiza de modo que primero se da la teoría y luego se ejercita: no existen referencias que promuevan en el alumno la búsqueda de otros modos de solución; los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista no se promueve lo suficiente (en el aspecto afectivo). En cuanto a la presentación que hace el autor del texto es incompleta, poco clara o confusa (en lo instruccional).
- En lo epistémico resulta especialmente conflictivo que en la lección Porras et al. (2013) las situaciones-problemas son poco representativas y diversas, también que los conceptos no se presentan de forma clara y correcta, por ejemplo, razón y proporción se plantean como sinónimos, y se proporciona una definición recursiva de la relación de proporcionalidad directa e inversa. Asimismo, las condiciones que garantizan las relaciones de proporcionalidad directa e inversa no se definen claramente y la condición de regularidad suele omitirse en las explicaciones y los problemas que se proponen. En lo cognitivo-afectivo, no se introducen diferentes estrategias de resolución, sólo la obtención de la constante de proporcionalidad, que no se dota de significado ni para la relación directa ni inversa. Esto puede propiciar que los alumnos resuelvan mecánicamente las situaciones y no desarrollen la flexibilidad de exploración de ideas

matemáticas o métodos alternativos. Desde el punto de vista ecológico no se trata el significado algebraico-funcional ni el registro gráfico, que debe contemplarse según el plan de estudios costarricense (MEP, 2012). En lo instruccional no se promueve el diálogo, comunicación o debate de ideas basados en el uso de argumentos matemáticos.

- En cuanto a la lección de Alvarado (2014), las situaciones problemas no son lo suficientemente representativas, siendo la mayoría tabulares y de valor faltante. No se incluyen los modelos de función lineal, función de proporcionalidad inversa o función afín para las relaciones de proporcionalidad directa, inversa y para distinguir estas de otras relaciones que no son multiplicativas. Además, existen errores graves con relación a los ejemplos de relaciones de proporcionalidad directa, como cuando afirman que “sabemos que al aumentar la longitud del lado de un cuadrado aumenta proporcionalmente su área” (Alvarado, 2014, p.101). En las dimensiones cognitiva-afectiva, puede ser conflictivo que no se incluya una explicación previa o ejemplificación de la representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa, pero que luego se les pida a los alumnos graficarla. Tampoco se promueven diversas estrategias de solución por lo que no se fomenta la flexibilidad o el uso de métodos alternativos. En lo instruccional no se favorecen la autonomía o el debate entre los estudiantes mediante los problemas propuestos. Desde el punto de vista ecológico no se contemplan todas las representaciones que han de estudiarse según el MEP (2012).

En todas las lecciones se prioriza el enfoque aritmético de la proporcionalidad. Asimismo, no parece haber una secuencia de estudio del contenido que dé comienzo con una aproximación informal-cualitativa previo a su formalización, por lo que no existe una progresión desde la estructura aditiva hacia la estructura multiplicativa. Esto puede desencadenar en el uso indiscriminado de la regla de tres y generar un razonamiento proporcional inadecuado (Fernández, 2001; Fernández y Linares, 2012).

Los resultados en el aspecto epistémico coinciden con los obtenidos en trabajos previos en el marco del EOS que han aplicado la noción de conflicto semiótico a la revisión de libros de texto (Arteaga y Diaz-Levicoy, 2016; Gea et al., 2015; Salcedo et al., 2018). En estos se identifican entre otros conflictos el tratamiento inadecuado de los conceptos, presencia de definiciones poco claras, el uso de un lenguaje inapropiado en relación a los contenidos que se tratan y una visión limitada del tipo de situaciones-problema involucradas. Los resultados también concuerdan con estudios previos que reportan un tratamiento poco adecuado del contenido de proporcionalidad en los textos escolares (Ahl, 2016; Burgos, Castillo et al., 2020; Shield y Dole, 2013).

1.2. Conclusiones en relación con el segundo y tercer objetivo específico

El diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas con futuros profesores de educación secundaria fue contemplado en los capítulos 4 y 6 de esta memoria, y con futuros profesores de educación primaria en los capítulos 5 y 7. En cada caso, se llevaron a cabo dos ciclos de experimentación (ICS y IICS con futuros profesores de secundaria; ICP y IICP con futuros maestros de primaria).

OE2 y OE3: Diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas con futuros profesores de educación secundaria y educación primaria para desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad.

La descripción de las tareas, la metodología de trabajo seguida, los objetivos de aprendizaje que planteamos, los análisis de las lecciones empleadas y otros elementos incluidos en planificación de los experimentos constituyen un material didáctico que esperamos sean útiles a los formadores de profesores. Por otro lado, es importante hacer notar que dadas las condiciones del contexto al que se dirige cada ciclo de experimentación, la adaptación de los

instrumentos es imprescindible. En los Anexos (del 1.1 al 1.4) de esta memoria puede verse cambios en los diferentes indicadores que son más evidentes, por ejemplo, en la versión de la GALT-proporcionalidad entregada a los futuros profesores costarricenses (Anexo 1.3.2), donde se realizó una revisión más amplia de la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad inversa, como contenido que deben conocer los profesores de esta etapa educativa. También esperamos que este estudio sirva a los formadores de maestros para comprender la complejidad de las competencias y conocimientos que han de activarse al trabajar con diversos recursos educativos, así como la importancia de la práctica reflexiva como herramienta para mejorar el trabajo docente (Morales-López y Araya-Román, 2020).

Siguiendo las fases de la metodología de experimentos de enseñanza propias de la ingeniería didáctica según el EOS (Godino, Rivas et al.2014), el diseño de las experiencias formativas conllevó, por un lado, la elaboración de las guías de análisis (Capítulo 3) y por otro, el análisis a priori de las lecciones de libros de texto que se seleccionaron para el análisis de cada experiencia. En la confrontación con el análisis a priori consensuado por el equipo investigador hemos confirmado la presencia de dificultades de los participantes al resolver correctamente las tareas de análisis que se les propuso. Las principales dificultades son:

- *Valorar críticamente una lección de libro de texto de proporcionalidad.* La mayoría de las valoraciones realizadas por los participantes de las diferentes experiencias suelen ser más adecuadas al valorar la idoneidad cognitiva-afectiva e instruccional-ecológica de las lecciones que al valorar la idoneidad epistémica por medio de los indicadores de la GALT-proporcionalidad. Por ejemplo, en el IICS más de la mitad de futuros profesores responden adecuadamente al valorar las facetas cognitiva, afectiva y ecológica, pero en las facetas epistémica e interaccional destacan las valoraciones nada adecuadas. Algo similar ocurre en el IICP donde la mayoría de los participantes hacen valoraciones más pertinentes en las dimensiones cognitiva-afectiva e instruccional y

una minoría valoraron de manera adecuada la idoneidad epistémico-ecológica. Esto confirma la hipótesis H1: *los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para valorar críticamente una lección de libro de texto de proporcionalidad.*

- *Proponer un juicio de idoneidad razonado.* Tanto en el ICS como en el ICP, la falta de argumentos que justifiquen sus valoraciones, en base al instrumento de análisis empleado, caracterizó los informes de los participantes. Los resultados obtenidos reflejaron análisis más descriptivos y menos analíticos incluso con el apoyo de una guía como en estudios previamente contemplados (Lloyd y Behm, 2005; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008; Yang y Liu, 2019). Este aspecto también está vinculado al cumplimiento de H1.
- *Identificar las debilidades o conflictos más relevantes* (principalmente en lo epistémico). Las deficiencias epistémicas de las lecciones de libros de texto en general no son identificadas claramente por los participantes en las diferentes experiencias. Esta dificultad se relaciona parcialmente con H3 (*los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para identificar conflictos semióticos en una lección de libro de texto*).
- Proponer cambios concretos sobre los conflictos o debilidades detectados (adaptar y gestionar el uso del texto). Por ejemplo, en el IICP y IICS, a pesar de que tanto antes como después de la formación, los participantes reconocen que el libro de texto debe usarse como un material de apoyo, y que el posicionamiento crítico del profesor es fundamental, la tarea de decidir cómo usar el libro de texto resulta compleja (Nicol y Crespo, 2006; Taylor, 2013). Coincidiendo con investigaciones como las de Brown (2009) o Taylor (2013), creemos que progresar en la adaptación efectiva del material requiere tiempo, conocimientos y habilidades específicas que a medida que el profesor

las adquiriera, harán que los ajustes que se realicen sean más frecuentes, intencionados y específicos.

- *Discriminar objetos matemáticos.* En la intervención con futuros maestros de primaria (ICP), los participantes realizan un análisis incompleto de las prácticas, objetos y procesos matemáticos. Fundamentalmente, no identifican proposiciones o argumentos en la lección, lo que les limita para especificar tipos de conflictos epistémicos y cognitivos presentes en la lección; resultado que evidencia que *los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para discriminar objetos matemáticos e identificar conflictos semióticos en una lección de libro de texto (H3).*

El análisis a priori es el referente que permite estudiar la resolución de las tareas que los participantes tuvieron que elaborar, pero también constituye junto con las guías elaboradas, el marco que ha permitido organizar y fundamentar muchos de los conocimientos que eran necesarios en el desarrollo del experimento de enseñanza. Existe pues, una estrecha relación entre la correcta valoración de los indicadores que componen las guías y los conocimientos didáctico-matemáticos de que dispongan los profesores en formación. Por tanto, los resultados sobre las valoraciones de las lecciones por parte de los futuros docentes nos permiten identificar carencias de conocimientos didáctico-matemáticos o dificultades con las herramientas teórico-metodológicas empleadas, que guían la toma de decisiones de las formadoras (en relación, por ejemplo, al rediseño del instrumento o de la secuencia de tareas en la intervención) tras cada implementación.

En las experiencias del ICS, ICP y IICP los futuros docentes encontraron grandes limitaciones para identificar las deficiencias de la lección en la faceta epistémica, lo que podría explicarse por un conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad limitado no identificado de manera previa a la intervención. Por ejemplo, en dichas experiencias se encontró que los futuros docentes no valoraron correctamente algunos aspectos vinculados al

conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad y razonamiento proporcional: si la relación multiplicativa se hace explícita, si se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional, si se plantean relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales o si existen oportunidades para que el alumno diferencie las comparaciones aditivas y multiplicativas, entre otras. En cuanto al IICS hemos recopilado evidencias más concretas sobre este aspecto, que apoyan que *un conocimiento didáctico-matemático insuficiente de la proporcionalidad impide que los futuros profesores de matemáticas reflexionen críticamente sobre la gestión de uso de las lecciones de libro de texto de proporcionalidad* (H2). En efecto, en el IICS, aplicamos un cuestionario para indagar sus conocimientos didáctico-matemático en relación con la resolución y creación de problemas de proporcionalidad directa e inversa, y la detección de errores en respuestas prototípicas de alumno. Los resultados de ese cuestionario mostraron que la mayoría tuvo dificultades para resolver correctamente los problemas planteados y crear un problema de proporcionalidad inversa. Es más, en este ciclo de experimentación algunos participantes reconocieron explícitamente tener dificultades con el contenido de proporcionalidad.

Así, se hace necesario profundizar en los conocimientos que requieren los futuros docentes para analizar la idoneidad didáctica de recursos educativos, como pueden ser los libros de texto, en un proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido concreto.

Los resultados obtenidos en IICS y IICP sugieren también que *es posible progresar en estas dificultades mediante el diseño e implementación de intervenciones con futuros profesores de matemáticas destinadas a desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto aplicando la GALT-proporcionalidad* (H4). En ambos ciclos de experimentación, constatamos una evolución en la competencia de los participantes. Así mismo la mayoría de los participantes se autocorrigieron en las evaluaciones iniciales que daban a la lección mostrando finalmente valoraciones más detalladas y cambiando

justificadamente su opinión sobre la evaluación global de la lección. Será necesario estudiar con más detalle el cumplimiento de esta hipótesis, para lo que es necesario un seguimiento y evaluación continua.

También podemos afirmar que *el análisis retrospectivo de las intervenciones con futuros profesores de matemáticas, permite mejorar el instrumento para el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria* (H5). Para los segundos ciclos de experimentación, se modificaron aquellos indicadores que habían sido conflictivos (deficiencias de interpretación y valoración correcta por los participantes) en intervenciones previas (ICS, IICP). Así, por ejemplo, el indicador sobre la secuenciación de contenidos (faceta instruccional), se reformuló dadas las dificultades que los futuros profesores de secundaria tuvieron en la experimentación previa (Castillo et al., 2021a). Además, dada la naturaleza del proceso de instrucción analizado, algunos participantes expresaron dificultades al valorar con rigor indicadores de la faceta cognitiva, afectiva especialmente las creencias, interaccional y mediacional (Castillo et al., 2021a; Castillo et al., 2022). Los resultados evidencian que estas modificaciones tuvieron efectos positivos, ya que finalmente fueron valorados de modo correcto por la mayoría de los participantes (al menos en el IICS), con lo cual podemos considerar que el instrumento empleado (GALT-proporcionalidad) ha mejorado en ese sentido (mayor claridad y precisión de los indicadores).

Considerando los resultados de las diferentes experiencias, sintetizamos a continuación las principales estrategias formativas que han sido aplicadas, junto con la reflexión sobre su nivel de eficiencia en cada ciclo de experimentación, esperando que sean de utilidad a los formadores de profesores:

- Aplicar la guía de modo general a la lección y no por unidades de análisis o configuraciones cuando el usuario se está iniciando en el uso de la herramienta. Se evidencia un cambio en los resultados de las experiencias del IICS y IICP, en relación

con la consistencia entre las valoraciones finales sobre la idoneidad didáctica de la lección y las valoraciones puntuales a los indicadores de idoneidad (aplicación de la guía). Una conclusión en este sentido es que, al menos cuando los participantes están empezando a familiarizarse con la guía, solicitar la valoración global de la lección puede ayudar a los usuarios a tener coherencia en sus análisis. Si la dedicación temporal lo permite o bien, existe la oportunidad de llevar a cabo este tipo de intervenciones a largo plazo, sería prudente que cuando los participantes tengan mayor manejo y conocimiento de la herramienta, se solicite hacer el análisis por configuraciones.

- Reflexionar sobre el modo de uso de la lección, tras valorar su idoneidad, permite involucrar a los futuros profesores en análisis más profundos. Esta reflexión debe fortalecerse solicitando a los participantes la propuesta de cambios concretos ante una carencia detectada. En efecto, en el IICP y IICS se evidencia que la formación sobre la idoneidad didáctica y el uso de una guía específica como la GALT-proporcionalidad permite mejorar la competencia de los FP para identificar conflictos en la lección, como lo sugeríamos en los primeros ciclos de experimentación (ICP, ICS).
- Si se dispone del espacio temporal adecuado, es recomendable que el diseño de las intervenciones con futuros maestros de primaria y secundaria contemple tanto el análisis didáctico de la lección de libro de texto, como el análisis y valoración de la idoneidad didáctica con el uso de la guía (GALT-proporcionalidad).
- Para iniciar el estudio de la herramienta de idoneidad didáctica se recomienda considerar las opiniones iniciales de los participantes como evidencia de uso implícito de criterios de idoneidad didáctica, de modo que el constructo se introduzca como pauta para organizar la reflexión del profesorado y permita a los participantes encontrar el significado de los criterios de análisis (Schwarz et al., 2008).

- Incluir además de la columna para registrar la valoración numérica (0,1,2) según el nivel de cumplimiento de cada indicador, una columna de justificación, para que especifiquen las razones que los lleva a asignar dicha valoración, puede influir tanto positiva (a nivel epistémico) como negativamente (a nivel afectivo). El insistir en la justificación de las diversas tareas es una estrategia que busca que los participantes brinden respuestas menos descriptivas y más analíticas, resulta una buena estrategia a nivel epistémico, ya que se evidencia una reflexión más detallada sobre la idoneidad del texto en las experiencias donde se aplicó IICS y IICP. No obstante, desde el punto de vista motivacional, puede resultar en una tarea excesiva para los usuarios, por ejemplo, en el IICS los participantes se mostraron preocupados por tener que justificar 64 indicadores. En este punto, se puede valorar omitir esta columna de justificación, pero insistir en que al realizar el juicio razonado brinden detalles sobre porque hacen una determinada valoración (parcial, total o nula) respecto de algún indicador específico que consideren relevante mencionar en su respuesta, cuando identifican debilidades y fortalezas.

1.3. Conclusiones en relación con el objetivo general (OG)

Basándonos en la revisión de los antecedentes descritos en el Capítulo 1, no encontramos estudios que traten el análisis global de lecciones de libros de texto en un tema matemático en concreto (como la proporcionalidad), como una competencia a fomentar en los programas de formación de profesores de matemáticas, por lo que esta investigación supone un aporte en esta línea.

OG: Promover en los futuros profesores de educación primaria y secundaria la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, utilizando como recurso las lecciones de libros de matemáticas en el tema de proporcionalidad.

Como afirman Castro y Velásquez (2014), “la formación del maestro debería incluir experiencias que favorezcan la construcción de un panorama más amplio de su futuro ámbito profesional” (p.51). Una labor compleja que forma parte de este panorama profesional es el análisis crítico y reflexivo de los procesos de instrucción. Por ello, es importante analizar qué estrategias de formación mejoran las críticas de los profesores de matemáticas de los recursos educativos, en particular de las lecciones de libros de texto (Yang y Liu, 2019).

La metodología de análisis de lecciones de libros de texto que proponemos permite al docente analizar sistemáticamente la adecuación de lecciones en un tema concreto, contemplando aspectos como el afectivo, que normalmente quedan relegados a un segundo plano y ser capaces de concretar aspectos referentes a la gestión de dicho recurso para aumentar la calidad del proceso de instrucción planificado.

La potencialidad de esta investigación reside en dotar a los futuros profesores de una herramienta para analizar sistemáticamente una lección concreta de libro de texto, en este caso de proporcionalidad, y valorar su idoneidad didáctica por medio de la aplicación de indicadores resultado de un consenso sobre lo que se considera adecuado en la comunidad de investigación en educación matemática. Se trata de permitir que los futuros profesores puedan reflexionar y adquirir conocimientos y competencias necesarias, no sólo en el análisis de lecciones de libros de texto, sino en la gestión crítica de éstas.

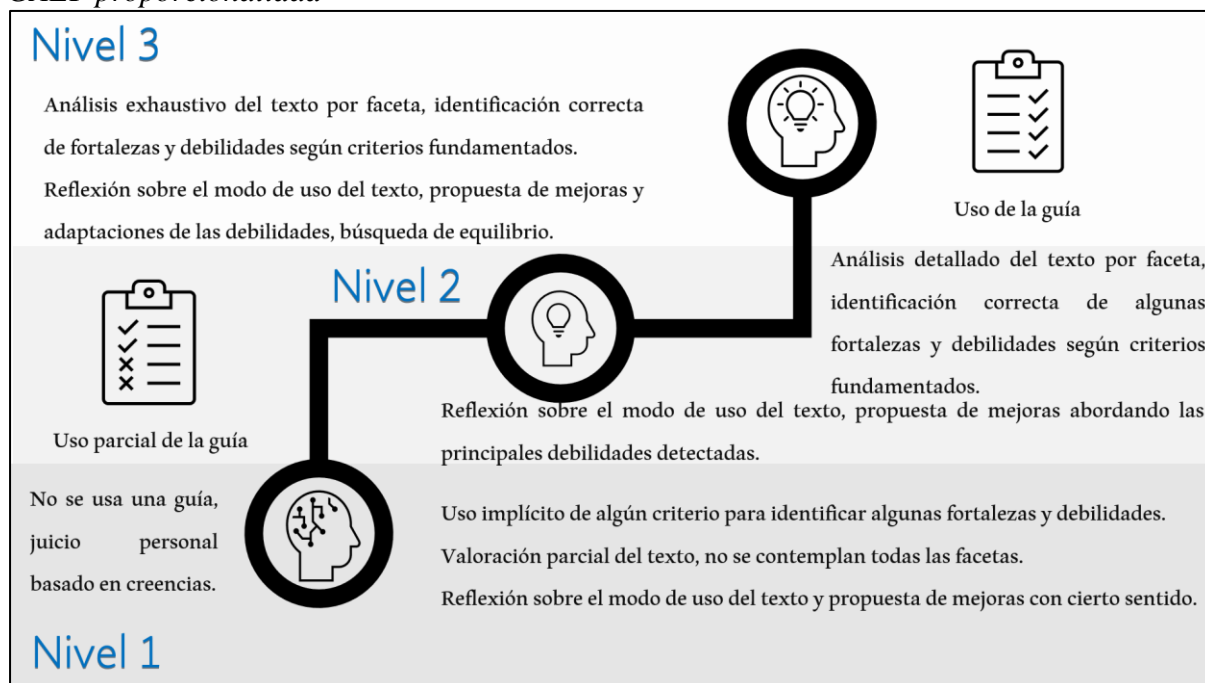
En esta investigación, se pretendía promover en los participantes la capacidad reflexiva de los futuros docentes, por medio de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, según el marco teórico adoptado, el EOS (Godino et al., 2007) y empleando la GALT-proporcionalidad para tal fin. La propuesta de Morales (2019) sobre la caracterización para el desarrollo de la subcompetencia de valoración de idoneidad didáctica nos permite valorar el cumplimiento del OG. Sin embargo, dado que nuestro estudio se centra en el uso de la GALT-proporcionalidad como instrumento de análisis, creemos conveniente adaptar dicha

caracterización. Por ello, proponemos en la Figura 8.1 tres niveles de desarrollo de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica con la GALT-proporcionalidad.

Como hemos evidenciado en la revisión de antecedentes, en el área de investigación de análisis de libros de texto se reconoce que el profesor debe ser capaz de identificar fortalezas y debilidades y adaptar los materiales para promover oportunidades de aprendizaje óptimas a los estudiantes (Beyer y Davis, 2012; Grossman y Thompson, 2008; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz et al., 2008; Shaver, 2017; Remillard, 2005). Estos aspectos están contemplados en la propuesta de la trayectoria en el progreso de la competencia de análisis de lecciones de libros de texto, utilizando la GALT-proporcionalidad (Figura 8.1).

Figura 8.1

Niveles de desarrollo de la subcompetencia valoración de idoneidad didáctica empleando la GALT-proporcionalidad



La GALT-proporcionalidad proporciona referencias al futuro profesor para reconocer fortalezas, debilidades y conflictos potenciales en una lección de libro de texto, o de forma más general, en un proceso instruccional y, de esta manera, guiar al usuario en la propuesta de cambios o adaptaciones para optimizar el proceso de instrucción que se valora en las diferentes

facetas. En definitiva, la GALT-proporcionalidad apoya el desarrollo de la competencia reflexiva del docente.

En efecto, se identifica la referencia a indicadores de idoneidad contemplados en la guía, se usan para valorar el texto (precisan fortalezas, debilidades), se precisan conflictos potenciales y se sugieren y realizan cambios (se adapta) la lección en función de la valoración. En esta investigación se ha comprobado que la GALT-proporcionalidad dota al profesorado en formación de un lenguaje profesional que permite describir la actividad matemática que se propone en el texto que se analiza, centrando su atención en la valoración desde diversas perspectivas (epistémica, cognitiva, instruccional, afectiva, ecológica), lo que les ayuda a proporcionar o sugerir cambios fundamentados para una instrucción más adecuada. El uso de la GALT-proporcionalidad, la elaboración de juicios razonados una vez aplicada la misma y la reflexión sobre la gestión de uso de la lección, permite caracterizar la competencia de idoneidad didáctica de los estudiantes para profesor.

Considerando los resultados de la evaluación de los informes entregados por los participantes de cada experiencia formativa, podemos comprobar que en cada una de ellas se ha promovido la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, empleando la GALT-proporcionalidad. Naturalmente los niveles de logros de esta competencia varían en cada ciclo de experimentación según el contexto formativo, los participantes y en general el entorno en el que se desarrollaron. Siguiendo la caracterización de los grados de desarrollo e indicadores de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica propuestos en Morales (2019, p.242) y la adaptación que propusimos en la Figura 8.1, de modo específico, se aprecia que:

- En el ICS y ICP, los resultados reflejan que los participantes alcanzan como mínimo un Nivel 2 de desarrollo de la competencia de valoración de la idoneidad didáctica. En efecto, los participantes muestran un análisis detallado de la lección de libro, especifican

información correctamente en relación con objetos matemáticos (tipos de situaciones, tipos de representaciones, enfoques...), identifican y describen algunas deficiencias o limitaciones de la lección de modo pertinente y son capaces de plantear aspectos relevantes en la gestión de uso del libro. En general, los participantes hacen un uso parcial de la GALT-proporcionalidad al formular el juicio razonado de la idoneidad didáctica de las lecciones y reflexionar sobre los modos de uso ya que, como se concluyó en los capítulos 4 y 5, aunque algunos futuros docentes no fueron consistentes con la valoración de los indicadores y la valoración final de la lección, sí propusieron algunas mejoras correctamente.

- Tanto en el IICS como en el IICP, inicialmente los participantes realizan una valoración usando implícitamente criterios de idoneidad didáctica (Nivel 1), y posteriormente realizan una valoración pormenorizada empleando la GALT-proporcionalidad. Los resultados reflejaron que hay un paso de una narrativa superficial inicial, a un análisis más detallado y que en general reconocen la importancia de considerar las idoneidades parciales para valorar las lecciones de libro de texto (Nivel 2). En contraste con las experiencias del ICS y ICP, la totalidad de participantes hacen referencia al instrumento cuando plantean su juicio razonado ya sea de modo cuantitativo, descriptivo o argumentativo, siendo este un indicador del Nivel 3 de alcance de la competencia.

El progreso en el discurso profesional puede ser considerado como evidencia del desarrollo de esta competencia. En los experimentos aquí descritos, el futuro profesorado elabora un discurso más detallado y específico sobre el proceso instruccional analizado, aportando evidencias que apoyan sus interpretaciones y llegando a tomar decisiones justificadas sobre su gestión de uso. En esta investigación la GALT-proporcionalidad ayudó a los participantes a progresar en su competencia, entendiendo esta mejora como la elaboración

de un discurso más detallado, específico y ordenado sobre el proceso instruccional que se estudia.

2. Limitaciones y futuras líneas de investigación

En relación con la GALT-Matemáticas y la GALT-proporcionalidad, en futuras investigaciones, planteamos contemplar indicadores que refieran al análisis de los manuales dirigidos al profesor, valorar el uso de esta guía para aplicarla en la comparación de libros de textos y, por supuesto, en la adaptación a otros contenidos matemáticos específicos.

Otra cuestión abierta corresponde al diseño y evaluación de lecciones basadas en el uso de hipertextos y otros recursos tecnológicos. Por ejemplo, sería interesante adaptar y aplicar el instrumento que aquí hemos presentado al análisis de otros recursos que se muestran cada vez más demandados. En este sentido, en Burgos y Castillo (2021) se muestra la extensión del uso de las herramientas GALT-Matemáticas y GALT-proporcionalidad en el análisis de vídeos educativos.

Con relación a la implementación de las intervenciones formativas, una limitación encontrada es el hecho de que los futuros docentes no han tenido la oportunidad de familiarizarse lo suficiente con las facetas, componentes y criterios de idoneidad didáctica y con la herramienta GALT-proporcionalidad. Esto puede explicar algunas de las dificultades que los participantes experimentaron al llevar a cabo las tareas propuestas en las intervenciones. Reconocemos que, lamentablemente, la dedicación temporal de la que disponíamos en las diferentes experiencias no es suficiente para estudiar y promover el desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos y de la competencia de análisis didáctico. Para obtener mejores resultados en el aprendizaje de los futuros profesores y maestros se requiere más tiempo, así como involucrarlos gradualmente en tareas más complejas como puede ser la adaptación de las lecciones analizadas.

Sería deseable contar con nuevas experiencias para valorar como progresan los futuros docentes en la profundidad de los conocimientos didáctico-matemáticos detrás de cada indicador y evaluar cómo influye en la mejora de su competencia reflexiva. Así, de cara a futuras intervenciones se hace necesario un análisis didáctico previo de las situaciones-problemas (clasificación según tipología, contenido matemático y finalidad) que ayude a los futuros maestros para tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones y si son diversas y representativas (tanto en significado como en dificultad) para poder tener un juicio más acertado en relación con el nivel de cumplimiento de los indicadores asociados. En este sentido, las actividades iniciales de diagnóstico pueden también permitir destacar los factores que influyen en los niveles de dificultad de las tareas proporcionales, ya que los futuros maestros no han tenido en cuenta la presencia o ausencia de dichos factores como un argumento para reflexionar sobre el nivel de dificultad de los contenidos.

La proporcionalidad, como contenido explícito forma parte de los currículos oficiales. Sin embargo, implícitamente, es un tópico que aparece involucrado en muchos de los problemas de estructura multiplicativa que los alumnos de primaria trabajan en cursos previos y que no resuelven por medio de la regla de tres. Sería interesante reflexionar con los futuros maestros y profesores de secundaria sobre este hecho y sobre la importancia y necesidad de disponer de estrategias que permitan construir un adecuado razonamiento proporcional, fundamentado sobre las diversas interpretaciones del número racional y las formas de razonar con estos significados (Lamon, 2007).

Por otro lado, en las diferentes experiencias formativas aquí descritas, hemos podido corroborar que los futuros docentes se ven influenciados por sus convicciones cuando analizan los textos (Shawer, 2017). Así, por ejemplo, en el segundo ciclo de experimentación (Capítulo 7) la mayoría de los participantes en nuestra experiencia consideraron que un buen libro debe tener variedad de tareas, pero eran menos los que reconocían el importante papel de la

argumentación o comunicación de ideas. Teniendo en cuenta que hay escasos estudios en los que se analizan las creencias de los docentes sobre el currículo y la relación de estas con sus ideas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y cómo se desarrollan en la formación del profesor (Lloyd, 2002), sería oportuno en futuras intervenciones analizar si tras la formación, los participantes logran desarrollar creencias ricas sobre el papel de estos recursos en la enseñanza de las matemáticas.

Creemos que las guías de análisis como la GALT-proporcionalidad, para dicho contenido o la GALT-Matemáticas en general, pueden ayudar a identificar las creencias que los futuros profesores tienen sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dado que es difícil valorar el cambio en las creencias si no se analiza cómo estas se manifiestan en su práctica docente (Lloyd, 2002) sería adecuado, en la línea propuesta por Yang y Liu (2019): a) inferir las creencias de los futuros docentes en el análisis de lecciones contrastándolas con un estudio más profundo aplicando un cuestionario específico; y b) observar si tras participar en experiencias de formación continua, los participantes logran desarrollar y materializar creencias ricas sobre el papel de estos recursos en la enseñanza de las matemáticas.

Los libros de texto y otros recursos digitales sirven a los profesores como enlace entre el currículum previsto y el mundo tan diferente y complejo del aula (Valverde, et al., 2002), por lo que deben estar capacitados para emplearlos de diversas formas teniendo en cuenta las necesidades de sus estudiantes (Lloyd, 2002). Es posible que los resultados de nuestra investigación hubieran sido distintos con docentes en ejercicio o si los participantes hubieran podido llevar a la práctica en un aula de primaria o secundaria la lección y sus propuestas de mejora, como ocurre en el trabajo de Esqué de los Ojos y Breda (2021). Es necesario por tanto investigar los resultados de una intervención formativa como la descrita en este trabajo, cuando las propuestas deben ser implementadas de manera efectiva en un contexto real de clase. Profundizar en la comprensión de las características relacionadas con los objetos matemáticos,

sus representaciones y relaciones que destacan los profesores en sus críticas de los materiales curriculares, aporta información metodológica y educativa relevante en los programas de formación de profesores (Yang y Liu, 2019). Dado que las críticas de los profesores a los libros de texto pueden estar relacionadas con su experiencia y conocimiento previo sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Yang y Liu, 2019), es necesario investigar los resultados de una intervención formativa como la descrita en este trabajo, implementada con profesores en ejercicio, comparando las creencias inferidas a partir de sus críticas, el análisis e identificación de conflictos en las lecciones de libros de texto, y la gestión y uso efectivo del libro de texto en el aula. De manera específica, sería deseable investigar acciones formativas que promuevan en maestros noveles la adopción de modelos de adaptación del texto (el profesor realiza cambios concretos según el contexto al que se enfrenta, basados en juicios pedagógicos) en lugar de modelos de adhesión (el profesor utiliza el texto tal cual se le presenta, sin considerar sus debilidades o posibles cambios que según el contexto de clase serían pertinentes realizar).

También planteamos la necesidad de implementar intervenciones formativas como las aquí descritas dirigidas a los formadores de profesores. Esta inquietud surge como parte del análisis retrospectivo que se llevó a cabo tras culminar el IICS, implementado en la Universidad de Costa Rica por la doctoranda. Dentro de esta experiencia, se llevó a cabo una reunión con la directora del Departamento de Educación Matemática y con la profesora habitual del curso MA-0007 en la que se aplicó la experiencia. La reunión tenía dos objetivos. El primero, compartir los resultados preliminares de la implementación de cara a la toma de decisiones formativas, tanto a nivel local, en el marco del curso MA-0007, como a nivel general, en la carrera Educación Matemática, sobre la promoción de la competencia de análisis de libros de texto y la atención de dificultades asociadas al tema de proporcionalidad. El segundo, en posición de investigadora, conocer las opiniones de los responsables educativos sobre posibles causas de algunos de estos resultados que dieran mayor validez a la interpretación de los datos.

Producto de esa reunión, la profesora habitual del curso MA-0007, que estuvo presente durante toda la intervención como oyente, manifestó que incluso ella había experimentado dificultades al reflexionar sobre la adecuación de los textos, principalmente los que se presentaron a modo de ejemplo durante la implementación de la intervención. La capacitación a los formadores de docentes en el uso de este modelo, como parte de sus propias prácticas profesionales, es una problemática que debe atenderse y que puede tener resultados interesantes a largo plazo en la formación de futuros profesores en relación con la promoción de esta competencia.

3. Otras implicaciones científicas de la investigación

Según Fan (2013) la investigación en el análisis de libros de texto generalmente plantea cuestiones en relación con: a) los libros de texto en sí, b) cómo los diferentes factores afectan al desarrollo o la producción de libros de texto, c) cómo los libros de texto afectan a otros factores. Nuestro estudio representa un avance en este campo de investigación, ampliando las cuestiones a abordar en un tratamiento no meramente descriptivo. El tipo de análisis desarrollado produce información sobre cómo la forma en que se aborda un contenido matemático en un libro de texto puede influir en un proceso instruccional basado en el uso de este recurso, si los docentes son conscientes de estas influencias y si son capaces de proponer los cambios adecuados de acuerdo con el resultado de estos análisis.

Con relación a las investigaciones centradas en fomentar la reflexión sobre la práctica (Malet et al., 2021), consideramos que los resultados aquí descritos muestran la posibilidad de avanzar en la competencia de análisis e intervención didáctica, por medio de la valoración de idoneidad didáctica como herramienta para promover el análisis y la adaptación de lecciones de libros de textos. Este estudio también supone un avance en las investigaciones que tratan de comprender cómo, cuándo y cuánto adaptan los profesores los materiales curriculares (Taylor, 2013). Un aspecto que sería relevante continuar investigando, ya que como se ha comprobado,

no todas las adaptaciones son iguales y dichas variaciones conducirán a diferentes efectos en el aprendizaje de los estudiantes.

En la línea de experimentos de diseño, estudio de caso y cursos de formación que se explican en Breda et al. (2017), los experimentos que se pusieron a prueba a lo largo de esta tesis confirman que, en nuestra investigación, también se identifican las regularidades que describen dichos autores. A saber: a) los participantes cuando opinan (sin un modelo previo dado) sobre la lección de libro de texto, hacen comentarios descriptivos o explicativos; b) dichas opiniones son evidencias de alguna de las facetas del conocimiento del profesor (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional, afectiva) y, c) dado que son opiniones valorativas sobre el texto, se organizan en los componentes de los criterios de idoneidad didáctica.

Por otro lado, los resultados obtenidos constituyen una contribución al campo de investigaciones que tienen por objeto avanzar en la comprensión del conocimiento activado por los profesores cuando usan recursos educativos (Remillard y Kim, 2017). Este tipo de acciones formativas orientadas hacia el conocimiento y las competencias didácticas, ponen de manifiesto la importancia que tiene el contenido a la hora de usar y desarrollar de manera pertinente las matemáticas necesarias para su enseñanza.

La especificidad de las guías de análisis de libros de texto para el contenido matemático puede servir como catalizador sobre aspectos que han de contemplarse en los programas de formación de profesores respecto a la enseñanza y aprendizaje, en nuestro caso de la proporcionalidad. Este es un aspecto importante, dado que como indican Weiland et al. (2021) son escasas las investigaciones que abordan el conocimiento necesario para que los docentes puedan enseñar de modo pertinente este tema.

REFERENCIAS

- Ahl, L. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks, *REDIMAT*, 5(2), 180–204.
<https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1987>
- Alvarado, M. (2014). *Matemática 7, serie ser competentes*. Santillana.
- American Association for the Advancement of Science (AAAS) (2000). *Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks-based evaluation*. Recuperado de <http://www.project2061.org/publications/textbook/mgmth/report/part1.htm>
- ANELE (2021). El libro educativo en España – Curso 2020-2021. Recuperado de <https://anele.org/wpcontent/uploads/2020/09/200911TXT-ANELE-La-edicion-educativa-20-21.pdf>.
- Arias, J. y Maza, S. (2015). *Matemáticas, 1º ESO*. Código Bruño.
- Arıcan, M. (2019a). Facilitating pre-service mathematics teachers' understanding of directly and inversely proportional relationships using hands-on and real-world problems. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 5(1), 102–117.
- Arıcan, M. (2019b). A diagnostic assessment to middle school students' proportional reasoning. *Turkish Journal of Education*, 8(4), 237–257.
<https://doi.org/10.19128/turje.522839>
- Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *Avances en Innovación e Investigación*, 6(1), 1–29.
- Arteaga, P. y Díaz-Levicoy, D. (2016). Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria. *Educação e Fronteiras On-Line*, 6(17), 81–96.

- Artigue, M. (1989). *Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Avalos, B. (2011). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years. *Teaching and Teacher Education*, 27(1), 10–20.
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.08.007>
- Avila, A. (2013). La alfabetización matemática y su relación con el intercambio comercial, la escolaridad elemental y el trabajo. *Bolema*, 27(45), 31–53.
- Avila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 31–59.
<https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Balcaza, T., Contreras, Á. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1061–1081.
- Ball, D. y Cohen, D. (1996). Reform by the book: what is: or might be: the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher*, 25(9), 6–14.
- Ballesta, J. (1995). Función didáctica de los materiales curriculares. *PIXEL-BIT*, (5), 29–46.
- Barbosa, W. y Barbosa, R. (2021). O Enfoque Ontossemiótico: uma análise da geometria na coleção de livro didático de Matemática no Ensino Técnico Integrado ao Médio. *Revemop*, 3, e202113. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202113>
- Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). MacMillan.
- Bel, J. y Colomer, J. (2018). Teoría y metodología de investigación sobre libros de texto: análisis didáctico de las actividades, las imágenes y los recursos digitales en la

- enseñanza de las Ciencias Sociales. *Revista Brasileira de Educação*, 23(353), e230082.
<https://doi.org/10.1590/S1413-24782018230082>
- Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, 50(1), 1–20.
- Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación*, 30(4), 633–662. <https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651>
- Ben-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C. y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 36(3), 247–273.
- Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher.
- Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 113–135.
- Beyer, C. J. y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Science Education*, 96(1), 130–157. <https://doi.org/10.1002/sce.20466>
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247–304.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona].

- Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199–218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas, *Bolema*, 34(66), 69–88.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Fernandes, J. y Calle, E. (2021). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. *Mathematics Teaching Research Journal*, 13(1), 31-51.
- Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.
- Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. En J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, y G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). Routledge.
- Bufo, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA*, 28(48), 21–41.

- Bufo, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 23, 229–251.
- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 34(2) (en prensa).
- Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad por maestros en formación. *Revemop*, 4, e202204. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema*, 33(63), 389–410. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 1–20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 367–389. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27–45. <https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>

- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–22. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013>
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema* 34(66), 40–69. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Burgos, M., Godino, J. D, Giacomone, B. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. *ALME Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 706–713.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55–86.
- Cabero-Fayos, I., Santágueda-Villanueva, M., Roig-Albiol, A. I. y Villalobos-Antúnez, J. V. (2020). Understanding of Inverse Proportional Reasoning in Pre-Service Teachers. *Education Sciences*, 10(11), 308. <https://doi.org/10.3390/educsci10110308>
- Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo XXI Editores.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Riberiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>

- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022b). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, en prensa.
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022c). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, 36(72), 555–579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021a). Evaluación de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre análisis de libros de texto. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 197–204). SEIEM.
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021b). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *ACTA SCIENTIAE*, 23(4), 169–206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, 34(2), 39–71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787.
- Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022c). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>

- Castro, W. F. y Velásquez, H. (2014). Idoneidad didáctica de la práctica de maestros en formación inicial en un contexto urbano de conflicto social violento. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 33–54.
- Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham, y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295–309). Springer International Publishing.
- Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 331–353.
<https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Confrey, J. diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.
<http://www.jstor.org/stable/3699928>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.
- Córdova, S. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación*, 7(26), 81–91.
- Cramer, K. y Post, T. (1993a). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404–407.
- Cramer, K. y Post, T. (1993b). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher*, 60(6), 342–346.

- Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. En D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159–178). Macmillan.
- Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School, Reston*, 14(2), 86–91.
- Davis, B. (2015). Las matemáticas que los profesores de educación secundaria conocen (o necesitarían conocer). *Revista Española de Pedagogía*, 73(261), 321–342.
- De Bock, D., Neyens, D. y Van Dooren, W. (2017). Students' Ability to Connect Function Properties to Different Types of Elementary Functions: An Empirical Study on the Role of External Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 939–955. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9724-z>
- De Bock, D., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional and affine functions: Two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 47–69. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9475-z>
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An indepth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311–334. <https://doi.org/10.1023/A:1021205413749>
- Degrande, T., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Open word problems: Taking the additive or the multiplicative road? *ZDM Mathematics Education*, 50(1), 1–12. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0900-6>
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M. y Piñeiro, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de Educación Primaria

- española. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado*, 20(1), 133–156.
- Dole, S. y Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 19–35.
- Dyer, E. B. y Sherin, M. G. (2016). Instructional reasoning about interpretations of student thinking that supports responsive teaching in secondary mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 48(1), 69–82.
- Ercole, L. K., Frantz, M. y Ashline, G. (2011). Multiple ways to solve proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(8), 482–490.
- Escuela de Matemática de la UCR. (2015). Programa del curso MA-0007 matemáticas en el currículum escolar. Recuperado de <https://emate.ucr.ac.cr/images/EMATE/Departamentos/Ensenanza/Programas/MA-0007.pdf>
- Esqué de los Ojos, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38–54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 765–777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la RSME*, 5(2), 397–416.

- Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Realidad y Reflexión*, 53(53), 40–60. <https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10887>
- Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67–80. <https://doi.org/10.1174/021037011794390111>
- Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129–142.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, 44, 747–759. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y>
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 441–468.
- Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study. A Japanese approach to improving mathematics learning and teaching*. Erlbaum.
- Fernández, P., Caballero, P. y Fernández, J. A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas? *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, 83, 131–148.
- Fernández-Lajusticia, A. (2001). *Precursores del racionamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. <http://roderic.uv.es/handle/10550/38017>
- Ferrero, L., Martín P., Alonso, G. y Bernal, E. I. (2015) *Matemáticas 6*. Anaya.
- Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Síntesis.

- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matematica Pesquisa*, 8(1), 67–98.
- Font, V., Breda, A., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp.23–38). SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices, *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89–105.
- Fortuny, J. M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación matemática*, 1, 23–37.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Fúneme, C., Linares, L. y Sepúlveda, O. (2021). Análise ontosemiótica de um Livro Didático colombiano da Educação Básica: o caso da Matemática Comprimento do objeto. *Revemop*, 3, e202128. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202128>
- Gairín, J. y Oller, A. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249–259). SEIEM.
- Gea, M. M., López-Martín, M. y Roa, R. (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 29–49.

- Gellert, U., Becerra, R. y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 327–360), Springer International. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_11
- Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–21.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237–284.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111–132.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En: A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195).
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199–219.
- Godino, J. D., Batanero, C. Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2016). The theory of didactical suitability: Networking a system of didactics principles for mathematics education from different theoretical perspectives. [Conferencia]. *TSG51.13th*

International Congress on Mathematical Education. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/ICME13_TSG51_PA_Godino.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El Enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 12(2), 47–59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, 3, e202107. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202107>

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of CERME8*. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8(1), 46–74. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46>

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 1–25.
- Godino, J. D., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Gea, M. y Giacomone, B. (2019). Structuring the system of didactical suitability criteria of mathematics instruction processes [Póster no publicado]. 71 *CIEAEM*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/ingles/documentos/JDGodino_Poster_CIEAEM_2019.pdf
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de la lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*, 9(especial), 131–155.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247–265.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113.
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa*, 7(2), 331–354.
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167–200.
- González, M. y Sierra M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389–408.
<https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21990>

- González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., Vidal, J. M. y Hidalgo, V. (2015). *6 Matemáticas. 6 Primaria. Trimestral. Savia*. Ediciones SM.
- Grossman, P. y Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers. *Teaching and Teacher Education*, 24(8), 2014–2026. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.05.002>
- Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Síntesis.
- Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* [Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle].
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades*, (Vol. 2, pp. 198–219). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9>
- Hill, H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372–400.
- Hilton, A. y Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 545–574. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7>
- Hummes, V., Font, V., y Breda, A. (2019). Combined use of the lesson study and the criteria of didactical suitability for the development of the reflection on the own practice in the

training of mathematics teachers. *Acta Scientiae*, 21(1), 64–82.

<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*.

Basic Books.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourses. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599.

Izsák, A. y Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' reasoning about relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(3), 300–339.

<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.3.0300>

Jacobs, V. R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–

202. <https://www.jstor.org/stable/20720130>

Kajander, A. y Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173–181.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 219–233.

Kelly, A., Lesh, R. y Baek, J. (2008). *Handbook of design research in methods in education: innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

- Kesidou, S. (2001). Aligning curriculum materials with National Science Standards: the role of Project 2061's curriculum-materials analysis procedure in professional development. *Journal of Science Teacher Education*, 12(1), 47–65.
- Kim, O. K. (2007). Teacher knowledge and curriculum use. En T. de Silva Lamberg y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1114–1121). PME
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41–61.
<https://doi.org/10.5951/jresematheduc.24.1.0041>
- Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Erlbaum.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–668). Information Age Publishing.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). The National Council of Teachers of Mathematics.
- Lim, K. H. (2009). Burning the candle at just one end: Using non-proportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(8), 492–500.
- Lin, P-J. (2018). The Development of Students Mathematical Argumentation in a Primary Classroom, *Educação y Realidade*, 43(3), 1171–1192.
- Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(2), 22–43.

- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(2), 53–70.
- Lloyd, G. (2002). Mathematics teachers' beliefs and experiences with innovative curriculum materials. The Role of Curriculum in Teacher Development. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 149–159). Kluwer Academic Publishers.
- Lloyd, G. M. y Behm, S. L. (2005). Preservice elementary teachers' analysis of mathematics instructional materials. *Action in Teacher Education*, 26(4), 48–62.
<https://doi.org/10.1080/01626620.2005.10463342>
- Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. M. (2021). La Idoneidad Didáctica como herramienta metodológica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop*, 3, e202110.
<https://doi.org/10.33532/revemop.e202110>
- Martínez, A. (2015). Examining students' proportional reasoning strategy levels as evidence of the impact of an integrated LEGO robotics and mathematics learning experience. *Journal of Technology Education*, 26(2), 46–73.
- Martínez, G. y Penalva, C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 285–298.
- Martínez, S., Muñoz, J. M., Oller, A. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libris de texto de 2º de ESO. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 955–122.
- Martínez-Bonafé, J. (1992). ¿Cómo analizar los materiales?. *Cuadernos de Pedagogía*, (203), 14–18.
- Martínez-Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de Asociación de Sociología de la Educación*, 1(1), 62–73.

- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge-Falmer.
- Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance-a commentary. *ZDM Mathematics Education*, 48(1–2), 219–226. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0764-1>
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) de España (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. (BOE 293, de 8 de diciembre de 2006, pp. 43053-43102). MEC.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) de España (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. MECD.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) de España (2014b). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. MECD.
- Misailidou, C. y Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22(3), 335–368.
- Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133–157.
- Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75–92.
- Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A. y Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(3), 313–324.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88.

- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de Matemáticas. *PNA*, 5(3), 105–127.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación*, (358), 471–496. http://www.revistaeducacion.educacion.es/doi/358_087.pdf
- Morales, L. (2019). Competencia de análisis e intervención didáctica del docente de primaria en Panamá. [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona].
- Morales-García, L. y Navarro, C. (2021). Idoneidad Epistémica del Significado de Número Natural en Libros de Texto Mexicanos. *Bolema*, 35(71), 1338–1368. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a06>
- Morales-López, Y. y Araya-Román, D. (2020). Helping Preservice Teachers to Reflect. *Acta Scientiae*, 22(1), 88–111. <http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5641>
- Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa*, 45, 1–19. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468>
- Nagar, G. G., Weiland, T., Brown, R. E., Orrill, C. H. y Burke, J. (2016). Appropriateness of proportional reasoning: Teachers' knowledge used to identify proportional situations. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 474–481). Tucson, AZ.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Nicol, C. C. y Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 331–355. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y>

- Nogueira, I. (2015). Análise ontossemiótica de procesos instruccionales de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente. *Revista de Estudos e investigação en Psicología y Educación*, (6), 209–2143. <https://doi.org/10.17979/reipe.2015.0.06.582>
- Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59–81.
- Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi, (Comps.), *Desarrollo psicológico y educación. Volumen 2. Psicología de la Educación Escolar* (2ª ed.) (pp. 487–508). Alianza Editorial.
- Orrantia, J., González, L. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 429–451.
- Orrill, C. H., Izsák, A., Cohen, A., Templin, J. y Lobato, J. (2010). *Preliminary observations of teachers' multiplicative reasoning: Insights from does it work and Diagnosing teachers' multiplicative reasoning projects*. Technical report #6. Kaput Center for Research and Innovation in STEM Education.
- Piaget, J. (1978). *Psicología del niño*. Morata.
- Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429–1456.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123–150.

- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones ¿Qué nos dice la literatura científica? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 91, 45–54.
- Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de Matemática a través del diseño de tareas. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1),71–98.
- Porras, V., Porras, J. y Villegas, E. (2013). *Matemáticas 7°*. Compas ERV.
- Posadas, P. y Godino, J. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, (1), 77–96.
- Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177–198). SUNY Press.
- Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2017). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research*, 30(1), 85–102. <https://doi.org/10.1007/s11213-016-9383-6>
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal*, 100(4), 331–350. <https://doi.org/10.1086/499645>
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>
- Remillard, J. T. y Kim, O. K. (2017). Knowledge of curriculum embedded mathematics: Exploring a critical domain of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 65–81.

- Rey, C. y Penalva, M. C. (2002). Análisis del campo afectivo en los libros de texto de matemáticas. En M. C. Penalva, G. Torregrosa, J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 499–512). Universidad de Alicante.
- Rezat, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. En G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Teacher Education* (Vol. 7, pp. 231–245). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_12
- Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevaris (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1055–1061).
- Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, 26(42B), 559–588.
- Ruiz, E. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), 1.
- Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugstad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 201–208).

- Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 299–324.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020). Idoneidad didáctica de procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística. *PNA*, 14(2), 141–172.
- Salcedo, A., Molina-Portillo, E., Ramírez, T. y Contreras, J. (2018). Conflictos semióticos sobre estadística en libros de texto de matemáticas de primaria y bachillerato. *Revista de Pedagogía*, 39(104), 223–244.
- Santaolalla, E. (2014). *Análisis de los elementos didácticos en los libros de texto de matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Pontificia Comillas].
- Schön, D. A. (1984). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Routledge.
- Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new design for teaching and learning in the professions*. Jossey-Bass Publishers.
- Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM Mathematics Education*, 50(5), 765–771.
- Schwarz, C., Gunckel, K., Smith, E., Covitt, B., Bae, M., Enfield, M. y Tsurusaki, B. (2008). Helping elementary pre-service teachers learn to use science curriculum materials for effective science teaching. *Science Education*, 92(2), 345–377. <https://doi.org/10.1002/sce.20243>
- Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 12(25), 127–144.
- Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa*, 45, e211926. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201945211926>

- Serradó, A. y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, 15(1), 67–98.
- Shawer, S. F. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. *Teaching and Teacher Education*, 63, 296–313. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.12.017>
- Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183–199. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004>
- Silvestre, A. S. y da Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 137–158.
- Soto, I. y Rouche, N. (1995). Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática*, 7(1), 77–95.
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., y Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(2), 127–155.
- Strauss, L. y Corbin, J. (1990). *Basis of Qualitative Research*. Sage.
- Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long-term learning process (towards... a theory) part II: the outline of the long-term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 16(1), 75–94.
- Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288.

- Sun, J. y Van Es, E. A. (2015). An exploratory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers' classroom practice. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 201–214.
- Taylor (2013). Replacing the ‘teacher-proof’ curriculum with the ‘curriculum-proof’ teacher: Toward more effective interactions with mathematics textbooks. *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 295–321. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.710253>
- Teive, G. (2015). Caminos teórico-metodológicos para la investigación de manuales escolares: la contribución del Centro de Investigación MANES. *Revista Brasileira de Educação*, 20(63), 827–843.
- Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research*, 64, 141–148. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.013>
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 31, 315–327.
- Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181–204.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer.
- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back. The development of students’ additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113–138. <https://doi.org/10.1023/A:1025516816886>

- Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? or multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281–288). PME.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57–86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311–342.
- Vandercruyse, S., Ter Vrugte, J., De Jong, T., Wouters, P., Van Oostendorp, H., Verschaffel, L., Moeyaert, M. y Elenet, J. (2016). The effectiveness of a math game: the impact of integrating conceptual clarification as support. *Computers in Human Behavior*, 64, 21–33.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, Granada: Universidad de Granada*, 19(2), 441–462.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). Academic.
- Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E. y Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(2), 179–202. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0>

- Weiland, T., Orrill, C., Brown, R. y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 233–250. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1579668>
- Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 41–65. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9595-1>
- Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en educación primaria y secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://hdl.handle.net/10481/45192>
- Yang, K-L., y Liu, X-Y. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(1), em1655. <https://doi.org/10.29333/ejmste/99515>

ANEXOS

1. Instrumentos de recogida de datos de los ciclos de intervención

1.1. Primer ciclo de experimentación con profesores de secundaria



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Curso de posgrado:

Aprendizaje y enseñanza de las
Matemáticas en Educación Secundaria

TRABAJO PRÁCTICO (Análisis de una lección)

INTRODUCCIÓN

Una lección de un libro de texto sobre un contenido matemático específico, por ejemplo, el estudio de la proporcionalidad en primer curso de educación secundaria se puede considerar como la planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto por el autor.

Suponiendo que un profesor ha tomado la decisión de usar el libro de texto como recurso para apoyar su enseñanza y facilitar el aprendizaje de los estudiantes, se pueden plantear las siguientes cuestiones:

1) *¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado?*

Esto implica:

- analizar los significados del contenido que se incluyen, los tipos de situaciones – problemas, las representaciones (sus conversiones y tratamientos), los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos que se aportan y los que no.
- identificar los conocimientos previos que se van requiriendo a lo largo del proceso, los recursos didácticos que se proponen y los modos de interacción.
- reconocer conflictos epistémicos (relativos a los significados institucionales puesto en juego en la lección), conflictos cognitivos potenciales (relacionados con los conocimientos previos requeridos) y conflictos instruccionales (modos de interacción y uso de recursos).

2) *¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?*

Se trata de identificar los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

OBJETIVOS

1. Conocer una metodología para analizar lecciones de libros de texto de matemáticas.
2. Analizar de manera crítica y constructiva una lección de un libro de texto.
3. Reflexionar sobre el uso de los libros de texto como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

MÉTODO

Trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes responder a las siguientes consignas:

1. En cada una de las unidades de análisis (configuraciones didácticas) en que se ha descompuesto el texto sobre proporcionalidad que se incluye en el Anexo III y para cada una de las facetas:

a) Identificar los componentes y subcomponentes según corresponda, tomando como base el orden en que se presentan en la GALT-proporcionalidad.

b) Teniendo en cuenta los criterios de idoneidad en cada faceta para el estudio de la proporcionalidad (Anexo II) identificar si existe algún tipo de disparidad o discordancia con los conocimientos pretendidos (conflictos epistémicos, cognitivos...). Haga uso de la columna valoración, para indicar si se presenta o no cada indicador (0 nunca, 1 a veces-parcialmente, 2 siempre-totalmente).²⁴

c) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Se tendrá en cuenta la información obtenida en la sección anterior y los criterios de idoneidad didáctica (Anexo II).

2. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?

Describir los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

3. En base a la experiencia del taller, formule una opinión crítica sobre la GALT-proporcionalidad y los indicadores, incluya su perspectiva sobre si los indicadores son suficientes y claros. Si considera oportuno agregar algún otro indicador en dicho caso incluya una justificación.

²⁴ Para la faceta instruccional, suponga que el autor del libro actúa como docente y el lector es el

estudiante. Para la faceta ecológica tome en cuenta la información del (Anexo I)

ANEXO I. Proporcionalidad en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria

Educación Secundaria Primer ciclo	
Contenidos	Razón y <i>proporción</i> . Magnitudes directa e inversamente <i>proporcionales</i> . Constante de <i>proporcionalidad</i> . Resolución de problemas en los que intervenga la <i>proporcionalidad</i> directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente <i>proporcionales</i> .
Criterios de evaluación	Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de <i>proporcionalidad</i> , reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente <i>proporcionales</i> .
Estándares de Aprendizaje	Identifica y discrimina relaciones de <i>proporcionalidad</i> numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente <i>proporcionales</i> .

ANEXO II. GALT-proporcionalidad

El presente anexo muestra la Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Matemáticas en el tema de Proporcionalidad (GALT-proporcionalidad).

Idoneidad epistémica o matemática: Grado en que los contenidos matemáticos pretendidos en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.

Tabla 2 *Indicadores de idoneidad epistémica en el tema de proporcionalidad*

Componentes	Subcomponentes	Indicadores	Valoración
Significados	Problemas	Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de razón, proporcionalidad y porcentajes (involucra resolver y formular problemas).	
		Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la razón, proporcionalidad y porcentajes.	
		Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea.	
		La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas.	
		Las situaciones involucran el uso de razones internas y externas ²⁵ .	
		Se presentan situaciones que promuevan el paso de un enfoque cualitativo a uno cuantitativo, y el progreso del pensamiento aditivo al multiplicativo.	
		Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.	
		Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la razón, proporcionalidad y porcentajes.	
	Lenguajes	Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de razón, proporcionalidad y porcentajes.	
		Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.	
		Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la razón, proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.	
		Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen <i>dentro</i> ²⁶ de las magnitudes proporcionales y <i>entre</i> dichas magnitudes.	
	Conceptos	Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo, razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional, relación proporcionalidad directa entre magnitudes y los conceptos involucrados.	

²⁵ Una *razón interna* relaciona cantidades de la misma magnitud. Una *razón externa* relaciona cantidades de magnitudes distintas en una relación de proporcionalidad directa.

²⁶ Las relaciones *entre* se establecen entre las dos magnitudes directamente proporcionales y las relaciones *dentro* aparecen al considerar cantidades de la misma magnitud.

Componentes	Subcomponentes	Indicadores	Valoración
		Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar definiciones de razón, proporcionalidad y porcentajes.	
		Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.	
	Proposiciones	Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de razón, proporcionalidad y porcentaje de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.	
		Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.	
		Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.	
	Procedimientos	Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de razón, proporcionalidad y porcentajes para el nivel educativo correspondiente.	
		Los procedimientos algebraicos (ecuación proporcional) se introducen después que se haya ganado experiencia en otros procedimientos intuitivos y aritméticos.	
		Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.	
	Argumentos	Las proposiciones y procedimientos del contenido de razón, proporcionalidad y porcentaje se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.	
		Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.	
Relaciones		Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.	
		Se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes (se trata la razón entre números, entre cantidades de una misma magnitud, entre cantidades correspondientes, etc.)	
		Se identifican, articulan y desarrollan de una manera organizada los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.	
Procesos	Comunicación, argumentación	Se promueven diversas situaciones de razón, proporciones y porcentajes donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.	
	Modelización	Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo) en los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.	
	Generalización	Se promueven situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y	

Componentes	Subcomponentes	Indicadores	Valoración
		numéricos relacionados con los temas de razón, proporcionalidad y porcentajes.	
		Se promueven progresivamente todos los significados de la proporcionalidad hasta alcanzar niveles superiores de algebraización (función lineal).	
Conflictos epistémicos		Los contenidos, situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. de proporcionalidad y porcentajes se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades; se explicitan las condiciones que motivan la condición de proporcionalidad directa, se diferencia la razón de fracción.	

Idoneidad cognitiva

Tabla 3 *Indicadores de idoneidad cognitiva en el tema de proporcionalidad*

Componentes	Indicadores	Valoración
Conocimientos previos	Se contempla en el texto los conocimientos previos necesarios de acuerdo con el nivel educativo correspondiente.	
	Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	
Diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	
	Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas (de construcción progresiva, aditivas, multiplicativas etc).	
Conflictos Cognitivos	Se valora y emplea el uso de estrategias erróneas (estrategias aditivas...) como fuente de aprendizaje.	
	Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (que involucren números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, que se altere el orden de los datos en los problemas...)	
	Se advierte de errores y dificultades de los alumnos tanto conceptuales como procedimentales (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias (covariación), ignorar parte del problema, realizar operaciones al azar, usar estrategias aditivas erróneas...).	
Evaluación	Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.	
	Se promueve que los resultados de las evaluaciones se difundan y usen para tomar decisiones.	
	Los diversos modos de evaluación incluidos en el texto son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva).	
	La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.	

Idoneidad afectiva

Tabla 4 Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores	Valoración
Actitudes	Se promueve la participación activa en actividades, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.	
	La argumentación se favorece en situaciones de igualdad, el valor de un argumento no depende de quién lo dice.	
	Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.	
Emociones	Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos.	
	Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías adivinanzas etc.	
	Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.	
	Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.	
	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia, el miedo a las matemáticas.	
Creencias	Se analizan y se consideran las creencias sobre las matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.	
Valores	Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	
Evaluación afectividad	Se proponen actividades de evaluación que permitan valorar los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje.	

Idoneidad interaccional

Tabla 5 Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Componentes	Indicadores	Valoración
Interacción autor→alumno	El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)	
	Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.	
	Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	
	Se promueve o facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la exposición.	
Interacciones discentes	Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes puntos de vista utilizando argumentos matemáticos.	
	Se plantean situaciones en las que los estudiantes deban convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.	
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).	
Evaluación formativa	Se incluyen formas de evaluación que permita la observación sistemática y continua del progreso cognitivo de los alumnos.	

Idoneidad mediacional

Tabla 6 Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores	Valoración
Recursos materiales	Se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.	
	Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	
	Se explicitan las fuentes usadas y son diversas.	
Tiempo	Se plantea el espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	
	La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos es adecuada.	

Idoneidad ecológica

Tabla 7 Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	Indicadores	Valoración
Adaptación al currículo	Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	
Apertura a la innovación	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	
Adaptación socio-profesional	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos (respeto a la diversidad, tolerancia, integración, cooperación, conciencia ecologista, pacifista, otros valores y prejuicios) y se dan oportunidades para que los alumnos realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).	
Conexiones intra e interdisciplinarias	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios (temas transversales, historia de la matemática, otros)	

ANEXO III. Lección de proporcionalidad para 1º ESO

A continuación, se incluye el texto a analizar y las unidades en las que se considera dividido.

Configuración 1:

Razón y proporción

CARNÉ CALCULISTA

350,7 : 8,23

Términos de una razón

$\frac{a}{b}$ Antecedente
Consecuente



piensa y calcula

Calcula mentalmente la velocidad media de un ciclista que recorrió 150 km en 5 horas. ¿En qué unidades expresarías la velocidad?

1.1 Razón de dos cantidades

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables.

Se representa $\frac{a}{b}$ y se lee «a es a b». Al número a se le llama **antecedente**, y al número b, **consecuente**.

EJERCICIO RESUELTO

1 Halla la razón entre las capacidades de la botella grande y la botella pequeña del dibujo. ¿Qué indica la razón?

$$\frac{\text{Capacidad botella grande}}{\text{Capacidad botella pequeña}} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

La botella grande tiene 3 veces más capacidad que la botella pequeña.

Observa que una razón no es una fracción. En una razón los números pueden ser decimales y en una fracción tienen que ser números enteros.

1.2 Proporción

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee «a es a b como c es a d».

Se llaman: $\begin{cases} a, c \rightarrow \text{Antecedentes} \\ b, d \rightarrow \text{Consecuentes} \end{cases}$

También reciben el nombre: $\begin{cases} a, d \rightarrow \text{Extremos} \\ b, c \rightarrow \text{Medios} \end{cases}$

La **constante de proporcionalidad** es el cociente entre el antecedente y su consecuente.

EJERCICIO RESUELTO

2 Halla el precio por kilo de cada caja del dibujo y compáralas.

$$\frac{3,6}{3} = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ €/kg}$$

Las dos cajas tienen el **mismo precio por kilo**.



1.3 Propiedad fundamental

En una **proporción** el producto de medios es igual al producto de extremos.

EJEMPLO

$$\frac{3}{2} = \frac{1,2}{0,8} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 0,8 = 2,4 \\ 2 \cdot 1,2 = 2,4 \end{cases}$$

1.4 Cuarto proporcional

Se llama **cuarto proporcional** a un término desconocido de una proporción, conocidos los otros tres.

EJERCICIO RESUELTO

Calcula x en: $\frac{2,5}{4} = \frac{12,5}{x}$

$$\frac{2,5}{4} = \frac{12,5}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 12,5}{2,5} = 20 \quad \boxed{4 \times 12,5 : 2,5 = 20}$$

1.5 Proporción continua y medio proporcional

- Una **proporción continua** es aquella que tiene sus medios o sus extremos iguales.
- Se llama **medio proporcional** a los términos iguales de una proporción continua.

EJEMPLO

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \quad \frac{6}{12} = \frac{3}{6}$$

EJEMPLO

$$\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = \pm 6$$

aplica la teoría

1 Calcula mentalmente las razones entre las cantidades siguientes e interpreta el resultado:

- 2,5 kg de pescado cuestan 10 €
- Un coche recorre 500 km en 5 horas.
- 7,5 m de tela cuestan 15 €
- 2,5 kg de fruta se consumen en 2 días.
- Un grifo vierte 15 L de agua cada 10 minutos.

2 Calcula las razones entre las siguientes cantidades e interpreta el resultado:

- Una habitación mide 24,8 m², y otra, 12,4 m²
- Juan pesa 66 kg, y María, 55 kg
- Un tren va a 175 km/h, y otro, a 125 km/h
- Un vaso contiene 300 mL, y otro, 250 mL
- Un coche cuesta 13 000 €, y otro, 10 000 €

3 Calcula mentalmente y completa en tu cuaderno, para que formen proporción, las siguientes razones:

- $\frac{5}{9} = \frac{\blacksquare}{27}$
- $\frac{\blacksquare}{7} = \frac{18}{42}$
- $\frac{9}{\blacksquare} = \frac{1,8}{2,4}$
- $\frac{1,2}{0,7} = \frac{12}{\blacksquare}$

4 Escribe las proporciones que puedas obtener con las razones siguientes y calcula su constante de proporcionalidad:

- $\frac{6}{1,5}$
- $\frac{1,1}{0,5}$
- $\frac{2}{0,5}$
- $\frac{11}{5}$

5 Calcula el cuarto proporcional o medio en:

- $\frac{x}{7} = \frac{6}{2}$
- $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$
- $\frac{3,5}{2,1} = \frac{x}{4,2}$
- $\frac{3,5}{x} = \frac{5,6}{2,8}$

Proporcionalidad directa

¡SÉ CALCULISTA!

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$$



La edad y la estatura no son directamente proporcionales, aunque a más edad corresponde más altura. Para que fueran directamente proporcionales, a 20 años se debía medir el doble que a 10 años y a los 30 años el triple.

¡Recuerda!

Para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales no basta con comprobar que al aumentar una magnitud, la otra aumenta también. En estos casos, las magnitudes pueden ser directamente proporcionales, pero se debe confirmar. Para ello, hay que comprobar que, al aumentar una magnitud en el doble, el triple, etc., la otra aumenta el doble, el triple, etcétera.

piensa y calcula

Tres amigos tienen que repartirse 150 €. Calcula mentalmente cuánto le corresponde a cada amigo.

2.1 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando:

- Al **aumentar** una cantidad de una de ellas el doble, el triple, etc., el valor correspondiente de la otra queda **aumentado** de igual forma.
- Al **disminuir** una cantidad de una de ellas la mitad, un tercio, etc., el valor correspondiente de la otra queda **disminuido** de la misma forma.

La **constante de proporcionalidad directa** se calcula dividiendo una cantidad cualquiera de la 2.ª magnitud entre la correspondiente de la 1.ª

EJERCICIO RESUELTO

4 Se venden cajas de bombones del mismo peso según la tabla:

N.º de cajas	1	2	3	4	5	10	15	20
Coste (€)	6	12	18	24	30	60	90	120

Halla la constante de proporcionalidad.

Las dos magnitudes son directamente proporcionales porque al aumentar el número de cajas en el doble, triple, etc., el coste de las cajas aumenta en el doble, el triple, etc.

La constante de proporcionalidad directa es:

$$\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \dots = 6 \text{ €/caja}$$

2.2 Problemas de proporcionalidad directa

Hay muchos problemas de la vida real en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Se trata de hallar una cantidad desconocida de una magnitud conociendo tres cantidades, es decir, hallar el cuarto proporcional. El esquema de estos problemas es:

Magnitud A (Unidad)	(D)	Magnitud B (Unidad)
Cantidad conocida: a	→	Cantidad conocida: c
Cantidad conocida: b	→	Cantidad desconocida: x

Para resolver estos problemas, hay que determinar si las magnitudes son directamente proporcionales. Se van a estudiar dos métodos para resolverlos.

2.3 Método de reducción a la unidad

- Se calcula la cantidad de la segunda magnitud, correspondiente a la unidad de la primera magnitud.
- Multiplicando** ese valor por la cantidad que interese, se calcula cualquier valor deseado.

EJERCICIO RESUELTO

Si 4 libros iguales cuestan 48 €. ¿Cuánto costarán 7 libros?

Si 4 libros cuestan 48 €;

1 libro cuesta $48 : 4 = 12$ €

7 libros cuestan $7 \cdot 12 = 84$ €



2.4 Método de regla de tres directa

Para resolver los problemas de regla de tres directa se sigue el procedimiento:

- Se identifican las magnitudes que intervienen y sus unidades.
- Se colocan las magnitudes y los datos poniendo en **último** lugar la incógnita.
- Se determina si la proporcionalidad es **directa**. Es **directa** cuando va de **+ a +** o de **- a -**.
- Se forma la proporción y se calcula el cuarto proporcional.

Magnitud A (Unidad) (D) Magnitud B (Unidad)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cantidad conocida: } a \longrightarrow \text{Cantidad conocida: } c \\ \text{Cantidad conocida: } b \longrightarrow \text{Cantidad desconocida: } x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

EJERCICIO RESUELTO

Si 5 kg de melocotones cuestan 7,2 €, ¿cuánto costarán 12,5 kg?

- La magnitud de la pregunta es **Dinero (€)**; va en **último** lugar.
- Es de proporcionalidad **Directa (D)**, porque al aumentar el número de kilos, aumenta el dinero que cuestan, **+ a +**.

Masa (kg) (D) Dinero (€)

$$\left. \begin{array}{l} 5 \longrightarrow 7,2 \\ 12,5 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{12,5} = \frac{7,2}{x} \Rightarrow x = \frac{12,5 \cdot 7,2}{5} = 18 \text{ €}$$

aplica la teoría

- ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son directamente proporcionales?
 - El número de hojas de un libro y su peso.
 - La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer 200 km
 - El número de pintores y el tiempo que tardan en pintar una valla.
 - El lado de un cuadrado y su perímetro.
- Copia y completa la siguiente tabla para que las magnitudes sean directamente proporcionales:

Magnitud A	3	5	9	10	15
Magnitud B	/	20	/	/	/
- Comparamos 3 kg de higos por 8,76 €. ¿Cuánto costarán 8 kg?
- Una caldera consume 100 L de gasoil en 8 h. ¿Cuánto gastará en 5 h?
- Un grifo hace subir el nivel de un depósito de agua 12,6 cm en 3 horas. ¿Cuánto subirá el nivel en 5 horas y media?
- Por la impresión de 120 carteles para una fiesta nos han cobrado 67,2 €. ¿Cuánto nos costará imprimir 350 carteles?
- En un campamento con 45 estudiantes, compran para desayunar un bollo para cada uno y pagan 32,4 €. Al aumentar en 32 estudiantes el campamento, ¿cuánto pagarán por el total de bollos?

Proporcionalidad inversa

CARNÉ CALCULISTA

587 : 7,5

piensa y calcula

Cinco agricultores recogen en 4 h una cosecha de aceitunas. ¿Cuánto tardará un solo agricultor en recoger la cosecha?



3.1 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al **aumentar** una cantidad de una de ellas el doble, el triple, etc., el valor correspondiente de la otra queda **disminuido** la mitad, un tercio, etcétera.
- Al **disminuir** una cantidad de una de ellas la mitad, un tercio, etc., el valor correspondiente de la otra queda **aumentado** el doble, el triple, etcétera.

La **constante de proporcionalidad inversa** se calcula multiplicando una cantidad cualquiera de la primera magnitud por la cantidad correspondiente de la segunda magnitud.

EJERCICIO RESUELTO

7 Un agricultor recoge en 60 h una cosecha de manzanas.

N.º de agricultores	1	2	3	4	5	6
Tiempo (h)	60	30	20	15	12	10

Halla la constante de proporcionalidad.

Las magnitudes son inversamente proporcionales porque, al aumentar el número de agricultores el doble, el triple, etc., el tiempo disminuye la mitad, un tercio, etc.

La constante de proporcionalidad inversa es:

$$60 \cdot 1 = 30 \cdot 2 = 20 \cdot 3 = \dots = 60$$

3.2 Problemas de proporcionalidad inversa

El esquema de estos problemas es similar al de la proporcionalidad directa. Se van a ver dos métodos de resolución, pero recuerda que lo primero que hay que hacer es determinar si las magnitudes son inversamente proporcionales.

3.3 Método de reducción a la unidad

- Se calcula el valor de la segunda magnitud, correspondiente a la unidad de la primera magnitud.
- Dividiendo** ese valor por la cantidad que interese, se calcula cualquier valor deseado.

EJERCICIO RESUELTO

8 Cuatro obreros hacen una obra en 21 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer la obra 7 obreros?

Si 4 obreros tardan 21 días, un obrero tardará: $4 \cdot 21 = 84$ días.

7 obreros tardarán: $84 : 7 = 12$ días.

3.4 Método de regla de tres inversa

Para resolver los problemas de regla de tres inversa se sigue el procedimiento:

- Se identifican las magnitudes que intervienen y sus unidades.
- Se colocan las magnitudes y los datos poniendo en **último** lugar la incógnita.
- Se determina si la proporcionalidad es **inversa**. Es **inversa** cuando va de **+ a -** o de **- a +**.
- Se forma la proporción **invirtiendo la primera razón** y se calcula el cuarto proporcional.

Magnitud A (Unidad) (I) Magnitud B (Unidad)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cantidad conocida: } a \longrightarrow \text{Cantidad conocida: } c \\ \text{Cantidad conocida: } b \longrightarrow \text{Cantidad desconocida: } x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$$

Razón invertida.

EJERCICIO RESUELTO

9 Un coche recorre la distancia que hay entre dos ciudades en 5 h a una velocidad de 60 km/h. Si la velocidad aumenta a 75 km/h, ¿cuánto tardará?

- La magnitud de la pregunta es **Tiempo (h)**; va en **último** lugar.
- Es de proporcionalidad **Inversa (I)**, porque al aumentar la velocidad, disminuye el tiempo que tarda en recorrer la distancia, **+ a -**.

Velocidad (km/h) (I) Tiempo (h)

$$\left. \begin{array}{l} 60 \longrightarrow 5 \\ 75 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{75}{60} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 5}{75} = 4 \text{ h}$$

Razón invertida.

Si a 60 km/h tarda 5 h, a 75 km/h tardará x



aplica la teoría

14 ¿Qué magnitudes de las siguientes son inversamente proporcionales?

- La altura de un árbol y su edad.
- La velocidad de un ciclista y el tiempo que tarda en recorrer una distancia fija.
- El número de obreros y el tiempo que tardan en hacer una obra.
- Las longitudes de los lados de un rectángulo de 20 cm^2 de área.

15 Completa la siguiente tabla para que las magnitudes sean inversamente proporcionales:

Magnitud A	1	3	5	10	15
Magnitud B	/	/	/	3	/

16 Escribe dos magnitudes que sean inversamente proporcionales.

17 Una piscina se llena en 15 h con un grifo que vierte 120 L/min. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar la piscina otro grifo que tiene un caudal de 240 L/min?

18 Un rectángulo tiene 12 m de base y 7 m de altura. Otro rectángulo con la misma área tiene 5 m de base. ¿Cuánto tiene de altura?

19 Siete obreros tardan 9 h en hacer una obra. ¿Cuánto tardarán 3 obreros?

Porcentajes

¡SÉ CALCULISTA!

$$\frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \right)$$

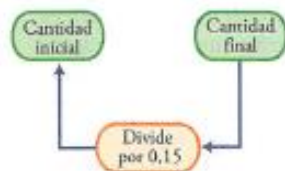
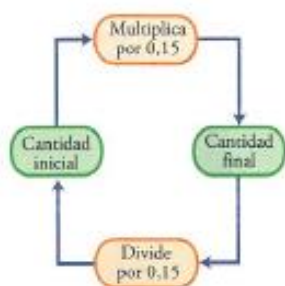
piensa y calcula



Si de cada fajo de billetes tomas 20 €, calcula mentalmente cuántos euros coges. Escribe la fracción que representa el número de euros que has cogido, simplifícala y pásala a número decimal.

4.1 Tanto por ciento

El **tanto por ciento** de una cantidad es una o varias de las 100 partes iguales en que se puede dividir dicha cantidad. El símbolo del tanto por ciento es %



4.2 Regla práctica para calcular un tanto por ciento

El tanto por ciento de una cantidad se puede interpretar como una razón y como un decimal.

EjemPlo

Tanto por ciento	Razón	Decimal
15%	$\frac{15}{100}$	0,15

■ Porcentaje de una cantidad

Se multiplica la cantidad por el decimal correspondiente.

EJERCICIO RESUELTO

10 Calcular el 15% de 4 300 €

$$15\% = 0,15 \Rightarrow 4\,300 \cdot 0,15 = 645 \text{ €} \quad 4300 \times 0,15 = 645$$

■ Calcular una cantidad cuando se conoce el porcentaje

Se divide el porcentaje entre el decimal correspondiente.

EJERCICIOS RESUELTOS

11 El 15% de una cantidad es 240. ¿Cuál es la cantidad?

$$240 : 0,15 = 1\,600 \text{ €} \quad 240 \div 0,15 = 1600$$

12 Halla el 20% de 300 € aplicando la regla de tres.

Dinero (€) (D)	Dinero (€)	
100	20	}
300	x	

$$\Rightarrow \frac{100}{300} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 20}{100} = 60 \text{ €}$$

Se han dividido los 300 € en partes de 100 €, y de cada una de ellas se han tomado 20 €; es como si se hubiese tomado la fracción 20/100 de 300 €

4.3 Problemas de descuento

Un descuento es una cantidad que se rebaja al valor que cuesta. Estos problemas se pueden resolver de dos formas:

EJERCICIO RESUELTO

43 Unos pantalones tienen un precio de 72,4 € y tienen una rebaja del 15%. Calcula lo que se paga por los pantalones.

a) Se puede calcular el precio final directamente:

$$\text{Si descuentan un 15\%, se paga: } 100\% - 15\% = 85\% = \frac{85}{100} = 0,85$$

$$\text{Precio final: } 72,4 \cdot 0,85 = \mathbf{61,54 \text{ €}}$$

b) Se calcula el descuento y se resta del precio:

$$\text{Descuento: el 15\% de 72,4 es } 72,4 \cdot 0,15 = 10,86$$

$$\text{Precio final: } 72,4 - 10,86 = \mathbf{61,54 \text{ €}}$$



4.4 Problemas de aumentos e impuestos

Un impuesto es una cantidad que se añade al precio. Estos problemas se pueden resolver de dos formas:

EJERCICIO RESUELTO

44 En el taller facturan por el arreglo de un coche 150,25 € y aumentan un 21% de IVA. ¿A cuánto asciende la factura total?

a) Se puede calcular el precio final directamente:

$$\text{Si aumentan el 21\%, se paga el } 100\% + 21\% = 121\% = \frac{121}{100} = 1,21$$

$$\text{Precio final: } 150,25 \cdot 1,21 = \mathbf{181,80 \text{ €}}$$

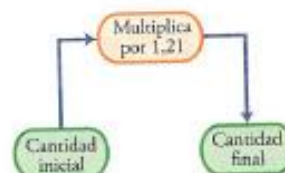
b) Se calcula el IVA y se suma a la cantidad inicial:

$$\text{IVA: el 21\% de 150,25 es } 150,25 \cdot 0,21 = 31,55 \text{ €}$$

$$\text{Precio final: } 150,25 + 31,55 = \mathbf{181,80 \text{ €}}$$

IVA

El IVA es el Impuesto sobre el Valor Añadido.



aplica la teoría

20 Calcula:

- a) 16% de 450
- b) 25% de 792
- c) 7,5% de 600
- d) 12,5% de 80

21 En una clase de 25 alumnos, el 24% son chicos. Calcula el número de chicos y de chicas.

22 En un pueblo, 1 400 personas se dedican a la agricultura. Este número de personas corresponde al 40% de la población. ¿Cuántos habitantes hay en total?

23 Jorge compra unas deportivas que cuestan 62,5 €, y le descuentan el 30%. ¿Cuánto paga?

24 Inés quiere comprar a plazos un ordenador que cuesta 1 200 €. Por pagarlo a plazos, le suben un 12%. ¿Cuánto pagará en total?

25 La factura del hotel de las vacaciones ascendía a 1 232,5 €. Calcula el total añadiendo el 10% de IVA.

26 Por un televisor nos han descontado 54,09 €, que supone un 15% del precio inicial. ¿Cuál era el precio inicial del televisor?



ANÁLISIS DE UNA LECCIÓN DE LIBRO DE TEXTO: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

INTRODUCCIÓN

Una lección de un libro de texto sobre un contenido matemático específico, por ejemplo, el estudio de la proporcionalidad en sexto curso de educación primaria se puede considerar como la planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto por el autor.

Suponiendo que un profesor ha tomado la decisión de usar el libro de texto como recurso para apoyar su enseñanza y facilitar el aprendizaje de los estudiantes, se pueden plantear las siguientes cuestiones:

1) *¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado?*

Esto implica analizar los significados del contenido que se incluyen, los tipos de situaciones – problemas, los sistemas de representación y las transformaciones en (tratamientos) o entre (conversiones) éstos, los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos que se aportan y los que no.

También implica identificar los conocimientos previos que se van requiriendo a lo largo del proceso, los recursos didácticos que se proponen y los modos de interacción, así como el grado en que el desarrollo del tema se ajusta a las directrices curriculares.

Estos análisis deben permitir identificar conflictos epistémicos (relativos al contenido: significados y objetos matemáticos puesto en juego en la lección), conflictos cognitivos potenciales (relacionados con los conocimientos previos requeridos y la progresión en el aprendizaje) y conflictos instruccionales (modos de interacción y uso de recursos).

2) *¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?*

Esto implica identificar los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

OBJETIVOS

1. Conocer una metodología para analizar lecciones de libros de texto de matemáticas.
2. Analizar de manera crítica y constructiva una lección de un libro de texto.
3. Reflexionar sobre el uso de los libros de texto como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

MÉTODO

Se recomienda leer el documento disponible en la plataforma Prado sobre Análisis de Libros de texto.

En Anexo I encontraréis parte de una lección de libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria dividida en 3 configuraciones didácticas (unidades de análisis).

1º. Para cada una de las configuraciones didácticas, se trata de **identificar las prácticas, objetos** (conceptos, procedimientos, argumentos, proposiciones, lenguajes) y **procesos** que intervienen, así como los **posibles conflictos de tipo epistémico** (con el contenido matemático) o **cognitivo** (con el aprendizaje).

2º. En Anexo II encontraréis las tablas (Tablas 1 y 2) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en la faceta epistémica (el contenido) y cognitiva (el aprendizaje). **Para cada una de las configuraciones didácticas debéis completar la columna final de observaciones en la faceta epistémica y cognitiva, teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores.** *Es decir, las tablas 1 y 2 se completan 3 veces, anotando las observaciones que consideréis oportunas en cada configuración.*

3º. En Anexo III se incluyen las tablas (Tablas 3, 4 y 5) con los componentes e indicadores de idoneidad en la faceta afectiva, instruccional (la enseñanza) y ecológica (adaptación de la lección a las directrices curriculares, cómo aparecen reflejados los contenidos y los estándares de aprendizaje). **Completad la columna final de observaciones en las tres tablas (afectiva, instruccional y ecológica), teniendo en cuenta las especificaciones de los indicadores correspondientes.** *Las tablas 3, 4 y 5 sólo se completan de manera global para toda la lección, no para cada unidad como en el caso anterior.*


4º. Teniendo en cuenta lo que habéis observado elaborad un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica.

5º. ¿Cómo creéis que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que habéis identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto?

ANEXO I

CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 1. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales



Fermin aparca su bicicleta durante 3 h. ¿Cuánto pagará?

Si aparcarse durante 1 h cuesta 2 €, el triple de tiempo cuesta 3 veces más:

1 h → 2 € $\times 3$ 3 h → 6 €

► Pagará 6 €.

El tiempo de aparcamiento y el precio son **magnitudes proporcionales**. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad.

tiempo (h)	1	2	3	4	...
precio (€)	2	4	6	8	...

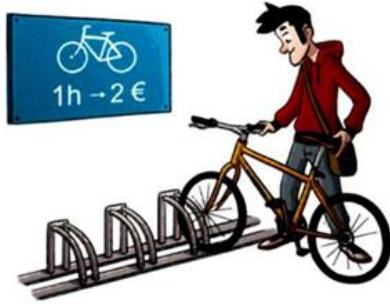
Al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo. $\times 2$

Al dividir los números de la fila de abajo, obtenemos los de la fila de arriba. $: 2$

Al pasear en su bicicleta durante 1 h, Fermin encuentra 2 semáforos. Si pasea 3 h, ¿puede saber cuántos semáforos encontrará?

► No, porque el número de semáforos que encuentra no tiene por qué ser el mismo cada hora.

El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales. No se pueden relacionar con una tabla de proporcionalidad.



17 ¿Cuáles de estas magnitudes son proporcionales?

- litros de leche comprados precio total
- edad de una persona altura de la persona
- número de espectadores cantidad de entradas vendidas
- velocidad de un tren número de pasajeros

Ten en cuenta
Magnitud es aquello que se puede medir.

18 Indica en qué caso las magnitudes no son proporcionales.

peso (kg)	5	10	15	20
precio (€)	4	8	12	16

peso (kg)	10	16	21	26
edad (años)	2	4	6	8

19 Copia y completa estas tablas de proporcionalidad.

a)

n.º de gafas	1	2	...	4	5	6	...
n.º de cristales	...	4	6	14

b)

n.º de arañas	...	10	25	30	35
n.º de patas	...	80	120	160	200

¿Cómo se relacionan las filas de cada una de las tablas?

20 Halla el valor que falta en cada tabla para que correspondan a dos magnitudes proporcionales.



2	6
4	...

1	100
8	...

30	60
5	...

12	18
4	...

smSaviadigital.com
PRACTICA Entra en la web y calcula magnitudes proporcionales.

21 Encuentra un ejemplo de dos magnitudes proporcionales y construye la tabla de proporcionalidad.

Problemas

22 ¿Cuánto cuesta el queso completo?



23 Lee la nota que ha escrito esta niña y responde junto con un compañero.

- ¿Qué dos magnitudes se mencionan?
- Si son magnitudes proporcionales, ¿qué distancia recorre Cayetana en 12 días?
- Completad una tabla de proporcionalidad para representar lo que corre Cayetana en el mes de abril.
- ¿Cuánto recorre en total en ese mes?



CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 2. REDUCCIÓN A LA UNIDAD Y REGLA DE TRES.

Reducción a la unidad. Regla de tres



En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?



Para calcularlo tenemos que reducir a la unidad.

1.º Escribimos la tabla de equivalencias.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	¿?

2.º Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.

n.º de monedas	2	1
n.º de puntos	10	5

3.º Calculamos el dato que buscamos.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	150

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres**.

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

1.º Escribimos los datos de esta manera:

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{\text{¿?}}$$

¿? representa el dato que queremos calcular.

2.º Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{\text{¿?}}$$

$$30 \times 10 = 300$$

3.º Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{\text{¿?}}$$

$$300 : 2 = 150$$

Por tanto, el valor del dato que queremos calcular es:

$$30 \times 10 : 2 = 150$$

► Carmen ha obtenido 150 puntos.

- 24 Si 3 focas consumen 21 kg de pescado al día, ¿cuántos kilogramos de pescado consumirán 10 focas? Completa en tu cuaderno para resolverlo de dos formas distintas.

reducción a la unidad

n.º de focas	3	...	10
kg de pescado	21

regla de tres

n.º de focas kg de pescado

$$\frac{3}{10} = \frac{21}{\text{¿?}}$$

25 Copia y resuelve por reducción a la unidad.

botellas	3	10
litros de agua	6	...

tiempo (min)	20	60
distancia (km)	38	...

26 Calcula el valor del dato desconocido en estas reglas de tres.

$$\frac{2}{9} = \frac{10}{?}$$

$$\frac{18}{24} = \frac{?}{20}$$

27 Por parejas, seguid estos pasos para inventar y resolver una actividad relacionada con la proporcionalidad.

- Encontrad dos magnitudes proporcionales.
- Asignad un valor a la primera magnitud y el correspondiente a la segunda.
- Buscad un nuevo valor para la segunda y hallad el valor correspondiente de la primera.

Ten en cuenta

Los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres solo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes.

Problemas

28 Encuentra la respuesta a estas preguntas.



29 Francisco quiere preparar lentejas para 12 personas según esta receta que ha encontrado.

- ¿Qué cantidad de lentejas necesita?
- Escribe la receta con las cantidades necesarias de cada ingrediente para 12 personas.
- El coste de los ingredientes para 8 personas es de 15,50 € aproximadamente. ¿Cuánto costarán los ingredientes para 12 personas?

Lentejas para 8 personas

medio kilo de lentejas

1 cebolla

2 dientes de ajo

1 patata

200 g de chorizo

25 g de aceite

1 puerro

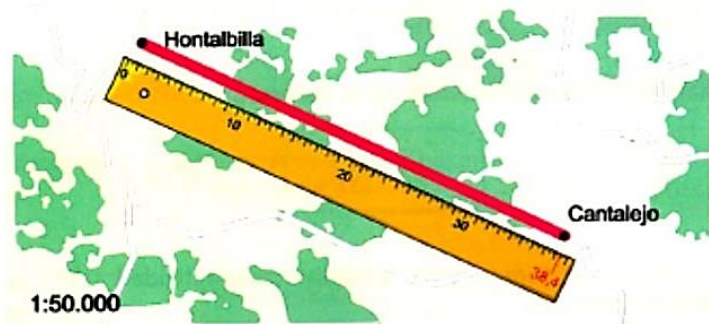


CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 3. ESCALAS Y MAPAS

La escala: planos y mapas



Darío ha medido la distancia entre su pueblo y el de sus tíos en el mapa. ¿Cuántos kilómetros son en la realidad?



Para calcularlo utilizamos la escala del mapa:

$$1:50.000$$

1 cm del mapa equivale a 50.000 cm en la realidad.

Como la distancia en el mapa es de 38,4 cm, en la realidad será:

$$38,4 \times 50.000 = 1.920.000 \text{ cm}$$

Expresamos el resultado en kilómetros:

$$1.920.000 : 100.000 = 19,2 \text{ km}$$

► Entre los dos pueblos hay 19,2 km.

- La **escala** sirve para representar superficies reales en un espacio pequeño.
- La **escala 1:50.000** significa que **una unidad del mapa equivale a 50.000 unidades en la realidad.**

30 ¿Cuántos kilómetros son en la realidad estas medidas del mapa de Darío?

12 cm

52 cm

21,5 cm

10,8 cm

31 Explica qué significan estas escalas cuando aparecen en un mapa.

a) 1:200

b) 1:5.000

c) 1:2.500

32 ¿Qué escala corresponde a cada una de estas relaciones?

- 1 cm del mapa representa 250.000 cm en la realidad.
- 1 cm del mapa representa 500 dm en la realidad.

- 33 Estas medidas se han hecho en un plano de escala 1:3.000. Copia y completa la tabla.

plano	real en cm	real en m
4 cm
7 cm
2,6 cm

- 34 En un mapa de escala 1:10.000 han realizado estas medidas. ¿Cuántos metros corresponden a cada una en la realidad?

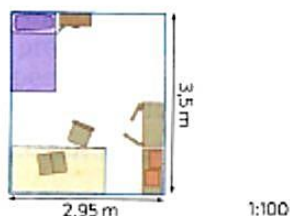
342,5 mm 18,4 cm 8,95 dm

- 35 De Sevilla a Huelva hay 93 km de distancia aproximadamente. Calcula cuál sería la medida que corresponde en cada caso.

- En un mapa de escala 1:10.000
- En un mapa de escala 1:25.000
- En un mapa de escala 1:50.000

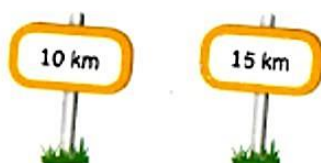
Problemas

- 36 Ariadna ha medido el largo y el ancho de su habitación de la casa nueva.



- ¿A qué escala está dibujado el plano?
- ¿Cuáles son las medidas de la habitación en el plano?

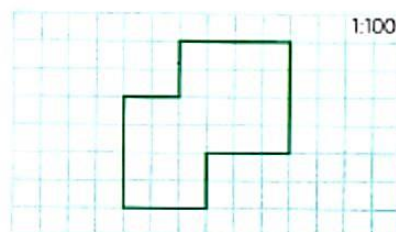
- 37 Por parejas, calculad la escala de un mapa en el que 1 cm representa estas distancias en la realidad.



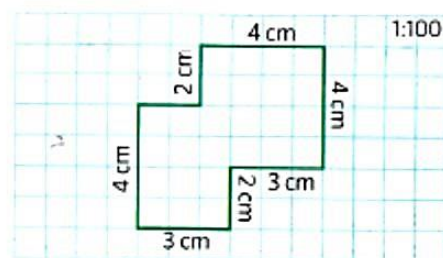
Taller de matemáticas manipulativas

Interpretamos un plano a escala

- 1.º Utiliza la regla para dibujar en la cuadrícula este plano del salón de una casa.



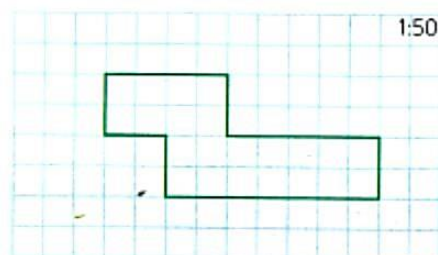
- 2.º Como conocemos la escala, podemos averiguar la longitud de todas las paredes del salón.



Este plano está dibujado a escala 1:100.

Esto significa que cada centímetro del plano equivale a 100 cm en la realidad.

- 1 Dibuja este plano en tu cuadrícula.



- ¿A cuántos centímetros en la realidad equivale 1 cm del plano?
- Averigua la longitud de cada pared.
- ¿Cuánto medirían en un plano a escala 1:200?

ANEXO II. Tablas de componentes e indicadores de idoneidad epistémica y cognitiva.

Tabla 1. Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica (el contenido)		
Subcomponentes	Indicadores	Observaciones
Componente: Significados		
Problemas	-Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar nociones de magnitudes proporcionales y proporcionalidad (involucra resolver y formular problemas).	
	-Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de proporcionalidad.	
	-Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea.	
	-La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas.	
	-Las situaciones involucran el uso de razones internas y externas.	
	-Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.	
	-Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la proporcionalidad.	
Lenguajes	-Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de proporcionalidad.	
	-Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.	
	-Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.	
	-Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes.	
Conceptos	-Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo la relación proporcionalidad directa entre magnitudes y los conceptos involucrados (covariación e invariancia).	
	-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar definiciones de proporcionalidad.	
	-Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.	
Proposiciones	-Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de proporcionalidad de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.	
	-Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.	
	-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales.	
Procedimientos	-Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad para el nivel educativo correspondiente.	
	-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.	

Argumentos	<p>–Las proposiciones y procedimientos en relación a la proporcionalidad se explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.</p> <p>–Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.</p>	
Componente: Relaciones		
	<p>–Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.</p> <p>–Se hace explícita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes (se trata la razón entre números, entre cantidades de una misma magnitud, entre cantidades correspondientes, etc.)</p> <p>–Se identifican, articulan y desarrollan los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.</p>	
Componente: Procesos		
Comunicación, argumentación	–Se promueven diversas situaciones de proporcionalidad directa donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.	
Modelización	–Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo) en los contenidos de proporcionalidad.	
Generalización	–Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas de patrones geométricos y numéricos, incluso mediante el uso de expresiones algebraicas (función lineal) relacionados con los temas de razón y proporcionalidad.	
Componente: Conflictos epistémicos		
	–Los contenidos, situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. de proporcionalidad se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades; se explicitan las condiciones que motivan la condición de proporcionalidad directa.	

Tabla 2- Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad cognitiva		
Componente	Indicadores	Observaciones
Conocimientos previos	-Se contemplan los conocimientos previos necesarios de acuerdo con el nivel educativo correspondiente.	
	-Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	
Diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	
	-Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas (de construcción progresiva, aditivas, multiplicativas etc.).	
Conflictos cognitivos	-Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (que involucren números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, que se altere el orden de los datos en los problemas...)	
	-Se advierte de errores y dificultades de los alumnos tanto conceptuales como procedimentales (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias (covariación), ignorar parte del problema, realizar operaciones al azar, usar estrategias aditivas erróneas...).	

ANEXO III Tablas de componentes e indicadores de idoneidad ecológica, instruccional y afectiva.

Tabla 3- Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes e indicadores de idoneidad ecológica		
Componentes	Indicadores	Observaciones
Adaptación al currículo	-Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	
Apertura a la innovación	-Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	
Adaptación socioprofesional	-Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	
Educación en valores	-Se contempla la formación en valores democráticos (respeto a la diversidad, tolerancia, integración, cooperación, conciencia ecologista, pacifista, otros valores y prejuicios) y se dan oportunidades para que los alumnos realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).	
Conexiones intra e interdisciplinarias	-Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios (temas trasversales, historia de la matemática, otros)	

Tabla 4- Componentes e indicadores de idoneidad instruccional

Componentes e indicadores de idoneidad interaccional-mediacional		
Componentes	Indicadores	Observaciones
Interacción autor-alumno	-El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)	
	Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.	
	Se usan diversos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	
Interacciones alumnos	-Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes puntos de vista utilizando argumentos matemáticos.	
Autonomía	-Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio: plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.	
Recursos materiales	-Se promueve el uso de materiales manipulativos (escalímetro, el pantógrafo, el compás de proporción) audiovisuales e informáticos que permiten introducir situaciones adaptadas al contenido pretendido.	
	-Las definiciones y propiedades se motivan y contextualizan usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	
	-Se explicitan las fuentes usadas y son diversas	
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedicando el espacio suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión: -Se inicia el estudio de la proporcionalidad con experiencias intuitivas correspondientes a una aproximación cualitativa de la proporcionalidad y que refiere a actividades de estimación -A continuación, se considera el enfoque cuantitativo buscando el progreso del pensamiento aditivo al multiplicativo. - Se retrasa la introducción de la regla de tres hasta que los alumnos han adquirido suficiente experiencia en el tema.	

Tabla 5- Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Componentes e indicadores de idoneidad afectiva		
Componentes	Indicadores	Observaciones
Actitudes	-Se promueve la participación activa en las actividades, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.	
	-Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.	
Emociones	-Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías adivinanzas etc.	
	-Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.	
	-Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.	
Creencias	-Se analizan y se consideran las creencias sobre las matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.	
Valores	-Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	

1.3. Segundo ciclo de experimentación con futuros profesores de secundaria

1.3.1. Tarea inicial

1. Responda a las siguientes cuestiones generales:

- a) ¿Cómo crees que debería utilizar el profesor un libro de texto de matemática tanto dentro como fuera del aula?
- b) ¿Cómo crees que debería emplear el estudiante un libro de texto de matemática tanto dentro como fuera del aula?
- c) ¿Qué características debería tener un libro de texto de matemáticas para que lo consideres un buen recurso para el proceso instruccional?
- d) ¿Qué ventajas y desventajas para el proceso de enseñanza y aprendizaje crees que tiene el emplear un libro de texto de matemática en el aula? Justifica tu respuesta.
- e) ¿Conoces herramientas para analizar crítica y sistemáticamente un libro de texto? Si es así indica ¿cuáles y cómo se llevan a cabo esos análisis?
- f) ¿Crees que eres capaz de detectar las principales fortalezas y debilidades de un libro de texto de matemática?
- g) ¿Crees que es importante y útil conocer herramientas para analizar los libros de texto en tu formación? Justifica.

2. En la plataforma *Medicación Virtual* encontrará el archivo Porras y Gamboa (2013), el cual contiene una lección de libro de texto sobre la proporcionalidad inversa tomado del Libro de Matemáticas 7. Después de leer la lección completa (inclusive las actividades propuestas) responda a las siguientes dos consignas:

- a) Indica si consideras que la lección es adecuada o no para abordar el tema de proporcionalidad a nivel de séptimo año. Es importante que en tu discurso describas claramente si crees que presenta **errores, deficiencias, ambigüedades, o si por el contrario encuentras fortalezas, buenos ejemplos etc.**
- b) Suponiendo que tienes que utilizar esta lección de libro de texto como recurso para enseñar en tu clase este tema, ¿cómo la usarías?

1.3.2. Cuestionario de conocimientos didáctico-matemáticos

A continuación, se le presentan cuatro preguntas, las cuales deberá responder en este mismo archivo. Una vez finalice, nombre el documento como [NombreApellidos_Cuestionario] y súbalo a la plataforma MediaciónVirtual como respuesta a la tarea “Cuestionario”.

Nombre del alumno: _____

1. Responda a las cuestiones planteadas sobre la siguiente situación:

Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento “Repoblamos”. Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles.

- ¿Cuántos árboles habrá plantado María? Explica cómo lo has averiguado.
- ¿Cuántos árboles habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.
- Pasado un tiempo, si sabes el número de árboles que ha plantado Ana, ¿cómo podrías saber el número de árboles que ha plantado María? ¿Y el número de árboles que ha plantado Luis? Explica tu respuesta.

2. Responda a las cuestiones planteadas sobre la siguiente situación-problema

La Sra. Martín quiere crear una situación-problema que se pueda representar con la siguiente proporción:

$$\frac{24}{3} = \frac{x}{6}$$

2.1 ¿Cuál de las siguientes situación-problema corresponderían a dicha proporción? Indique si se cumple: sólo a, sólo b, ambas o ninguna y justifique su respuesta.

- Tres trabajadores pintan un edificio en 24 h. Suponiendo que vayan al mismo ritmo, ¿cuánto tardarían 6 pintores en pintar el edificio?
- Un grifo con fugas goteaba 24 onzas de agua cada 3 h. ¿Cuánta agua goteará del grifo en 6 h?

2.2 Plantee dos situaciones-problemas que puedan representarse con la proporción anterior, de manera que una involucre magnitudes directamente proporcionales y la otra implique magnitudes inversamente proporcionales. Justifique por qué las situaciones-problemas que usted ha planteado en cada caso corresponden a una relación de proporcionalidad directa o inversa.

3. Resuelva los siguientes problemas mediante dos formas distintas y con un grado de formalización diferente (por ejemplo, corresponderían a distinto grado de formalización, aquellas soluciones que se abordan desde el punto de vista aritmético, incluyen lenguaje simbólico-algebraico, o las que involucran un tratamiento funcional). Justifica por qué crees que los grados de formalización que propones son diferentes.

- a) Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?
- b) Tres obreros de igual rendimiento asfaltan 120 m de una carretera. ¿Cuántos obreros se necesitan para asfaltar 400 m de carretera?

4. A continuación, aparecen las soluciones dadas por unos alumnos a tres problemas. Describe si crees que son correctas las respuestas (estrategia de resolución y argumentación) dada por los alumnos. Justifica tu respuesta.

Problema 1: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Solución de un alumno:

Alumnos C.	Alumnos P.	Alumnos T.
1	3	212
2	6	
3	9	
4	12	- 70 niños en coche
5	15	- 70 a pie
6	18	142
7	21	
8	24	
9	27	
10	30	
20	60	
50	150	
70	210	

Problema 2. Un pastelero usa 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. ¿Cuántas tartas puede hacer con 4 litros de leche? Explica cómo lo has averiguado.

Solución de un alumno:

Operación

Litros de leche	3	4
Tartas	18	x

$18 \cdot 4 = 3x$
 $72 = 3x$
 $3x = 72$
 $x = \frac{72}{3} = 24$

Solución
 Puede hacer 24 tartas

Explicación
 Con el doble de leche harás el doble de tartas, con el triple de leche harás el triple de tartas... Por lo tanto es directamente proporcional.

2. Dos amigos, Laura y Daniel, quieren comprar una caja de 20 bombones. Para su compra, Laura ha puesto 6 euros y Daniel ha puesto 14 euros.

Problema 3: Laura y Sofía quieren pintar sus habitaciones del mismo color. Laura mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 de pintura roja. Si Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla, ¿cuántos botes de pintura roja necesitará? Explica tu respuesta.

Solución de un alumno:

$6+3=9$
 $9-7=2$

3) Laura → 3 botes amarillo
 6 " roja
 Sofía → 7 " amarilla
 ? "

solución: Sofía necesitará 2 botes de pintura roja para pintar toda su habitación, ya que Laura usa 9 botes pues Sofía también.

1.3.3. Tarea final

Descripción e instrucciones generales:

Recuerde que esta actividad es evaluada con un porcentaje del **15%** de la nota final del curso.

Informe escrito e individual (valor 15%)

Para la parte escrita usted debe responder cada una de las consignas que se indican a continuación, y subir el documento Word o pdf a la plataforma *Mediación virtual*; por favor nombre el archivo como [NombreApellidos_Tareafinal]

Considerando la lección del libro de texto sobre proporcionalidad (**Porras y Gamboa, 2013**) usted debe:

1. **Completar** las tablas del **Anexo** que incluyen la **GALT-Proporcionalidad**. Estas contienen los indicadores de idoneidad según las **seis** facetas que la componen. En la columna de "Valoración (0,1,2)" debes incluir una **valoración numérica** en relación al grado de cumplimiento del indicador según el siguiente criterio:

0: no se cumple el indicador nunca; 1: se cumple parcialmente, o a veces; 2: se cumple siempre y totalmente.

La columna de "**justificación**" está pensada para que incluyas aquello que te ha ayudado a decidir sobre la valoración numérica, dicha información **argumenta** tu valoración a cada uno de los indicadores. Esta información te ayudará después a decidir la idoneidad de la lección en cada una de las facetas y componentes.

2. **Precisa** los principales **conflictos** detectados (**epistémicos**, es decir, con el contenido matemático; **cognitivos**, es decir, con el aprendizaje; **interaccionales**, es decir, con la secuenciación, calidad del recurso).

Conflictos epistémicos	Conflictos cognitivos	Conflictos interaccionales
1.	1.	1.
2.	2.	2.
... etc.	... etc.	...etc.

3. Teniendo en cuenta la valoración realizada en el **punto 1**. Elabora un **juicio razonado** sobre la idoneidad didáctica de la lección **en cada una** de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Indica para **cada una** de ellas **y luego en general** el grado de idoneidad como: como **baja, media o alta** según consideres.

Para el **juicio razonado sobre la idoneidad parcial**, es decir en **cada una de las facetas**, puedes por ejemplo completar la tabla siguiente:

Faceta	Epistémica	Cognitiva	Afectiva	Mediacional	Interaccional	Ecológica
Grado de idoneidad (Indique si considera que es: baja, media, o alta)						
Juicio razonado (Son los argumentos, las razones o justificaciones que te han llevado a asignar un determinado grado de idoneidad a cada faceta)	<u>Puedes guiarte completando estas frases.</u> Del punto 1 se vieron importantes deficiencias/ fortalezas en los componentes (xxx) ..., entre las más relevantes están XXX , lo que justifica que el grado de idoneidad se XXX Debido a que se encontraron conflictos importantes en relación a XXX ..., tales como XXX . La mayoría de los indicadores tienen una valoración numérica (0,1,2) por lo que considero que...					

Para el **juicio razonado sobre la idoneidad global (general)** de la lección, puedes usar las siguientes frases, para responder:

Considerando las valoraciones anteriores, concluyo que la idoneidad de la lección es: *alta, media o baja* ya que....

Aunque se evidencia una buena idoneidad en las facetas ..., considero que la faceta... debe tener mayor peso, por lo que creo que la idoneidad general es alta, media, baja....

4. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la lección de libro analizada para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introducirías en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? **Justifica** tu respuesta. [Se recomienda usar las frases: Usaría la parte... del libro de texto, **porque**...; Cambiaría la parte... **debido a que**...]

5. En base a los conflictos detectados en el **punto 2**, precisa de forma concreta y justificada cómo solucionarías **al menos cuatro** de estos. Por ejemplo; si existe una definición incorrecta, plantea una que lo sea según tu criterio, o bien, si hallas una tarea que no es apropiada, indica cómo la usarías, o que cambios le harías o por cual la reemplazarías. [Se recomienda incluir la frase, para dar solución a este conflicto... propongo cambiar esta parte, actividad, secuencia etc. de la siguiente manera... **debido** a que así se solucionaría... O bien completar una tabla como la que sigue]

Deben dar solución al conflicto, si faltan proposiciones, deben decir cuáles faltan y agregarlas.

Si hay un error, deben corregirlo... etc.

Por ejemplo, si no hay situaciones para distinguir relaciones aditivas versus multiplicativas, entonces propongan una que lo permita.

Conflicto elegido del punto 2	Solución	Justificación
1.		
2.		
3.		
4. ...		

6. Entra al sitio web (https://doodle.com/poll/s3cnzdw33ueyggf?utm_source=poll&utm_medium=link) y registra nuevamente tu valoración a la lección Porras y Gamboa (2013) toma en cuenta tu respuesta a las preguntas anteriores para decidir esta nueva valoración.

7. Responde la siguiente encuesta:

Encuesta de valoración

Taller de análisis de libro de texto

Con el fin de poder introducir cambios fundamentados en el diseño e implementación del taller, te agradeceríamos que expreses tu opinión y valoración sincera sobre el mismo.

Valora cada uno de los siguientes ítems según una escala de [1 - 5], siendo 1: valor mínimo; 5: valor máximo.

I. Reflexión sobre la práctica docente. Análisis de libros de texto empleando la GALT-Proporcionalidad

	Valoración
1) Claridad de las tareas y de las consignas	
2) Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor)	
3) Grado de motivación e interés suscitado por las actividades	
4) Nivel de aprendizaje logrado	
5) Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas	
6) Grado de pertinencia de los recursos utilizados (GALT-Proporcionalidad, libros de textos analizados, ejemplos ofrecidos, lecturas)	
7) Grado de dificultad de las tareas	

1. Si presentaste dificultades, indica de qué tipo: con el contenido matemático (proporcionalidad), con la guía y la herramienta teórica usada, otros.
2. Indica si has cambiado de opinión respecto al grado de adecuación y al modo de uso de la lección de libro analizada considerando la actividad inicial y la actividad final. Y la razón que motivó ese cambio en caso de que se haya dado.
3. Indica si has cambiado de opinión sobre cómo debería un profesor y un alumno emplear una lección de libro de texto tanto dentro como fuera del aula y porqué.
4. Indica si has cambiado de opinión respecto a las características que debería tener un buen libro de texto y la razón que motivó ese cambio.
5. Indica si crees que la GALT-proporcionalidad ha sido útil como herramienta de análisis de la lección, si te ha ayudado a precisar debilidades, errores, fortalezas, y a reflexionar sobre su modo de uso. Indica si harías cambios en la misma y cuáles.
6. Añade cualquier aclaración que consideres pertinente para mejorar la actividad.

Anexo: GALT-proporcionalidad

En las tablas de la 1 a la 6 se contemplan los respectivos indicadores de idoneidad adaptados al estudio de la proporcionalidad directa e inversa, para cada una de las facetas consideradas en el EOS.

Tabla 1. *Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica*

Comp.	Subcomp.	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Significado	Problemas	I1. Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar correctamente las nociones de proporcionalidad y magnitudes directa e inversamente proporcionales (involucra resolver y formular problemas).		
		I2. Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de proporcionalidad directa e inversa.		
		I3. Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas ($y = kx$, $yx = k$) de las aditivas ($y = x + c$) y otras que las trabajen de forma simultánea.		
		I4. Se presentan situaciones que permitan distinguir relaciones de proporcionalidad directa de inversa.		
		I5. La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de situaciones resueltas.		
		I6. Las situaciones resueltas involucran las relaciones multiplicativas <i>dentro</i> y <i>entre</i> cantidades de magnitudes.		
		I7. Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.		
		I8. Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la proporcionalidad (directa e inversa).		
	Lenguajes	I9. Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.		
		I10. Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, etc.) para modelizar correctamente problemas de proporcionalidad directa e inversa, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas.		
		I11. Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten las diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad (gráfica, simbólica, tablas de valores, etc.) a través de las tareas.		
		I12. Se utilizan diversidad de representaciones para distinguir entre situaciones directamente proporcionales, inversamente proporcionales y otras que no lo son (en particular, de las funciones afines).		
		I13. Se utilizan diversas representaciones para identificar las propiedades fundamentales de las funciones de proporcionalidad directa e inversa.		
		I14. Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen <i>dentro</i> de las magnitudes proporcionales y <i>entre</i> dichas magnitudes.		
		I15. Se presentan de manera clara y correcta los conceptos fundamentales de la proporcionalidad (fracción, razón, proporción, número racional, relación de proporcionalidad directa, relación de		

Comp.	Subcomp.	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
		proporcionalidad inversa, magnitud, cantidad de magnitud, función, constante de proporcionalidad, covarianza de cantidades e invariancia de razón o producto) para el nivel educativo correspondiente.		
		I16. Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes directa e inversamente proporcionales.		
		I17. Se especifican las diferencias conceptuales que existen entre las magnitudes proporcionales directas e inversas (se clarifica el significado de la constante de proporcionalidad).		
		I18. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar la definición de la relación de proporcionalidad directa e inversa.		
	Proposiciones	I19. Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de forma clara y correcta (ej. simetría de la relación de proporcionalidad)		
		I20. Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para identificar relaciones de proporcionalidad directa e inversa.		
		I21. Se presentan las propiedades fundamentales de las funciones de proporcionalidad directa e inversa (monotonía, aditiva, multiplicativa) de forma clara y correcta.		
		I22. Se distinguen las funciones de proporcionalidad directa, inversa y afines, en base a sus propiedades (monotonía, aditiva, multiplicativa, intersecciones con los ejes).		
		I23. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar las propiedades de las magnitudes directa e inversamente proporcionales.		
	Procedimientos	I24. Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (reducción a la unidad, regla de tres, tratamiento con funciones) para el nivel educativo correspondiente.		
		I25. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.		
	Argumentos	I26. Las proposiciones y procedimientos explican y argumentan de forma adecuada al nivel educativo correspondiente.		
		I27. Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.		
Relaciones	I28. Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.			
	I29. Se hace explícita la relación con las magnitudes (el dominio de definición de las variables son cantidades de magnitudes)			
	I30. Se identifican, articulan y desarrollan organizadamente diversos enfoques o significados de la proporcionalidad tanto directa como inversa: geométrico, aritmético y algebraico-funcional; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.			

Comp.	Subcomp.	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Procesos	Comunicación, argumentación...	I31. Se promueven diversas situaciones donde el alumno tenga que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.		
	Modelización	I32. Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar modelos matemáticos diversos (función lineal, función de proporcionalidad inversa, función afin...) para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo) en situaciones de proporcionalidad.		
		I33. Se incluyen situaciones cuyo modelo subyacente comparta ciertas propiedades de la función de proporcionalidad, pero no todas, con el fin de diferenciar las características de cada uno (funciones afines, funciones de proporcionalidad inversa).		
	Generalización	I34. Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar, elaborar conjeturas y generalizaciones sobre secuencias numéricas, incluso mediante el uso de expresiones algebraicas, relacionados con la proporcionalidad directa e inversa.		

Tabla 2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Conocimientos previos	I35. Se contempla en el texto los conocimientos previos necesarios de acuerdo al nivel educativo correspondiente.		
	I36. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.		
Diferencias individuales	I37. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.		
	I38. Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas (de construcción progresiva, aditivas, multiplicativas etc).		
Progresión en la dificultad de aprendizaje	I39. Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (que involucren números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, que se altere el orden de los datos en los problemas, se incluyen funciones que comparten ciertas características con modelos de proporcionalidad directa e inversa, en relación a su crecimiento, representación y propiedades; se incluyen diversos modos de representación y conexiones entre ellos, gráfico con algebraico suele ser más difícil que gráfico con tabular).		
	I40. Se advierten errores y dificultades de los alumnos tanto conceptuales como procedimentales (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias (covariación), ignorar parte del problema, realizar operaciones al azar, usar estrategias aditivas erróneas...).		
Evaluación	I41. Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.		
	I42. Los diversos modos de evaluación incluidos en el texto son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva).		

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Actitudes	I43. Se promueve la participación activa en actividades, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.		
	I44. Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.		
Emociones	I45. Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías adivinanzas etc.		
	I46. Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.		
	I47. Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.		
	I48. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia, el miedo a las matemáticas.		
Creencias	I49. Se analizan y se consideran las creencias sobre las matemáticas y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.		
Valores	I50. Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.		

Tabla 4. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Componentes	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Interacción autor→alumno	I51. El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)		
	I52. Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.		
	I53. Se usan diversos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.		
Interacciones discentes	I54. Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes puntos de vista utilizando argumentos matemáticos.		
Autonomía	I55. Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).		

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Recursos materiales	I56. Se promueve el uso de materiales manipulativos (escalímetro, el pantógrafo, el compás de proporción), audiovisuales e informáticos (GeoGebra u otros programas de representación gráfica) que permiten introducir situaciones adaptadas al contenido pretendido.		
	I57. Se contextualizan y motivan las definiciones y propiedades empleando modelos concretos y visualizaciones.		
	I58. Se explicitan las fuentes usadas y son diversas.		
Secuenciación	I59. La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedicando el espacio suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión: -Se inicia el estudio con un enfoque aritmético (se trabajan secuencias de números y se vincula a las magnitudes), posteriormente se trabaja con un enfoque proto-algebraico (centrándose en la idea de razones y proporciones) -Se recuerdan los procedimientos característicos de la proporcionalidad, de manera que la regla de tres se incluye después de que los alumnos han tenido experiencia en el tema. -A continuación, se establece un vínculo con el significado algebraico-funcional.		

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	Indicadores	Valoración (0,1,2)	Justificación
Adaptación al currículo	I60. Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.		
Apertura a la innovación	I61. Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (se enuncian problemas prácticos, experimentación).		
Adaptación socio-profesional	I62. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes		
Educación en valores	I63. Se contempla la formación en valores democráticos (respeto a la diversidad, tolerancia, integración, cooperación, conciencia ecologista, pacifista, otros valores y prejuicios) y se dan oportunidades para que los alumnos realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).		
Conexiones intra e interdisciplinares	I64. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares (temas transversales, historia de la matemática, otros)		

1.4. Segundo ciclo de experimentación con futuros maestros de primaria

1.4.1 Tarea inicial

Consigna

En la siguiente sesión de seminarios, vamos a trabajar sobre el análisis de lecciones de libros de texto. En el apartado dedicado a este tema 3, sobre gestión, encontrarás una carpeta que contiene imágenes sobre una lección de libro de texto dedicada a la proporcionalidad y los porcentajes en 6º de primaria²⁷. Os propongo como actividad voluntaria que leáis la lección, detenidamente y respondáis brevemente (en un archivo word o similar que podéis subir aquí) a las siguientes preguntas:

- 1. ¿Qué aspectos consideras más importantes en una lección de libro de texto de matemáticas?*
- 2. ¿Qué te ha parecido la lección que acabas de analizar? ¿Qué características positivas destacarías? ¿Qué características negativas observas?*
- 3. ¿Has identificado algún error o algún elemento que pueda suponer una limitación en el aprendizaje por parte de los alumnos?*

²⁷ La lección se muestra dividida en configuraciones en el Anexo I de la Tarea final que se muestra en la sección de 1.4.2 de este apartado.

1.4.2. Tarea final



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del Currículum
en Educación Primaria

Gestión de la clase. Los libros de texto

Evaluación. Idoneidad didáctica

2020 - 2021

ANÁLISIS DE UNA LECCIÓN DE LIBRO DE TEXTO: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

INTRODUCCIÓN

Una lección de un libro de texto sobre un contenido matemático específico, por ejemplo, el estudio de la proporcionalidad en sexto curso de educación primaria se puede considerar como la planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto por el autor. Suponiendo que un profesor ha tomado la decisión de usar el libro de texto como recurso para apoyar su enseñanza y facilitar el aprendizaje de los estudiantes, nos planteamos analizar cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado, lo que nos lleva a identificar con precisión los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales y a tomar decisiones sobre cómo se debería gestionar el uso de la lección para incrementar la idoneidad del proceso de estudio finalmente implementado.

MÉTODO

Se recomienda leer el documento disponible en la plataforma Prado sobre Idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la práctica sobre análisis de lecciones de libros de texto, desarrollaste con tu grupo de trabajo el análisis didáctico de una lección de proporcionalidad de un libro de texto de proporcionalidad de 6º curso de educación primaria. La lección se dividió en configuraciones didácticas y para cada una de estas tuvisteis que: a) describir las prácticas matemáticas que se proponen, b) identificar los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y lenguajes) fundamentales que intervienen en las mismas, c) describir los principales procesos matemáticos.

Es importante que tengas en cuenta la información obtenida de ese primer análisis para la valoración de la idoneidad didáctica de dicha lección (incluida de nuevo en Anexo I) como proceso instruccional previsto o planificado.

En Anexo II encontraréis las tablas que componen la Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto de Proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad) con los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad en las distintas facetas: epistémica-ecológica (el contenido y adaptación de la lección a las directrices curriculares), cognitiva-afectiva (aprendizaje, actitudes e intereses), instruccional (la enseñanza). Los indicadores miden el grado de máxima idoneidad en el componente correspondiente: situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, etc. Esto quiere decir que la lección será más idónea respecto de un componente en la medida que se cumpla en un mayor número de configuraciones los indicadores correspondientes.

ACTIVIDADES.

1. Completa las tablas. En las tablas del Anexo II se han incluido dos columnas a la derecha de los indicadores. En la primera columna debes incluir una valoración numérica en relación al grado de cumplimiento del indicador: 0 (no se cumple el indicador), 1 (se cumple parcialmente, o a veces), 2 (se cumple totalmente). La segunda columna está pensada para que incluyas las justificaciones sobre la valoración numérica del indicador. Esta información te ayudará después a decidir la idoneidad de la lección en cada una de las facetas y componentes.

2. En las tablas de idoneidad epistémica-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional aparece al final un espacio dedicado a incluir los conflictos detectados en cada una de las componentes como carencias o bajo cumplimiento de algunos de sus indicadores. Debéis completar también dicho espacio.

Recuerda que en el análisis didáctico de esta lección que realizaste con tu equipo de trabajo, se pedía incluir conflictos epistémicos (con el contenido matemático), cognitivos (con el aprendizaje) e instruccionales (con la secuenciación, calidad del recurso). ¿Has encontrado después de utilizar estas tablas nuevos conflictos? ¿Te replanteas los que habíais indicado?

3. Teniendo en cuenta lo que has observado por medio de la valoración en cada componente, emite un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección (baja, media o alta) en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica.

4. Recuerda que en la tarea voluntaria de Prado asociado al Tema 3 (“Lección de libro de texto”) se preguntaba qué te había parecido la lección, así como sus características positivas y negativas. ¿Ha cambiado tu opinión al respecto después de analizar dicha lección por medio de la guía (tablas) que acabas de utilizar?

5. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la lección de libro analizada para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? ¿Qué cambios introduciríais en el proceso de enseñanza y aprendizaje para resolver los conflictos que has identificado y mejorar el proceso de estudio planteado en la lección del libro de texto? **Justifica** tu respuesta. [Se recomienda usar las frases: Usaría la parte... del libro de texto, **porque...**; Cambiaría la parte... **debido a que...**]

6. En base a los conflictos detectados, precisa de forma concreta y justificada cómo solucionarías **al menos cuatro** de estos. Por ejemplo; si existe una definición incorrecta, plantea una que lo sea según tu criterio, o bien, si hallas una tarea que no es apropiada, indica cómo la usarías, o que cambios le harías o por cual la reemplazarías. [Para dar solución al conflicto... propongo cambiar esta parte, actividad, secuencia etc. de la siguiente manera... debido a que así se solucionaría...]

7. Distingue los tres indicadores que consideres más importantes (para la valoración de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto) en cada una de las facetas: epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva, e instruccional (tablas 1, 2 y 3 respectivamente).

CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 1. PORCENTAJES

1

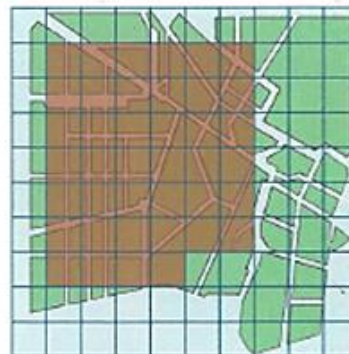
Porcentajes



Christopher ha encontrado una página del mapa dividida en 100 partes y tiene 40 coloreadas.

La cantidad de partes coloreadas se puede expresar de distintas formas:

- Como fracción decimal $\rightarrow \frac{40}{100}$
- Como número decimal $\rightarrow 40 : 100 = 0,4$
- En forma de porcentaje $\rightarrow 40 \%$



La expresión 40 % se lee *cuarenta por ciento* y representa las partes que se toman de 1 unidad dividida en 100 partes iguales.

La cantidad de partes que quedan sin colorear representa el 60 %. Observa que:

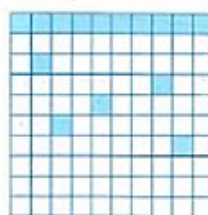
$$40 \% + 60 \% = 100 \%$$

Un **porcentaje** representa una parte de un total. Se expresa mediante un número seguido del símbolo %. También se representa con una fracción de denominador 100.

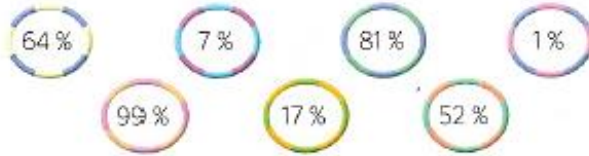
1 Copia y completa esta tabla.

porcentaje	fracción	n.º decimal	significado	se lee
60 %	60 partes de 100	...
...	$\frac{35}{100}$
80 %
...	...	0,09
...	diez por ciento

2 Indica qué porcentaje está coloreado y qué porcentaje está sin colorear en cada caso.



3 Expresa en forma de número decimal y ordena de menor a mayor.



4 Observa el ejemplo y expresa qué porcentaje corresponde a cada fracción.

Ejemplo:

$$\frac{12}{25} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{48}{100} = 48\%$$

$\frac{15}{20}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{7}{10}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{5}$

Ten en cuenta

Para ver qué porcentaje representa una fracción, buscamos la fracción equivalente con denominador 100. Así tenemos la unidad dividida en 100 partes.

5 Escribe en tu cuaderno el porcentaje asociado a cada caso.

2 de cada 5

8 de cada 20

9 de cada 10

6 ¿Cuál de estas afirmaciones es incorrecta?

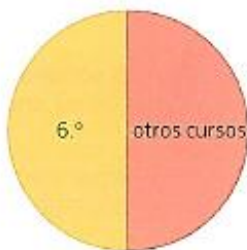
- A. El 87 % es más de la mitad.
- B. El 20 % representa el doble del 10 %.
- C. El 5 % es lo mismo que el 50 %.
- D. Con el 37 % y el 63 % tenemos la unidad completa.



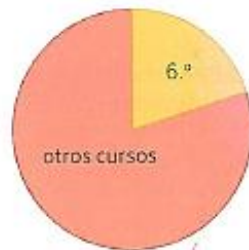
Problemas

7 En el colegio de Candela, el 87 % de los alumnos comen en el comedor. ¿Qué porcentaje de alumnos come en casa?

8 La quinta parte de los alumnos del colegio son de 6.º de Primaria, y el resto, de otros cursos. ¿Cuál es el porcentaje de alumnos de 6.º? ¿Qué diagrama representa la distribución de alumnos del colegio?



A



B

CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 2. PORCENTAJE DE UNA CANTIDAD

2 Porcentaje de una cantidad



En un teatro hay 240 espectadores. Si el 15 % son niños, ¿cuántos niños hay?

Calculamos el 15 % de 240 de dos formas:

- $\frac{15}{100}$ de 240 = $15 \times 240 : 100 = 36$
- $\frac{15}{100}$ de 240 = $240 : 100 \times 15 = 36$

► Hay 36 niños.



La entrada al teatro cuesta 20 € y la infantil tiene un 10 % de descuento. Si al precio final le aumentan el 21% de IVA, ¿cuánto cuesta la entrada infantil?



Para averiguarlo seguimos estos pasos:

1.º Calculamos el **descuento**.

Precio inicial: 20 €

• Hallamos el **descuento**:

$$10 \% \text{ de } 20 \text{ €} = 10 \times 20 : 100 = 2 \text{ €}$$

• **Restamos** el descuento a los 20 €:

$$20 \text{ €} - 2 \text{ €} = 18 \text{ €}$$

2.º Calculamos el **aumento**.

Precio inicial: 18 €

• Hallamos el **aumento**:

$$21 \% \text{ de } 18 \text{ €} = 18 \times 21 : 100 = 3,78 \text{ €}$$

• **Sumamos** el aumento a los 18 €:

$$18 \text{ €} + 3,78 \text{ €} = 21,78 \text{ €}$$

► La entrada infantil cuesta 21,78 €.

9 Calcula estos porcentajes.

27 % de 300	58 % de 1.500	83 % de 51.400
9 % de 127.800	74 % de 800	60 % de 5.150
48 % de 950	36 % de 275	12 % de 325



10 Obtén los porcentajes de estas cantidades con todas sus cifras decimales.

17 % de 60

7 % de 12

19 % de 562

35 % de 35

11 Ordena los resultados de menor a mayor.

54 % de 1.468

1 % de 72.927

10 % de 792,27

12 ¿Es lo mismo el 25 % de 20 que el 20 % de 25? Explica tu respuesta.

13 Por parejas, ayudad a estos niños a encontrar los números que buscan.



Ten en cuenta

Para calcular el 1% dividimos entre 100:

$$1\% \text{ de } 200 =$$

$$= \frac{1}{100} \text{ de } 200 =$$

$$= 200 : 100 = 2$$

Para calcular el 10%, dividimos entre 10:

$$10\% \text{ de } 74 =$$

$$= \frac{1}{10} \text{ de } 74 =$$

$$= 74 : 10 = 7,4$$

Problemas

14 Ismael tiene 60 € para comprar ropa. Si antes de la rebajas el pantalón costaba 35 €, el chaleco, 27 €, y la mochila, 18 €, ¿cuánto le ha sobrado?



15 Blanca ha tomado ensalada, lomo de merluza y fruta.

- ¿Cuánto cuesta la comida de Blanca?
- En la cuenta final, han añadido un 10 % más de IVA. ¿Cuánto pagará en total? Redondea el resultado a las centésimas.
- Blanca deja un 5 % del total como propina. ¿Cuánta propina deja? Redondea el resultado a las centésimas.

16 Un museo recibe 100 visitantes la primera semana del mes, la segunda semana, un 20 % más, y la tercera, un 20 % menos que la semana anterior.

- La tercera semana, ¿vuelve a tener 100 visitantes? Explica tu respuesta sin realizar operaciones.
- Realiza las operaciones y comprueba tu respuesta.

smSaviadigital.com
PRACTICA Entra en la web y calcula porcentajes de una cantidad.

menú

platos principales

ensalada.....6,45 €

sopa.....5,80 €

bistec a la plancha....11,25 €

lomo de merluza.....13,40 €

postre

fruta.....1,25 €

helado.....2,75 €

CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 3. MAGNITUDES PROPORCIONALES

3 Magnitudes proporcionales



Fermin aparca su bicicleta durante 3 h. ¿Cuánto pagará?

Si aparcarse durante 1 h cuesta 2 €, el triple de tiempo cuesta 3 veces más:

$$1 \text{ h} \longrightarrow 2 \text{ €} \quad \xrightarrow{\times 3} \quad 3 \text{ h} \longrightarrow 6 \text{ €}$$

► Pagará 6 €.



El tiempo de aparcamiento y el precio son **magnitudes proporcionales**. Se pueden relacionar mediante una tabla de proporcionalidad.

Al multiplicar los números de la fila de arriba, obtenemos los de la fila de abajo.

tiempo (h)	1	2	3	4	...
precio (€)	2	4	6	8	...

Al dividir los números de la fila de abajo, obtenemos los de la fila de arriba.

Al pasear en su bicicleta durante 1 h, Fermin encuentra 2 semáforos. Si pasea 3 h, ¿puede saber cuántos semáforos encontrará?

► No, porque el número de semáforos que encuentra no tiene por qué ser el mismo cada hora.

El tiempo y el número de semáforos no son magnitudes proporcionales. No se pueden relacionar con una tabla de proporcionalidad.

17 ¿Cuáles de estas magnitudes son proporcionales?

litros de leche comprados	precio total
edad de una persona	altura de la persona
número de espectadores	cantidad de entradas vendidas
velocidad de un tren	número de pasajeros

Ten en cuenta

Magnitud es aquello que se puede medir.

18 Indica en qué caso las magnitudes no son proporcionales.

peso (kg)	5	10	15	20
precio (€)	4	8	12	16

peso (kg)	10	16	21	26
edad (años)	2	4	6	8

19 Copia y completa estas tablas de proporcionalidad.

a)

n.º de gafas	1	2	...	4	5	6	...
n.º de cristales	...	4	6	14

b)

n.º de arañas	...	10	25	30	35
n.º de patas	...	80	120	160	200

¿Cómo se relacionan las filas de cada una de las tablas?

20 Halla el valor que falta en cada tabla para que correspondan a dos magnitudes proporcionales.



2	6
4	...

1	100
8	...

30	60
5	...

12	18
4	...

smSavia digital.com
PRACTICA Entra en la web y calcula magnitudes proporcionales.

21 Encuentra un ejemplo de dos magnitudes proporcionales y construye la tabla de proporcionalidad.

Problemas

22 ¿Cuánto cuesta el queso completo?



23 Lee la nota que ha escrito esta niña y responde junto con un compañero.

- ¿Qué dos magnitudes se mencionan?
- Si son magnitudes proporcionales, ¿qué distancia recorre Cayetana en 12 días?
- Completad una tabla de proporcionalidad para representar lo que corre Cayetana en el mes de abril.
- ¿Cuánto recorre en total en ese mes?



CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 4. REDUCCIÓN A LA UNIDAD Y REGLA DE TRES.

En un videojuego, Carmen obtiene 10 puntos por cada 2 monedas de oro que encuentra. Si en una partida encuentra 30 monedas, ¿cuántos puntos obtiene?



Para calcularlo tenemos que **reducir a la unidad**.

1.º Escribimos la tabla de equivalencias.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	¿?

2.º Dividimos entre 2, es decir, reducimos a la unidad.

n.º de monedas	2	1
n.º de puntos	10	5

3.º Calculamos el dato que buscamos.

n.º de monedas	2	30
n.º de puntos	10	150

También podemos calcularlo mediante la **regla de tres**.

Si conocemos 3 términos, podemos calcular el cuarto así:

1.º Escribimos los datos de esta manera:

$$\frac{\text{n.º de monedas}}{\text{n.º de puntos}} = \frac{2}{10} = \frac{30}{\text{¿?}}$$

¿? representa el dato que queremos calcular.

2.º Multiplicamos los datos conocidos que están en cruz.

$$\frac{2}{30} = \frac{10}{\text{¿?}}$$

$$30 \times 10 = 300$$

3.º Dividimos el resultado entre el número que no hemos utilizado aún.

$$\frac{\text{n.º de monedas}}{\text{n.º de puntos}} = \frac{2}{10} = \frac{300}{\text{¿?}}$$

$$300 : 2 = 150$$

Por tanto, el valor del dato que queremos calcular es:

$$30 \times 10 : 2 = 150$$

► Carmen ha obtenido 150 puntos.

24 Si 3 focas consumen 21 kg de pescado al día, ¿cuántos kilogramos de pescado consumirán 10 focas? Completa en tu cuaderno para resolverlo de dos formas distintas.

reducción a la unidad

n.º de focas	3	...	10
kg de pescado	21

regla de tres

n.º de focas kg de pescado

$$\frac{3}{10} = \frac{21}{\text{¿?}}$$

25 Copia y resuelve por reducción a la unidad.

botellas	3	10
litros de agua	6	...

tiempo (min)	20	60
distancia (km)	38	...

26 Calcula el valor del dato desconocido en estas reglas de tres.

$$\frac{2}{9} = \frac{10}{?}$$

$$\frac{18}{24} = \frac{?}{20}$$

27 Por parejas, seguid estos pasos para inventar y resolver una actividad relacionada con la proporcionalidad.

- Encontrad dos magnitudes proporcionales.
- Asignad un valor a la primera magnitud y el correspondiente a la segunda.
- Buscad un nuevo valor para la segunda y hallad el valor correspondiente de la primera.

Ten en cuenta
 Los métodos de reducción a la unidad y la regla de tres solo se pueden aplicar cuando hay proporcionalidad entre las magnitudes.

Problemas

28 Encuentra la respuesta a estas preguntas.



29 Francisco quiere preparar lentejas para 12 personas según esta receta que ha encontrado.

- ¿Qué cantidad de lentejas necesita?
- Escribe la receta con las cantidades necesarias de cada ingrediente para 12 personas.
- El coste de los ingredientes para 8 personas es de 15,50 € aproximadamente. ¿Cuánto costarán los ingredientes para 12 personas?

Lentejas para 8 personas

- medio kilo de lentejas
- 1 cebolla
- 2 dientes de ajo
- 1 patata
- 200 g de chorizo
- 25 g de aceite
- 1 puerro

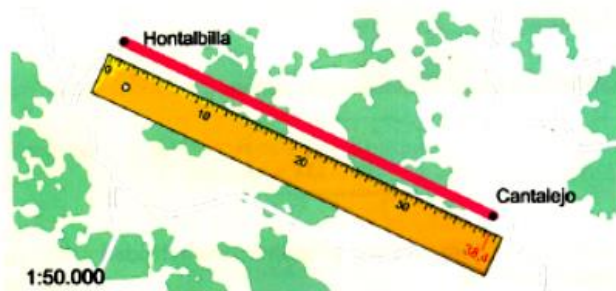


CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 5. ESCALAS Y MAPAS

La escala: planos y mapas



Dario ha medido la distancia entre su pueblo y el de sus tíos en el mapa. ¿Cuántos kilómetros son en la realidad?



Para calcularlo utilizamos la escala del mapa:

$$1:50.000$$

1 cm del mapa equivale a 50.000 cm en la realidad.

Como la distancia en el mapa es de 38,4 cm, en la realidad será:

$$38,4 \times 50.000 = 1.920.000 \text{ cm}$$

Expresamos el resultado en kilómetros:

$$1.920.000 : 100.000 = 19,2 \text{ km}$$

► Entre los dos pueblos hay 19,2 km.

- La escala sirve para representar superficies reales en un espacio pequeño.
- La escala 1:50.000 significa que una unidad del mapa equivale a 50.000 unidades en la realidad.

* 30 ¿Cuántos kilómetros son en la realidad estas medidas del mapa de Dario?

12 cm

52 cm

21,5 cm

10,8 cm

* 31 Explica qué significan estas escalas cuando aparecen en un mapa.

a) 1:200

b) 1:5.000

c) 1:2.500

32 ¿Qué escala corresponde a cada una de estas relaciones?

- 1 cm del mapa representa 250.000 cm en la realidad.
- 1 cm del mapa representa 500 dm en la realidad.

- 33 Estas medidas se han hecho en un plano de escala 1:3.000. Copia y completa la tabla.

plano	real en cm	real en m
4 cm
7 cm
2,6 cm

- 34 En un mapa de escala 1:10.000 han realizado estas medidas. ¿Cuántos metros corresponden a cada una en la realidad?

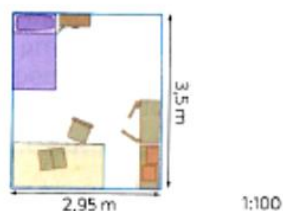
342,5 mm 18,4 cm 8,95 dm

- 35 De Sevilla a Huelva hay 93 km de distancia aproximadamente. Calcula cuál sería la medida que corresponde en cada caso.

- En un mapa de escala 1:10.000
- En un mapa de escala 1:25.000
- En un mapa de escala 1:50.000

Problemas

- 36 Ariadna ha medido el largo y el ancho de su habitación de la casa nueva.



- ¿A qué escala está dibujado el plano?
- ¿Cuáles son las medidas de la habitación en el plano?

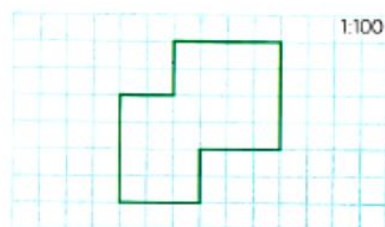
- 37 Por parejas, calculad la escala de un mapa en el que 1 cm representa estas distancias en la realidad.



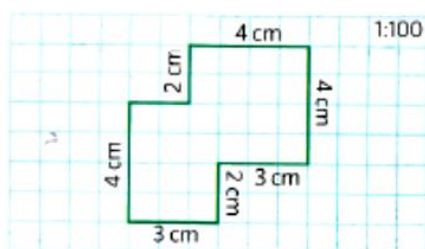
Taller de matemáticas manipulativas

Interpretamos un plano a escala

1. Utiliza la regla para dibujar en la cuadrícula este plano del salón de una casa.



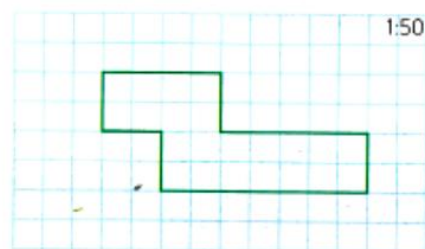
2. Como conocemos la escala, podemos averiguar la longitud de todas las paredes del salón.



Este plano está dibujado a escala 1:100.

Esto significa que cada centímetro del plano equivale a 100 cm en la realidad.

- 1 Dibuja este plano en tu cuadrícula.



- ¿A cuántos centímetros en la realidad equivale 1 cm del plano?
- Averigua la longitud de cada pared.
- ¿Cuánto medirían en un plano a escala 1:200?

Problemas

Estrategia: Descubrir preguntas ocultas y secuenciarlas

Nacho y Alicia quieren salir de vacaciones. En la agencia de viajes, los hoteles tienen un 15% de descuento. ¿Qué viaje de los que aparecen en el escaparate será más barato?

<p>5 noches 300 € 15 % de descuento</p>  <p>170 € + 7 % IVA</p>	<p>5 noches 346 € 15 % de descuento</p>  <p>150 € + 7 % IVA</p>
--	--

- ¿Qué nos pide el problema?
Averiguar qué viaje es más barato. Antes debemos responder a estas preguntas ocultas:
 - ¿Qué precio tiene el hotel con el descuento?
 - ¿Cuál es el precio final de cada vuelo?
 - ¿Qué precio tiene cada viaje en total?
- ¿Qué datos necesitamos?
El precio del hotel, el % de descuento, el precio de los vuelos y el % de IVA.

• ¿Cómo se resuelve?

1.º Calculamos el precio del hotel con el descuento.

playa → 15 % de 300 = $300 : 100 \times 15 = 45$ → $300 - 45 = 255$ €

montaña → 15 % de 346 = $346 : 100 \times 15 = 51,90$ → $346 - 51,90 = 294,10$ €

2.º Averiguamos el precio de los vuelos con el IVA.

playa → 7 % de 170 = $170 : 100 \times 7 = 11,90$ → $170 + 11,90 = 181,90$ €

montaña → 7 % de 150 = $150 : 100 \times 7 = 10,50$ → $150 + 10,50 = 160,50$ €

3.º Hallamos el precio total de cada viaje.

playa → $255 + 181,90 = 436,90$ €

montaña → $294,10 + 160,50 = 454,6$ €

4.º Comparamos los precios: $436,90$ € < $454,6$ €

► Será más barato el viaje a la playa.

⇒ Comprueba la solución: calcula primero el precio total del viaje a la playa y, después, el precio total del viaje a la montaña.

1 ¿Cuál es el viaje más barato?

<p>5 noches 440 € 20 % de descuento</p>  <p>80 € + 7 % IVA</p>	<p>5 noches 398 € 20 % de descuento</p>  <p>95 € + 7 % IVA</p>
---	---

2 Ayer, el 70 % de los telespectadores eligieron cine. Si vieron la televisión 10.500.000 personas, ¿cuántas no vieron cine?

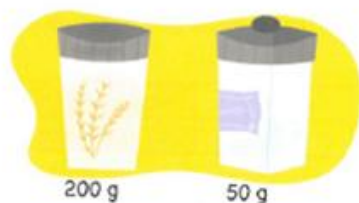
3 De los 4.200 habitantes de un pueblo, el 20 % son niños, el 12 % son jóvenes, el 30 % son adultos, y el resto, ancianos. ¿Cuántos ancianos hay en el pueblo?

Utiliza tus estrategias

- Amalia gasta el 20 % de sus ahorros. Si tenía 150 €, ¿cuánto dinero le queda?
- Es recomendable que una persona coma 5 piezas de fruta al día. ¿Cuántas piezas debería tomar esta familia en 10 días?



- Para hacer un pastel para 4 personas, se necesitan estas cantidades de harina y de azúcar. ¿Qué cantidades son necesarias si queremos que sea para 12 personas?



- Dos hermanos comparan sus resultados en un examen. El mayor ha respondido correctamente a 25 preguntas de las 30 que tenía su prueba, y el pequeño a 16 de las 20 que tenía la suya. ¿Quién ha obtenido mejores resultados?

- El 40 % de los 30 alumnos de una clase se ponen nerviosos ante un examen. ¿Cuántos alumnos se ponen nerviosos?
A. 4 alumnos C. 3 alumnos
B. 12 alumnos D. 10 alumnos

- Si a este precio hay que añadir el 21 % de IVA, ¿cuál será el precio final?

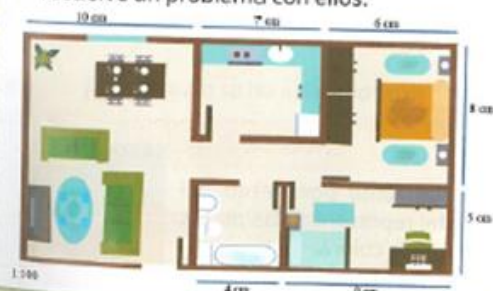


- Una fotografía mide 15 cm de ancho y 10 cm de largo. Si Fiona quiere ampliarla para un marco de 45 cm de ancho, ¿cuánto medirá el largo?
A. 30 cm B. 150 cm C. 50 cm D. 3 cm

- Un pintor pinta una habitación en 3 h. ¿Cuánto tardará en pintar una casa de 5 habitaciones, si descansa media hora entre cada habitación?
A. 15 h C. 15 h y 30 min
B. 17 h D. 17 h y 30 min

Inventa un problema

- Fijate en la imagen y en los datos. Inventa y resuelve un problema con ellos.



¿Tiene sentido?

- La chaqueta que me gusta costaba 240 € antes de la rebaja y ahora, con un 30 % de descuento, cuesta 160 €.
- Un libro cuesta 16 €. Si espero al Día del libro, me harán un 10 % de descuento y podré comprarlo por 6 €.
- Una tarta lleva un 15 % de fruta. En un cuarto de kilo de tarta, habrá 37,5 g de fruta.

CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 7. CÁLCULO MENTAL

Matemáticamente

Cálculo mental Cálculo de porcentajes (50 %, 25 % y 75 %)

50 % de 84

$84 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 42$

50 % de 84 = 42

25 % de 84

$84 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 42 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 21$

25 % de 84 = 21

75 % de 84

$84 \begin{cases} \xrightarrow{50\%} 42 \\ \xrightarrow{25\%} 21 \end{cases} \rightarrow 63$

75 % de 84 = 63

1 Aplica la estrategia aprendida y completa en tu cuaderno.

50 % de 88

75 % de 64

25 % de 92

25 % de 50

25 % de 72

50 % de 305

75 % de 48

50 % de 112

75 % de 140

2 En un colegio, exponen 48 cuadros pintados por los alumnos. La cuarta parte son en blanco y negro, y el 75 % son a color. ¿Qué porcentaje de cuadros hay en blanco y negro? ¿Cuántos cuadros hay de cada tipo?



smSaviadigital.com
PRACTICA Utiliza esta estrategia de cálculo mental.

Retos matemáticos

1 ¿Cómo calcularías el 20 % de 45 si la tecla del cero está estropeada?



2 ¿Qué tanto por ciento del total representan las piezas de cada color?



Repasa la unidad

Organiza tus Ideas

Porcentajes y proporcionalidad

porcentaje

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3$$

Se lee *treinta por ciento*.

porcentaje de una cantidad

25 % de 60

- $25 \times 60 : 100 = 15$
- $60 : 100 \times 25 = 15$

magnitudes proporcionales

Aumentan o disminuyen en la misma proporción.

5 ×	n.º de entradas	1	2	3	: 5
	precio (€)	5	10	15	

reducción a la unidad

tiempo (min)	2	1	5
distancia (m)	150	75	375

tiempo (min) distancia (m)

$$\frac{2}{5} = \frac{150}{?}$$

$$? = 5 \times 150 : 2 = 375$$

la escala

1:50

Una unidad en el mapa son 50 unidades en la realidad.

- 1 Escribe el porcentaje que representa cada una de estas cantidades.

$\frac{2}{8}$

$\frac{9}{10}$

$\frac{2}{5}$

0,55

0,06

- 2 Calcula el resultado en tu cuaderno.

a) 35 % de 130

b) 81 % de 27

c) 46 % de 254

- 3 ¿Qué porcentaje se ha aplicado en cada caso?

... % de 42 = 21

... % de 128 = 96

Problemas

- 4 ¿Cuál es la diferencia de precio al comprar los 3 paquetes?



- 5 Un grifo tarda 6 h en llenar un depósito de 300 ℓ de capacidad. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 650 ℓ?

Vocabulario matemático

- 6 Utiliza la escala para expresar esta afirmación:

La distancia real es 100.000 veces la distancia medida en el mapa.

Repasa las unidades

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12

- 1 Resuelve y ordena los resultados de mayor a menor.

a) $145.961 - (52.014 - 427)$

b) $(23.841 + 1.057) \times 4$

c) $80.258 + 22.143 - 15.632$

- 2 Indica cuál de estas divisiones es exacta.

$3.082 : 12$

$2.417 : 17$

- 3 Expresa como potencias de base 10.

100.000.000

10.000

10.000.000

- 4 Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de estos números.

6, 9 y 12

5, 10 y 30

- 5 Expresa como fracción irreducible el resultado de esta operación.

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6}\right) : \frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$$

- 6 Copia y completa estas expresiones con todos los números con 2 cifras decimales que faltan.

$0,4 > \dots > 0,39$

$5,61 < \dots < 5,62$

- 7 Halla los cocientes de estas divisiones y redóndéalos a la unidad.

$24 : 7,5$

$6 : 0,15$

$37,62 : 18$

- 8 Resuelve estas operaciones.

a) $(2,1 \times 6) : 5$

b) $(5,3 - 3,02) : 10$

c) $72 : (20 - 19,6)$

- 9 Completa en tu cuaderno.

precio inicial (€)	descuento	rebaja (€)	precio final (€)
120	45 %
24,60	32 %
270,30	16 %

Problemas

- 10 La familia de Ramón ha medido y marcado su estatura según ha crecido.



a) ¿Cuánto creció entre los 4 y los 7 años?

b) Si ahora tiene 11 años y ha crecido un 40 % respecto a cuando tenía 4, ¿cuánto mide?

c) ¿Cuánto ha crecido en los 4 últimos años?

- 11 Inma quiere viajar en coche entre dos ciudades y mide la distancia en línea recta en el mapa.



a) Si la distancia medida es de 4 cm, ¿cuántos kilómetros hay en la realidad?

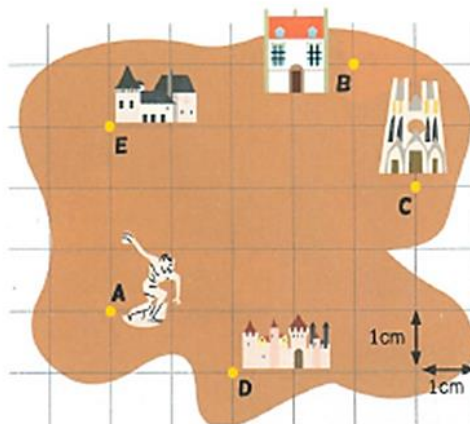
c) La distancia que recorrerá Inma por carretera, ¿será mayor o menor que la calculada a partir de su medida? Explica tu respuesta.

Ponte a prueba

6

Observa y decide

- 1 Claudia quiere visitar estos lugares durante sus vacaciones.
 - a) Si hay 27 km entre los puntos A y E en la realidad, ¿cuál es la escala del mapa?
 - b) Dibuja en tu cuaderno una ruta que empiece y termine en A, que recorra las líneas de la cuadrícula y que pase por todos los puntos. ¿Cuántos kilómetros mide en la realidad?
 - c) Claudia reparte las visitas en 2 días. Cada día sale de C y vuelve a C. Dibuja la ruta de cada día en tu cuaderno y calcula su longitud real.
 - d) ¿Qué opción te parece mejor, un único recorrido o dividir las visitas en 2 rutas? Razona tu respuesta.



Tarea final El mapa autonómico

- PASO 1** Haced grupos de 3 y distribuid los 17 comunidades autónomas y las 2 ciudades autónomas.



- PASO 2** Ayudaos de un atlas y completad una tabla como esta con los datos de las autonomías que os han correspondido.

autonomía	n.º de habitantes	superficie (km²)
...

- PASO 3** Averiguad la población y la superficie total del país. Después, calculad el porcentaje de cada autonomía.

- PASO 4** Compartid los cálculos con toda la clase. ¿Es proporcional la superficie de cada autonomía y su número de habitantes?

- PASO 5** Dibujad las siluetas de las autonomías. Poned en práctica vuestra capacidad espacial y completad el mapa.



ANEXO II. Guía. Tablas de componentes e indicadores de idoneidad

Tabla 1. Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémico-ecológica

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica (el contenido)			
Sub-componentes	Indicadores	Valoración (0-1-2)	Observaciones
Componente: Significados			
Problemas	– Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar las nociones de magnitudes proporcionales, proporcionalidad y porcentajes (involucra resolver y formular problemas)		
	– Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas (de valor faltante, comparación, tabulares...) que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de proporcionalidad y porcentajes.		
	– Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas y otras que las trabajen de forma simultánea.		
	– La relación multiplicativa en situaciones proporcionales se hace explícita en diferentes tipos de problemas.		
	– Las situaciones involucran el uso de razones internas (dentro de la misma magnitud) y externas (entre magnitudes diferentes).		
	– Se proponen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional.		
	– Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la proporcionalidad y los porcentajes.		
Lenguajes	– Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a los que se dirige.		
	– Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y utilidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas en el tema de proporcionalidad		
	– Se fomenta que los alumnos manejen, construyan e interpreten diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.		
	– Se usan representaciones adecuadas que permiten distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen dentro de las magnitudes proporcionales y entre dichas magnitudes.		
Conceptos	– Se presentan de manera clara y correcta los conceptos fundamentales de la proporcionalidad y los porcentajes para el nivel educativo correspondiente, distinguiendo la relación proporcionalidad directa entre magnitudes y los conceptos involucrados (proporcionalidad directa entre magnitudes, covarianza de cantidades, invarianza de la razón, constante de proporcionalidad).		

	– Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer y aplicar las definiciones de proporcionalidad y porcentaje.		
	– Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales.		
	– Se define con claridad la naturaleza proporcional en el porcentaje.		
Proposiciones	– Se presentan las proposiciones fundamentales del tema de proporcionalidad de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.		
	– Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir una situación proporcional.		
	– Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o aplicar propiedades de las magnitudes directamente proporcionales y los porcentajes.		
Procedimientos	– Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad (estrategias aritméticas, reducción a la unidad, regla de tres/ecuación proporcional).		
	– Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar (decidir si son adecuados) procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.		
Argumentos	– Las proposiciones y procedimientos en relación a la proporcionalidad y cálculo de porcentajes se argumentan y justifican de forma adecuada al nivel educativo.		
	– Se emplean diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba en la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas del tema de proporcionalidad.		
Componente: Relaciones			
	– Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales en general.		
	– Se hace explícita la relación con las magnitudes (los valores numéricos que intervienen en situaciones de proporcionalidad son medidas de cantidades de magnitudes)		
	– Se identifican, articulan y desarrollan los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico; mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.		
	– Los porcentajes aparecen vinculados con la proporcionalidad y se identifican sus distintos significados: número, relación parte-todo, relación parte-parte, operador.		
Componente: Procesos			
Comunicación, argumentación	– Se promueven diversas situaciones de proporcionalidad directa donde el alumno tenga		

	que argumentar y formular conjeturas (describir, explicar, verificar) sobre relaciones de proporcionalidad, investigarlas y justificarlas.		
Modelización	<ul style="list-style-type: none"> - Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar el modelo matemático de la función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas (identificar, seleccionar características de una situación, representarlas simbólicamente, analizar y razonar el modelo, las características de la situación, la precisión y limitaciones del modelo). - Se plantean situaciones que permitan al alumno utilizar los porcentajes para representar y comprender relaciones cuantitativas 		
Generalización	- Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan oportunidad de describir, explicar y hacer generalizaciones y conjeturas sobre secuencias numéricas, mediante el uso del registro tabular o incluso mediante la función lineal $y=kx$.		
Componentes de la idoneidad ecológica			
Adaptación al currículo	Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares		
Conexiones intra e inter-disciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares (temas transversales, historia de la matemática, otros)		
Conflictos epistémicos¹			

¹ Con el análisis de los distintos componentes de la faceta epistémica, indica en este espacio los conflictos de tipo epistémico que has encontrado (por ejemplo, si los contenidos, situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, lenguaje etc. en relación a la proporcionalidad y los porcentajes se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones, ambigüedades; se explicitan las condiciones que motivan la condición de proporcionalidad directa o la relación de los porcentajes con la proporcionalidad)

Tabla 2- Componentes e indicadores de idoneidad cognitivo-afectiva

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad cognitiva			
Componente	Indicadores	Valoración (0-1-2)	Observaciones
Conocimientos previos	-Se contemplan los conocimientos previos (fracciones, equivalencia de fracciones, medida de magnitudes) necesarios de acuerdo con el nivel educativo.		
	-Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.		
Diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.		
	-Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas (de construcción progresiva, aditivas, multiplicativas etc.).		
Progresión en la dificultad de aprendizaje	-Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (que involucren números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad entre cantidades, que se altere el orden de los datos en los problemas)		
	- Se advierte de posibles errores tanto conceptuales como procedimentales: ilusión de linealidad (asumir una situación en el que se conocen tres valores y se desconoce uno como de proporcionalidad directa), asumir como suficientes condiciones necesarias (a más...más..., relaciones doble o mitad), realizar operaciones al azar, usar estrategias aditivas erróneas).		
Evaluación	-Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.		
	-Los modos de evaluación incluidos son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental, etc.).		
Componentes e indicadores de idoneidad afectiva			
Actitudes	-Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.		
Emociones	-Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, adivinanzas etc.		
	-Se potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.		
Valores	-Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.		
Conflictos cognitivos²			

² Con el análisis de los distintos componentes (conocimientos previos, diferencias individuales, progresión en la dificultad de aprendizaje, evaluación) de la faceta cognitiva, indica en este espacio los conflictos de tipo cognitivo que has encontrado.

Tabla 3- Componentes e indicadores de idoneidad instruccional

Componentes e indicadores de idoneidad interaccional-mediacional			
Componente	Indicadores	Valoración (0-1-2)	Observaciones
Interacción autor→alumno	-El autor hace una presentación adecuada del tema: presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema ³		
	Se promueven situaciones donde se busque llegar a consenso con base al mejor argumento.		
	Se usan diversos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.		
Interacciones alumnos	-Se proponen tareas que favorecen el diálogo, comunicación y debate entre los estudiantes en las que se expliquen, justifiquen y cuestionen diferentes soluciones o puntos de vista, utilizando argumentos matemáticos.		
Autonomía	-Se plantean momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio: plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.		
Recursos-materiales	-Se promueve el uso de materiales manipulativos (escalímetro, el pantógrafo, el compás de proporción) audiovisuales e informáticos (Geogebra, Excel...).		
	Se emplean modelos concretos y visualizaciones para introducir conceptos y propiedades.		
	-Se explicitan las fuentes usadas y son diversas		
Secuenciación	La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada, dedicando el espacio suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión ⁴ .		
Conflictos instruccionales⁵			

³ **Se consideran puntos claves del tema, por ejemplo:** relación de proporcionalidad directa entre magnitudes, simetría de la relación de proporcionalidad, existencia de la constante de proporcionalidad, diferencia entre situación de proporcionalidad, procedimientos para resolver las situaciones y sistemas de representación empleados y situaciones de proporcionalidad, el porcentaje como expresión de proporciones

⁴ **En una secuencia adecuada de la proporcionalidad:** Se inicia el estudio de la proporcionalidad con experiencias intuitivas correspondientes a una aproximación cualitativa de la proporcionalidad, que pueden referir a tareas de estimación. A continuación, se considera el enfoque cuantitativo buscando el progreso del pensamiento aditivo al multiplicativo. Se retrasa la introducción de la regla de tres hasta que los alumnos han adquirido suficiente experiencia en el tema.

⁵ Con el análisis de los distintos componentes de la faceta instruccional (interaccional-mediacional), indica en este espacio los conflictos de tipo instruccional que has encontrado.

2. Análisis a priori de la lección analizada en el primer ciclo con futuros maestros

de primaria

Tabla 1.

Valoración de la idoneidad epistémica y frecuencia de equipos según nivel de pertinencia (n=13)

Indicadores	Nivel de cumplimiento. Justificación	Nivel de pertinencia		
		NP	PP	P
Situaciones-problemas				
I1. Se incluyen problemas para introducir, desarrollar y aplicar las nociones teóricas.	Parcial. No existen situaciones que permitan desarrollar claramente las nociones teóricas.	4	9	0
I2. Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas contextualizadas y de aplicación.	Parcial. La mayoría de las tareas son de valor faltante, no hay de comparación.	4	8	1
I3. Existen situaciones para distinguir comparaciones multiplicativas y aditivas.	Nulo. No hay situaciones aditivas, ni que permitan distinguir las comparaciones.	8	4	1
I4. La relación multiplicativa se hace explícita en diferentes tipos de problemas.	Parcial. La relación se hace explícita únicamente en los ejemplos introductorios.	10	2	1
I5. Las situaciones usan coordinadamente razones <i>internas</i> y <i>externas</i> .	Parcial en C1. No explícitamente. Nulo en C2 y C3. Solo internas en C2 y sólo externas en C3.	12	1	0
I6. Existen situaciones proporcionales de cálculo mental.	Nulo. No se proponen este tipo de situaciones.	5	6	2
I7. Se promueve que el alumno plantee problemas relacionados con la proporcionalidad.	Parcial en C1 y C2. Se promueve únicamente en las tareas (21, 27). Nulo en C3. No se promueve.	9	4	0
Lenguajes				
I8. Se utilizan diferentes tipos de representación, analizando su pertinencia y realizando procesos de traducción.	Parcial. No se analiza su pertinencia, algunas expresiones son incorrectas, y los procesos de traducción son escasos.	3	10	0
I9. Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.	Total. El nivel del lenguaje es adecuado.	1	1	11
I10. Se fomenta que los alumnos utilicen e interpreten diferentes representaciones.	Parcial. No aparecen involucradas proporciones ni expresiones fraccionarias.	9	2	2
I11. Se usan representaciones adecuadas para distinguir relaciones multiplicativas <i>dentro</i> y <i>entre</i> las magnitudes proporcionales.	Parcial en C1. Uso de diagramas y tablas, para relaciones <i>dentro</i> y <i>entre</i> las magnitudes, respectivamente. Nulo en C2 y C3. En C2 sólo relaciones <i>dentro</i> , en C3 ninguna.	13	0	0
Conceptos				
I12. Se presentan de manera clara los conceptos fundamentales.	Nulo. Sólo se define magnitud de modo genérico.	10	3	0
I13. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que reconocer, generar, aplicar definiciones.	Parcial. Sólo se promueve al pedir explicar el significado de ejemplos de escalas.	8	5	0

I14. Se define claramente la naturaleza multiplicativa existente entre cantidades de magnitudes.	Nulo. La relación de proporcionalidad entre magnitudes se establece a partir de las tablas, siendo poco clara.	11	2	0
Proposiciones				
I15. Se presentan las proposiciones fundamentales de forma clara y correcta y se adaptan al nivel educativo al que se dirigen.	Nulo. Faltan proposiciones que precisen la condición de regularidad y la relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes.	12	1	0
I16. Se establecen las proposiciones suficientes y necesarias para distinguir la situación proporcional.	Nulo. No se presentan de manera clara, en las tareas se deben asumir relaciones de proporcionalidad.	11	2	0
I17. Se proponen situaciones para generar o aplicar propiedades de las magnitudes proporcionales.	Parcial. Se proponen tareas para aplicar algunas propiedades, pero no para generarlas.	12	1	0
Procedimientos				
I18. Se presentan de manera clara y correcta los procedimientos fundamentales de proporcionalidad.	Parcial. La reducción a la unidad y regla de tres se reducen a aplicación de pasos mecanizados.	11	2	0
I19. Se proponen situaciones para generar o negociar procedimientos característicos de situaciones de proporcionalidad.	Nulo. Las tareas son de aplicación de procedimientos aritméticos por medio de tablas o equivalencia de fracciones, los mismos no se negocian.	12	1	0
Argumentos				
I20. Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan de forma adecuada.	Nulo. No hay argumentación y la escasa explicación se hace por medio de ejemplos particulares.	8	3	2
I21. Se favorece la justificación de enunciados y proposiciones mediante diversos tipos de razonamientos.	Nulo. No se justifican los enunciados, la justificación de los procedimientos se basa en las operaciones aritméticas empleadas.	5	1	7
Relaciones				
I22. Se establecen relaciones del tema de proporcionalidad con las fracciones y números racionales.	Nulo. Se usan decimales y fracciones equivalentes sin vincular a los números racionales.	10	3	0
I23. Se explicita la relación entre el bloque aritmético y de magnitudes.	Nulo. Sólo aparecen razones entre números.	10	3	0
I24. Se identifican, articulan y desarrollan los enfoques: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico.	Nulo. Predomina el enfoque aritmético, incluso en el tratamiento de escalas (en C3).	9	4	0
Procesos				
I25. Existen situaciones para argumentar, conjeturar sobre relaciones proporcionales.	Nulo. En las tareas no se solicita investigar o argumentar cómo se relacionan las cantidades de magnitudes.	2	9	2
I26. Se usa el modelo de función lineal para representar y comprender relaciones cuantitativas.	Nulo. No se describe ni emplea la función lineal.	7	5	1
I27. Existen situaciones para explicar, generalizar y conjeturar sobre patrones y usar expresiones algebraicas (función lineal).	Nulo. No se reflexiona sobre el carácter general que caracteriza a las cantidades de magnitudes proporcionales.	9	4	0
I28. Los contenidos se presentan de forma correcta sin errores.	Parcial. Existen ambigüedades conceptuales y procedimentales.	8	5	0

Nota: NP nada pertinente, PP poco pertinente, P pertinente.

Tabla 2.

Valoración de la idoneidad cognitiva, frecuencia de equipos por nivel de pertinencia (n=13)

Indicadores	Nivel de cumplimiento y justificación	Valoración		
		NP	PP	P
Conocimientos previos				
I29. Se contemplan los conocimientos previos necesarios.	Parcial. Únicamente se incluye una nota "ten en cuenta" sobre magnitud.	13	0	0
I30. Los contenidos pretendidos tienen una dificultad manejable.	Parcial. Algunas situaciones planteadas al alumno pueden resultar difíciles.	12	1	0
Diferencias individuales				
I31. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	Nulo. No se proponen actividades de ampliación ni refuerzo.	4	7	2
I32. Se promueve el acceso, logro y apoyo de todos los estudiantes, se usan diversas estrategias correctas.	Nulo. No se usan diversas estrategias, los procedimientos se basa en pasos mecanizados.	4	1	8
Conflictos cognitivos				
I33. Las situaciones poseen diferentes niveles de dificultad.	Total. Las tareas contemplan diferentes datos numéricos (enteros, no enteros y con diferentes relaciones de divisibilidad).	5	8	0
I34. Se advierte de errores y dificultades conceptuales y procedimentales.	Nulo en C1 y C3. No se advierten. Parcial en C2. Se advierte en una nota que las magnitudes deben ser proporcionales para poder aplicar los procedimientos correspondientes.	2	3	8

Nota: NP nada pertinente, PP poco pertinente, P pertinente.

Tabla 3.

Valoración de la idoneidad instruccional, frecuencia de equipos por nivel de pertinencia (n=13)

Indicadores	Nivel de cumplimiento y justificación	Valoración		
		0	1	2
Interacción autor-alumno				
I35. El autor hace una presentación clara y organizada del tema, enfatizando conceptos claves, etc.	Parcial. No hay énfasis en conceptos claves, algunos enunciados son incompletos resultando poco claros.	2	9	2
I36. Existen situaciones para consensuar según el mejor argumento.	Nulo. Aunque hay tareas para resolver en parejas, no se promueve la variedad y consenso argumentativo.	3	0	10
I37. Se usan diversos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	Nulo. Aunque se usan notas “ten en cuenta”, su contenido no capta el interés y los argumentos son escasos.	1	2	10
Interacciones alumnos				
I38. Existen tareas que fomenten el diálogo, comunicación, debate entre los estudiantes donde expliquen, justifiquen, cuestionen.	Nulo. Aunque algunas tareas son en parejas, no fomentan el diálogo, comunicación o debate de ideas, ni la justificación de las respuestas.	2	3	8
Autonomía				
I39. Existen momentos para que el alumno asuma la responsabilidad del estudio: plantee cuestiones, presente soluciones; explore, investigue, razone, conecte...	Nulo. Hay escasos momentos en los que los alumnos asumen la responsabilidad del estudio; sólo al resolver las actividades propuestas. Sólo en dos tareas deben explorar ejemplos de magnitudes proporcionales.	1	5	7
Recursos materiales				
I40. Se promueve usar material manipulativo, audiovisual e informático.	Nulo. Únicamente el uso de regla, cuadrícula en C3 y de recursos informáticos en C1.	2	4	7
I41. Las definiciones y propiedades se contextualizan usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones.	Parcial. Existen tareas contextualizadas y visualizaciones, pero no se usan modelos concretos.	6	7	0
I42. Se explicitan las fuentes usadas y son diversas.	Nulo. No se explicitan las fuentes usadas.	1	0	12
Secuenciación				
I43. La secuenciación de contenidos y actividades es adecuada.	Nulo. Aunque hay ejemplos, estos enfatizan la comprensión procedimental sobre la conceptual, no hay una aproximación intuitiva, la regla de tres se propone en el mismo apartado de reducción a la unidad.	6	5	2

Tabla 4.

Valoración de la idoneidad ecológica, frecuencia de equipos por nivel de pertinencia (n=13)

Indicador	Nivel de cumplimiento. Justificación	Valoración		
Adaptación al currículo		0	1	2
I44. Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	Parcial. No se abordan todos los estándares de aprendizaje (MECD, 2014).	11	0	2
Apertura a la innovación				
I45. Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	Nulo. Sólo al proponer el uso de una página web o resolver problemas.	1	8	4
Adaptación socio-profesional				
I46. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional.	Total. Sí ya que las tareas involucran precios de objetos, recetas, juegos, interpretación de planos, mapas...	1	1	11
Educación en valores				
I47. Se contempla la formación en valores democráticos, y oportunidades para que los alumnos cuestionen lo aparentemente evidente.	Nulo. No se fomentan los valores, ni oportunidades para cuestionar sobre lo justo (equidad, condiciones de regularidad)	2	4	7
Conexiones intra e interdisciplinarias				
I48. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.	Parcial. Alguna tarea implica relaciones con física (velocidad). Conexión con geometría y medida.	5	7	1

Tabla 5.

Valoración de la idoneidad afectiva, frecuencia de equipos por nivel de pertinencia (n=13)

Indicador	Nivel de cumplimiento. Justificación	Valoración		
Actitudes		0	1	2
I49. Se promueve la participación activa, perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.	Parcial. Sólo se promueve la participación en la resolución de tareas al final de la lección.	1	9	3
I50. Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos de resolución de problemas.	Nulo. Aunque una tarea se debe resolver aplicando dos procedimientos, estos se pautaron previamente.	4	0	9
Emociones				
I51. Existen elementos motivadores ilustraciones, adivinanzas, humor...	Parcial. Sólo ilustraciones y tareas contextualizadas.	2	3	8
I52. Se fomentan los razonamientos lógicos, las ideas originales.	Nulo. La presentación de la teoría seguida de ejercitación no lo permite.	4	6	3
I53. Existen espacios para expresar las emociones hacia las situaciones.	Nulo. No se programan estos espacios.	1	0	12
Creencias				
I54. Se consideran las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.	Nulo. No se consideran.	6	0	7
Valores				
I55. Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	Parcial. Las situaciones contextualizadas permiten valorar su utilidad, pero no sus cualidades de estética o precisión.	5	2	6

3. Publicaciones vinculadas con la tesis doctoral

3.1. Artículos de revistas

Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 34(2) (en prensa).

Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022b). Identificación de conflictos semióticos en una lección de proporcionalidad por maestros en formación. *Revemop*, 4, e202204.
<https://doi.org/10.33532/revemop.e202204>

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA*, 18(6), em2121.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022b). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, en prensa.

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022c). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, 36(72), 555–579.
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021b). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *ACTA SCIENTIAE*, 23(4), 169–206.
<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, 34(2), 39–71.
<https://doi.org/10.24844/EM3402.02>

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787.

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022c). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>

3.2. Actas en congresos científicos

Burgos, M., Castillo, M. J. y Godino, J. D. (2020). Formación de profesores de matemáticas en el análisis de libros de texto. *ALME Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 534–546.

Castillo, M. J. y Burgos, M. (en prensa). Competencia reflexiva en futuros profesores de matemáticas mediante el análisis de lecciones de libros de texto. En XX (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (en prensa) SEIEM.

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021a). Evaluación de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre análisis de libros de texto. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 197–204). SEIEM.

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Formación de maestros en el análisis didáctico de lecciones de libros de texto de matemáticas. *ALME Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 34(2), (364–375).

3.3. Criterios de calidad de las publicaciones

La tesis doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de agrupación de publicaciones. Cada una de estas cumplen con los indicios de calidad requeridos

por el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada²⁸ como se detalla a continuación.

- 1) Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022a). Developing reflective competence in preservice teachers by analysing textbook lessons: the case of proportionality. *Mathematics Teaching Research Journal*, 34(2) (en prensa).

Indicios de calidad de la revista *Mathematics Teaching Research Journal*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 1277/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.211).
 - b) Índice de impacto SJR (2021): 0.15 (Q4, Education).
- 2) Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022a). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>

Indicios de calidad de la revista *EURASIA*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 181/1406 Social Sciences (Education), SNIP (1.424).
 - b) Índice de impacto SJR (2021): 0.57 (Q2, Education).
 - c) La revista también está indexada en: IBZ Online, ERIC (Education Resources Information Center), Psycinfo.
- 3) Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022b). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad en libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA*, (en prensa).

Indicios de calidad de la revista *PNA*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 961/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.501).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.25 (Q3, Education).
- c) La revista también está indexada en: Emerging Sources Citation Index, Academic Search Premier, Fuente Académica Plus, DOAJ, Educational research abstracts

²⁸ Para las tesis en formato de compilación de artículos al menos tres de los artículos deben estar indexados en Scopus y con índice de impacto en SCImago Journal Rank (SJR).

(ERA), ERIC (Education Resources Information Center), Psicodoc, DIALNET, LATINDEX, REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico).

- 4) Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022c). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema*, 36(72), 555–579. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>

Indicios de calidad de la revista *Bolema*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 1080/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.741).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.32 (Q3, Education)
- c) La revista también está indexada en: LATINDEX, ERIC (Education Resources Information Center).

- 5) Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021b). Prospective High School Mathematics Teachers' Assessment of the Epistemic Suitability of a Textbook Proportionality Lesson. *ACTA SCIENTIAE*, 23(4), 169–206. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6552>

Indicios de calidad de la revista *ACTA SCIENTIAE*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 1193/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.535).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.21 (Q3, Education).
- c) La revista también está indexada en: LATINDEX, REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico).

- 6) Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Revista Educación Matemática*, 34(2), 39–71. <https://doi.org/10.24844/EM3402.02>

Indicios de calidad de la revista *Educación Matemática*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 1072/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.906).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.25 (Q3, Education).

c) La revista también está indexada en: DIALNET, LATINDEX.

- 7) Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787.

Indicios de calidad de la revista *Educação e Pesquisa*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 1009/1406 Social Sciences (Education), SNIP (0.742).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.24 (Q3, Education).
- c) La revista también está indexada en: CARHUS PLUS+, LATINDEX, ERIHPlus, DOAJ, EBSCO Education Source, Educational research abstracts (ERA), Political Science Complete, Psycodoc, DIALNET.

- 8) Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022c). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), e15399. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>

Indicios de calidad de la revista *Uniciencia*:

- a) Indexada en Scopus. Posición 161/264 General Social Sciences, SNIP (0.324).
- b) Índice de impacto SJR (2021): 0.17 (Q3, Social Sciences).
- c) La revista también está indexada en: Emerging Sources Citation Index, DOAJ, Aquatic Science & Fisheries Abstracts (ASFA), DIALNET, LATINDEX, ERIHPlus, REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y conocimiento científico).