Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente
Ciudad Universitaria Carlos Monge Alfaro
Departamento de Ciencias Naturales
Sección de Matemática

Memoria del Seminario de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Unidad Didáctica para el abordaje del tema Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada Costarricense, aplicando resolución de problemas y tecnología.

Araya Benavides Wendy
Jiménez Moscoso Jéssica
Moya Fernández Adrián

2017

Memoria del Seminario de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Unidad Didáctica para el abordaje del tema Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada Costarricense, aplicando resolución de problemas y tecnología.

PRESIDENTE DEL TRIBUNAL

Lic. Carlos Bonilla Flores

MIEMBRO DEL TRIBUNAL

Lic. Carlos Márquez Rivera

DIRECTOR DEL TRABAJO

Dr. José David Campos Fernández

LECTOR

M.Sc Bolivar Alonso Ramírez Santamaría

LECTOR

Lic. Carlos Manuel Ulate Ramírez

ESTUDIANTES

Wendy María Araya Benavides

Jéssica de los Angeles Jiménez Moscoso

José Adrián Moya Fernández

Agradecimiento

Agradecemos a nuestro director por aceptar la responsabilidad de guiarnos en todo el proceso. A los lectores por leer el documento y por las observaciones realizadas. A los docentes de secundaria por la anuencia en el proceso de las entrevistas y a las instituciones por brindarnos apoyo en la aplicación de la unidad didáctica. Y por último a los compañeros de trabajo por el apoyo.

Dedicatoria

A mi familia por el apoyo en la realización del trabajo.

Wendy

Primero a Dios por permitirme terminar una etapa más en mi vida profesional. a mi esposo, a mis hijos y a mis padres por estar siempre a mi lado.

Jéssica

A todas las personas que colaboraron de alguna manera en el desarrollo de este trabajo.

Adrián

Índice general

1. Antecedentes **7**

2. Marco Teórico **12**

2.1. Geometría Analítica 12

2.1.1. Aportes de René Descartes y Pierre Fermat 14

2.2. Resolución de problemas 18

2.3. Uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática . 22

2.4. Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría 25

2.4.1. Principio Globalizador e interdisciplinar 28

2.4.2. Integración del conocimiento 30

2.4.3. Contextualización del conocimiento 34

2.4.4. Principio de Flexibilidad 38

2.4.5. Aprendizaje por descubrimiento 40

2.4.6. Innovación de estrategias metodológicas 42

2.5. El uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría 45

2.6. GeoGebra 46

2.7. Unidad Didáctica 48

3. Marco Metodológico **49**

3.1. Tipo de Investigación 49

3.1.1. Primera Fase: Diseño del proyecto de investigación 50

3.1.2. Segunda Fase: Elaboración de la Unidad Didáctica 52

3.1.3. Tercera Fase: Aplicación de la Unidad Didáctica 53

3.1.4. Cuarta Fase: Análisis de los resultados 54

4. Análisis de los resultados **56**

4.1. Análisis Reforma Educativa 56

4.2. Análisis libros de texto 65

4.3. Dificultades presentes en la enseñanza del tema de Geometría Analítica en Décimo año 73

4.4. Análisis Entrevistas Aplicadas 77

4.5. Análisis de los resultados obtenidos en los diagnósticos aplicados a los estudiantes 81

4.6. Análisis de los resultados de la encuesta dirigida a los discentes 81

4.7. Datos recabados en la guía de observación de los profesores colaboradores 83

5. Conclusiones, recomendaciones y limitaciones **84**

5.1. Conclusiones 84

5.2. Recomendaciones 86

5.3. Limitaciones 86

6. Bibliografía **87**

7. Anexos **96**

7.1. Unidad Didáctica 96

7.2. Entrevista a Docentes de Secundaria de la Región Occidente 238

7.3. Guía de observación para la aplicación 244

7.4. Cuestionario a estudiantes 248

7.5. Diagnóstico para estudiantes 249

Resumen

Unidad didáctica para el abordaje del tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada, aplicando resolución de problemas y tecnología

Tesis que pretende estudiar cualitativamente el comportamiento tanto del docente como el discente al aplicar la estrategia didáctica de resolución de problemas incorporando el uso del programa dinámico denominado GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica para décimo año de la educación diversificada costarricense. a partir de la creación e implementación de una unidad didáctica.

En el capítulo uno se hace referencia a los antecedentes, es decir, a las distintas investigaciones relacionadas con la forma de abordar el tema de Geometría Analítica en secundaria.

Para el capítulo dos se aborda el marco teórico en el cual se tienen seis apartados, en el primer apartado se analiza la Geometría Analítica y se crea un subapartado con historia "Aportes de René Descartes y Pierre Fermat". Como segundo apartado se estudia la resolución de problemas, en el tercer punto se investiga sobre el uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática.

El cuarto apartado refiere a la Enseñanza de la Geometría: Dificultades, consideraciones didácticas por tener en cuenta, importancia de la geometría dinámica, influencia en el conocimiento geométrico, evaluación del conocimiento geométrico, además se desarrollan seis principios fundamentales para la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría como subapartados: Principio Globalizador e interdisciplinar, integración del conocimiento, contextualización del conocimiento, principio de flexibilidad, aprendizaje por descubrimiento e innovación de estrategias metodológicas. Principios sobre los cuales

hemos basado el presente trabajo.

Como un quinto punto se desarrolla el uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y cómo al relacionar el uso de herramientas tecnológicas con la metodología de resolución de problemas se logran subsanar las dificultades expuestas en el presente trabajo. Por último se investiga sobre la definición de unidad didáctica y se crea una definición propia.

Para el capítulo tres se desarrolla el marco metodológico, sección en la que se establece el tipo de investigación y las distintas fases en las que se desarrolló el trabajo: Diseño del proyecto de investigación, elaboración de la unidad didáctica, aplicación de la unidad didáctica y el análisis de los resultados.

Para el cuarto capítulo se crea el análisis de resultados: Análisis de la reforma educativa, análisis de los libros de texto, dificultades presentes en el tema de Geometría Analítica en décimo año, análisis de las entrevistas aplicadas, análisis de los resultados obtenidos en los diagnósticos aplicados a los estudiantes. análisis de los resultados de la encuesta dirigida a los discentes y por último análisis de los datos recabados en la guía de observación de los profesores colaboradores.

En el capítulo cinco se tienen conclusiones, recomendaciones y limitaciones. que se determinaron a lo largo del desarrollo del presente trabajo, en el capítulo seis se presentan los anexos: La unidad didáctica elaborada, la entrevista aplicada a los docentes de secundaria de la región de occidente, la guía de observación que llenaron los profesores colaboradores durante la aplicación de la unidad didáctica, el cuestionario aplicado a los discentes para determinar el grado de satisfacción con la metodología empleada y el diagnóstico que se aplicó a los estudiantes previo a la aplicación de la unidad didáctica para determinar el grado de conocimiento sobre los temas de Geometría Analítica. Por último el capítulo siete contiene la bibliografía consultada para el desarrollo del trabajo.

Unidad Didáctica para el abordaje del tema Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada, aplicando resolución de problemas y tecnología

Problema:

¿De qué manera se puede implementar la tecnología en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría Analítica en Educación Diversificada costarricense, desde un enfoque de resolución de problemas?

Objetivo General:

- Diseñar una unidad didáctica para el tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada. que involucre resolución de problemas y la tecnología, para contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Objetivos Específicos:

- Identificar los fundamentos teóricos del enfoque de resolución de problemas, en los programas de Matemática vigentes (2015), para determinar su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- Analizar la metodología empleada por los libros de texto publicados a partir del año 2016 para el abordaje del tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada costarricense.
- Identificar las dificultades presentes en la enseñanza del tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada costarricense.

- Elaborar la unidad didáctica para el tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada costarricense, que involucre resolución de problemas y tecnología.

- Ejecutar la unidad didáctica para el tema de Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada costarricense, que involucre resolución de problemas y tecnología.

Justificación del Tema

Actualmente la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria costarricense utiliza la metodología basada en la Resolución de Problemas, la cual fue implementada por el Ministerio de Educación Pública (M.E.P) en el año 2012, con el objetivo que los estudiantes comprendan la aplicación de la teoría dentro del aula en un contexto real, para incentivar el interés por aprender y descubrir nuevas aplicaciones de la Matemática, como lo argumenta el Ministerio de Educación Pública (2012)

> En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (p. 122).

Con esta metodología se pretende lograr que los estudiantes razonen y puedan aplicar la teoría en contextos reales, lo cual hará la clase más atractiva e interesante para algunos jóvenes, principalmente para los que siempre se cuestionan su utilidad en la sociedad.

Uno de los cambios que establecen los programas de estudio corresponde a la incorporación de la Geometría Analítica, es así como la presente investigación se elaborará una Unidad Didáctica para el abordaje de dicho tema, como lo menciona González (2007) "La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra" (p. 205).

Es relevante mencionar que los contenidos referentes a Geometría Analítica se en-

contraban ausentes en los anteriores programas de estudio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, por tal motivo el material didáctico disponible para los docentes es limitado, tanto en libros de texto como en diferentes publicaciones de autores, lo cual conlleva a que estos no posean las herramientas necesarias para preparar sus clases, teniendo en cuenta que se debe abordar con una metodología que para muchos es nueva y diferente. En esta investigación se ha indagado trabajos afines en este campo, y los resultados arrojan publicaciones y proyectos en Geometría y uso de tecnología, que no puntualizan los contenidos de Geometría Analítica, como se refleja en el apartado de antecedentes.

Asimismo, la importancia de la Geometría en la sociedad es una situación que los estudiantes necesitan comprender, según Baéz e Iglesias citados por Gamboa y Ballestero (2009)

> Los alumnos se encuentran en una encrucijada cuando estudian Geometría, porque el profesor les dice que es importante para su futuro como individuo, pero, el mismo proceso educativo en el que se encuentra inmerso no le permite visualizar esa importancia con suficiente claridad; de manera que el aprendizaje de la Geometría carece de sentido y con el tiempo repercute en su estado anímico (p.118).

En consecuencia, se debe recurrir a recursos que faciliten la comprensión y utilidad de esta área, y con este propósito la tecnología puede jugar un papel importante para cumplir con los requerimientos establecidos en los programas de estudio establecidos en el año 2012. Roger (2009) señala que la tecnología es esencial para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, ya que mejora el proceso de aprendizaje y permite enriquecer los aprendizajes.

Es cierto que la tecnología ya se aplica en las aulas pues el uso de calculadora es constante en secundaria para resolver ecuaciones cuadráticas y operaciones aritméticas, pero el uso de ésta no beneficia en lo que respecta a la clarificación o interiorización de

las ideas y contenidos, pues se limita solamente a agilizar los cálculos, con respecto a esto De Faria (2007) menciona

> La calculadora agiliza los procedimientos algorítmicos. los mecanismos que se llevan a cabo sin ningún razonamiento, por ello, no se debe tener temor en su uso pues de ninguna manera la calculadora atrofia el razonamiento de los estudiantes. La calculadora no resuelve problemas, no piensa ni razona, solamente agiliza los cálculos (p. 121).

La calculadora es una herramienta útil pero no la única, ya que la tecnología va más allá que el utilizar este instrumento, abarca el manejo de software aún más sofisticados que permitan visualizar características físicas de expresiones algebraicas. siendo esta estrategia es una base esencial a la hora de enseñar Matemática.

En este sentido, la tecnología puede ser una herramienta pedagógica significativa para la enseñanza de la Geometría, pues la pizarra muchas veces limita que los estudiantes comprendan los conceptos de la mejor manera, especialmente la Geometría requiere la aplicación de transformaciones y movimientos, los cuales se pueden representar utilizando software y analizar todo lo que conlleva su construcción.

Por otra parte la implementación del paquetes informáticos para el desarrollo de clases dinámicas, Arcavi y Hadas (2000) se refieren a que un ambiente dinámico dentro del aula, además de ayudar en la visualización de propiedades y conceptos matemáticos, permite transformar construcciones de figuras con el fin de estudiar variaciones y conformar bases intuitivas para nuevos conocimientos.

Con respecto a lo anterior, Cassina e Iturbe (2000), citado por Iturbe (2013), hacen referencia a que el mismo software permite validar los resultados y además se puede observar de forma interactiva como cambian las condiciones iniciales si se varían los datos.

Se puede decir que el implementar un software de Geometría dinámica, brinda la

posibilidad de que el alumno explore en forma libre el proceso de solución, promoviendo la búsqueda de relaciones matemáticas, que le permitan lograr un aprendizaje significativo.

Cabe destacar la opinión de Santos Trigo (2007) citado por Iturbe (2013), quien expone "Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del que hacer de los estudiantes quienes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas" (p. 95).

Por lo tanto, queda reflejado que la implementación de la tecnología, en este caso el software educativo es de mucho beneficio para el educando, así como para el docente ya que se le facilita su labor y mejora la calidad del aprendizaje, de esta manera impulsa la metodología de resolución de problemas que es lo exige el Ministerio de Educación Pública actualmente.

Por otro lado, se debe tener presente que el sector docente debe brindar un esfuerzo en la incorporación de problemas en el aula, al ser una estrategia metodológica poco implementada en el país y ubicar la tecnología como una herramienta idónea para esta estrategia, es necesaria la auto preparación.

A partir de las razones ya mencionadas y con el fin de ayudar a mejorar la Enseñanza de la Geometría en décimo año de secundaria, se pretende desarrollar una Unidad Didáctica para el tema de Geometría Analítica, haciendo uso de software de Geometría dinámica, que sea de fácil manejo y una herramienta útil para abordar los contenidos de circunferencia, recta exterior, recta paralela y recta perpendicular, propuestos por el Ministerio de Educación Pública.

Además, como complemento a los contenidos establecidos por el Ministerio de Educación Pública, se incorporará en la Unidad Didáctica el concepto de la elipse y sus componentes, tomando como referencia la circunferencia para su construcción.

Capítulo 1

Antecedentes

A continuación se hará referencia a diferentes investigaciones (trabajos, textos, artículos, libros, revistas, periódicos), que aportan materiales acerca del tema de Geometría Analítica en décimo año de la educación diversificada, aplicando resolución de problemas y tecnología.

El artículo de Lobo (2004), titulado "Aplicación del modelo propuesto en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría" propone un modelo para el abordaje de la Geometría basándose en la teoría de Van Hiele. La autora argumenta que cada área de la Matemática requiere de un razonamiento distinto para ser comprendida de la mejor manera, y especialmente la Geometría requiere de esta distinción.

Como el modelo propuesto por Lobo utiliza como base la teoría de Van Hiele, resulta importante mencionar en qué consiste está, Lobo (2004) argumenta que "El modelo de Van Hiele describe cómo se va modificando la forma de razonar de los individuos mediante cinco niveles de razonamiento, que abarcan desde la visión más simplista de los conceptos geométricos hasta el empleo del razonamiento formal. A su vez, plantea la forma de organizar la enseñanza de acuerdo a fases de aprendizaje que facilitan el progreso en el razonamiento" (p. 2). Además es importante rescatar que dicho modelo establece cinco niveles de razonamiento los cuales son: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor.

El modelo elaborado se aplicó a 40 estudiantes que formaban parte de la Licenciatura en Educación de Mención Básica Integral y que llevaban curso de Geometría, estos se dividieron en dos grupos de los cuales en uno se aplicó la propuesta basada en la teoría de Van Hiele, y en el otro se impartieron clases tradicionales de Geometría; con el fin de comparar y medir los resultados obtenidos al final de la investigación.

Al finalizar el proceso de investigación se llegó a las siguientes condideraciones finales según Lobo (2004):

- Todo docente debe tomar en cuenta el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran los estudiantes.
- Una vez que el docente determine el nivel de razonamiento geométrico en que se encuentran sus alumnos, debe planificar y ejecutar diversas actividades que les permitan avanzar al nivel inmediato superior.
- Para evaluar los contenidos de Geometr ía de acuerdo al modelo de Van Hiele, se deben elaborar los instrumentos de evaluación con ítems que se relacionen con las características de cada uno de los niveles del mismo.
- Al evaluar la aplicación de este modelo en la realidad educativa nacional, se verificó que es muy efectivo para elevar el nivel de razonamiento geométrico de los alumnos (p. 9).

Por otra parte respecto a la utilización de tecnología para la Enseñanza de la Matemática, en particular en la Enseñanza de la Geometría, Sordo (2005) menciona que el Geometer's Sketchpad, es uno de los programas más utilizados en el dibujo de los objetos geométricos y que a partir de este programa se diseño una estrategia didáctica que se ha empleado en la experiencia didáctica. Dicho trabajo, pretende estudiar cualitativamente el comportamiento de una estrategia didáctica que incorpora el uso del programa en la enseñanza aprendizaje de la Geometría.

Sordo, además hace referencia a que "en la sociedad actual es imprescindible manejar objetos matemáticos y relacionarlos con situaciones de la vida corriente. Según progresa el desarrollo cognitivo del alumno éste requiere una Matemáticas más compleja" (p. 16).

Es decir, según el progreso de los conocimientos matemáticos en el alumnado, se pueden ir planteando situaciones más complejas que se relacionen con la vida cotidiana. Por esta razón se podría decir que el uso de tecnología en la enseñanza de la matemática es una buena manera de incentivar al estudiante para obtener mejores resultados en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.

Por otra parte García Armendáriz (2005), citado por Calderón y Camacho (2014), en su trabajo "Mediación pedagógica en el área de la Geometría en sétimo año: estudio en Costa Rica" señalan que "en geometría es fundamental analizar las formas, clasificarlas, idear transformaciones, componer figuras, conocer propiedades de los objetos y estudiar relaciones entre ellos... y no reducir la experiencia en y con el espacio, al cálculo indirecto de áreas y volúmenes, como ha sido frecuente" (p. 178).

Es decir, en la búsqueda de un abordaje idóneo en el tema de Geometría por parte del docente, la metodología de enseñanza influye en la trasmisión del conocimiento, al respecto Gómez y León (2007) en su artículo "Usos matemáticos de Internet para la enseñanza secundaria. Una investigación sobre WebQuests de Geometría", señalan

> La elaboración y proposición de una unidad didáctica de Geometría para alumnos de Secundaria usando el método de WebQuest. Dentro de las conclusiones más importantes que sobresalen son que por sus características el método de WebQuest es un sistema de enseñanza y aprendizaje completamente ajeno a la metodología tradicional. Resultados muy específicos apoyan la afirmación de esta conclusión. En primer lugar, se observó que al aula de clase tradicional se le incluyó ordenadores conectadas en red y con conexión a Internet. Estos cambios permitieron extender el aula más allá de su espacio físico (p. 31).

Continuando con tecnología se presenta el trabajo elaborado por Götte y Scaglia (2008) "Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de

geometría dinámica", trabajo que consistió en la elaboración de una guía hacia los docentes para el abordaje del tema de Geometría en la Educación General Básica, haciendo uso del software matemático GeoGebra, indican "En este trabajo describimos una propuesta de capacitación docente en el uso de un software de Geometría dinámica. Este uso conlleva una reflexión en torno a algunos aspectos de la Enseñanza de la Geometría como la actuación docente en el aula y las características del conocimiento que construye el alumno, que difieren de los correspondientes a un tratamiento más tradicional" (p. 36).

Por otra parte se tiene el artículo elaborado por Ballestero y Gamboa (2010) "La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes", dicho artículo se basó en un cuestionario dirigido a estudiantes de secundaria en Costa Rica para conocer la percepción respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Se hace referencia a los resultados obtenidos y manifiestan que en la enseñanza secundaria los docentes dan una serie de fórmulas y definiciones que se deben aplicar para llegar a un resultado, dejando de lado el acercamiento con la realidad o el contexto, por esta razón se ve a la Geometría como poco relevante para la vida, cuando la importancia es mucha. Ballestero y Gamboa (2010) señalan

> Los resultados muestran que las clases de Geometría en la educación secundaria se han basado en un sistema tradicional de enseñanza, donde docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan los ejercicios que deben ser resueltos por estudiantes. Estas actividades enfatizan en la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, lo que trae como consecuencia que procesos de visualización, argumentación y justificación no tengan un papel preponderante en la enseñanza de la disciplina (p. 125).

Con respecto a esto resulta importante mencionar a Peña (2010), quien llevó acabo una investigación para cambiar la metodológia en la Enseñanza de la Geometría. La propuesta consistió principalmente en la elaboración de una página web, el contenido de dicha página lo especifica Peña (2010),

> Con nuestra propuesta pedagógica, el docente podrá nutrirse de información, utilizar los contenidos didácticos, realizar actividades interactivas, acceder a programas y a sus manuales, observar la Geometría en el mundo real a través de vídeos y presentaciones, llevar a cabo concursos de fotografía Matemática en su centro educativo, usar fichas de observación en sus clases, aprender a elaborar un blog y usar y construir su propia red social, así como ver sus posibilidades dentro de la educación, acceder a curiosidades matemáticas y a distintos enlaces matemáticos, entre otras cosas (p. 474).

Es importante destacar que dicha página web actualmente (2015) no se encuentra activa, pero aunque no se tenga acceso, en la tesis se presentan capturas de pantalla y se detalla los elementos que la conforman.

Por último, se referencia el trabajo elaborado por Gutiérrez y López (2010), "Enseñanza de la Geometría en segundo año de secundaria". Este documento corresponde a un artículo realizado en el Instituto Nacional Cristóbal Colón, en el cual los investigadores realizaron un trabajo con base en los programas de estudio de Nicaragua y observaciones de clases específicamente en Geometría para realizar una unidad didáctica, algunos de los resultados descritos por los autores indica que existe bajo rendimiento en Geometría debido al poco interés por parte de la población estudiantil y docente, ya que es un tema que se deja para el final del curso lectivo razón por la cual no se pudo aplicar la unidad.

Capítulo 2

Marco Teórico

En el presente apartado se incluirá la base teórica que se necesita para llevar a cabo esta investigación, al ser la creación de una propuesta didáctica el objetivo principal, es importante tener claro algunos conceptos que están relacionados tanto con el enfoque que se quiere utilizar como con la propia unidad. Se tomará en cuenta teoría sobre resolución de problemas, el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, y por último uso de tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.

2.1. Geometría Analítica

La Geometría es el área de la Matemática que se ha trabajado desde la antigüedad con el fin de abordar problemas cotidianos, la necesidad de medir terrenos, comercio y censo de poblaciones, ha ocupado a la humanidad desde los babilonios y los griegos quienes buscaban a partir de la Geometría dar una respuesta clara y satisfactoria para abordar dichos problemas.

Posterior a estas soluciones geométricas, surgen los ideales de Euclides (uno de los principales precursores de la Geometría), este matemático intenta dar una justificación

a los problemas mediante estrategias observables como lo menciona González (2003).

> Cada demostración de la Geometría euclidea exigía nuevos e ingeniosos argumentos originales y estaba tan ligada a las figuras que "no se puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación", como diría Descartes (p. 69).

Sin embargo, los aportes de Euclides y algunos matemáticos de la época se limitaban a las figuras en específico, ya que se basaban en la aritmética, por esta razón no se podía dar una generalización, al respecto González (2003)

> establece como paradigma un estilo de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la Geometría al margen de la Aritmética, impide el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción, mediante intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción, y no por medio de ecuaciones (p.13).

Por otra parte, algunos matemáticos se enfocaban más en el álgebra como es el caso de Francisco Vieta, matemático francés quien realizo distintos aportes en la representación de ecuaciones, estableció la solución completa de ecuaciones de segundo y tercer grado con una incógnita, es decir su aporte a la generalización como lo menciona Falk (1994)

> Fue Vieta quien dio el genial paso hacia la generalidad por medio de representaciones literales de los números involucrados (Esto a su vez explica por qué las demostraciones de los hechos algebraicos, antes de Vieta, eran demostraciones geométricas, pues sin la generalidad de las constantes literales no había en el álgebra más que sendos ejemplos particulares)(p. 46).

Otro matemático como Cardano recurría a la Geometría para justificar procedimientos algebraicos. Es por esta razón que surge la necesidad de representar algunas figuras a partir del álgebra, es decir, generalizar las curvas independientemente del espacio en

el cual se encontraran, es así como Descartes y Fermat trabajan en estos aspectos, y de aquí surge lo que hoy se conoce como Geometría Analítica.

Sin embargo, Descartes y Fermat colaboran en la Geometría Analítica por distintos caminos, Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones.

2.1.1. Aportes de René Descartes y Pierre Fermat

Mencionando a Descartes, este personaje es conocido principalmente por sus aportes en filosofía en una de sus obras "El discurso del método" indica que la Matemática es el saber más perfecto, es así que en sus aportes filosóficos siempre surgían cuestionamientos y conjeturas, hay quienes indican que por esta razón nació su pasión por la Matemática, pues aquí se podía descubrir verdades sin escepticismo.

Este matemático, consideraba importante pensar como una figura se podría representar sin necesidad de tenerla plasmada en el plano, es así como desea brindarle al mundo un aporte más allá del ofrecido por los geómetras, como lo indica el mismo Descartes citado por González (2003), al mencionar

> Gustaba [en mi juventud], sobre todo, de las matemáticas por la certeza y evidencia de sus razonamientos, pero no había entendido todavía su verdadero uso y, pensando que solo servían para las artes mecánicas, me sorprendía de que siendo tan firmes sus fundamentos, no se hubiera construido sobre ellas nada más relevantes (p. 69).

Descartes da una visión diferente a la Geometría de los griegos, lo que hace que trascienda, ya sus aportes superan las limitantes de los trabajos de estos matemáticos, pues ya la Geometría deja de ser estructurada a figuras en específico y surge la generalización.

Sus contribuciones en el área de la Matemática en el documento denominado "Geometría", se refiere a la solución de la ecuación de primer grado indagando con las operaciones: suma, resta, multiplicación, y raíz cuadrada de segmentos, en el cual daba una explicación a las letras, específicamente hablando en términos geométricos. En el primer libro aparece uno de los ejemplos de Pappus el cual es resuelto por Descartes, pues en esa época algunas de las curvas eran desconocidas por los antiguos matemáticos. Rey y Pastor (1985), indican al referirse a la solución de este problema

> Descartes dice que antes de considerar el caso general "es necesario que diga algo en general de la naturaleza de las líneas curvas". Tal es el objeto del segundo libro, en el cual, después de criticar la clasificación de los antiguos en problemas planos, sólidos y lineales, introduce una clasificación poco feliz de las curvas planas algebraicas en géneros (en su Geometría no figuran curvas trascendentes, que denomina mecánica) (p. 46).

Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado, la idea era prácticamente la misma, para las ecuaciones cúbicas utilizó la idea de Cardano, y para la de grado cuatro combino los métodos de Vieta y Ferrari.

Además, trabaja con ángulos y otras ramas como lo menciona González (2003)

> Descartes introduce el simple criterio de divisibilidad sobre el término independiente de la ecuación polinómica (como condición necesaria aunque no suficiente) para obtención de raíces enteras y a partir de aquí ir reduciendo el grado de la ecuación mediante el algoritmo de la división. Para las ecuaciones cúbicas Descartes hace intervenir los clásicos problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. De hecho, todo problema cúbico es equivalente a uno de estos dos problemas geométricos. He aquí un nuevo y magnífico éxito del método cartesiano aplicado a la Geometría: las ecuaciones del Álgebra son el reflejo lingüístico de los problemas de la Geometría. (p. 76).

Para todas estas soluciones Descartes no utiliza raíces negativas, su interés es la representación gráfica mediante la intersección de curvas con circunferencias.Se puede decir, que la utilización de la Geometría Analítica de este matemático con la actualidad

va más en relación a una estrategia como lo menciona Rey y Pastor (1985) "Si en la Geometría de Descartes la aplicación del álgebra a la Geometría aparece más bien como un método, es otro matemático francés del siglo XVII, Pierre Fermat, quien presenta esa aplicación más naturalmente como un recurso técnico (p. 50)" .

Fermat estudió derecho por lo que la Matemática no era su principal profesión, debido a su trabajo no contaba con mucho tiempo, pero esto no fue limitante para que abordara temas matemáticos como pasatiempo. En el año 1636 hace un descubrimiento sobre el principio fundamental de la Geometría Analítica dicho principio es citado por Boyer (2011) siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades desconocidas, la extremidad de uno de ellos describe una línea, recta o curvada (p. 320).

Esta observación fue escrita un año antes de que Descartes diese sus fundamentos en Geometría, se cree que los aportes de Fermat se dan por el análisis del álgebra de Vieta así como las curvas de Apolonio. Sin embargo, como lo menciona Boyer (2011)

> el punto de vista de Fermat no estaba en conformidad con la de Descartes, pues Fermat hizo hincapié en las soluciones de ecuaciones indeterminadas, en lugar de la construcción geométrica de las raíces de las ecuaciones algebraicas determinadas. Por otra parte, donde Descartes había construido su Geometría alrededor del difícil problema de Pappus, Fermat limitó su exposición, en el corto tratado titulado Ad Locos Planos et Solidos Isagoge (Introducción a loci planos y sólidos), a los loci más simples. (p 321)

Buscaba soluciones indeterminadas y no construcciones geométricas de raíces como era el caso de Descartes. Para su análisis inicia con la función lineal y utiliza un sistema de coordenadas arbitrarias, utilizando la notación de Vieta.

Fermat trabaja al igual que Descartes con términos positivos, trabaja en la ecuación de la forma $ax + by = c^2$, demostrando que dicha ecuación representa una línea. Según Fermat citado por Boyer y Merzbach (2011) "Dado cualquier número de líneas fijas, en un plano, el lugar tal que la suma de cualquier múltiplo de los segmentos dibujados en

ángulos dados de los puntos a las líneas dadas es constante, es una línea recta" (p. 321).

Asimismo, trabaja con ecuaciones de la forma $xy = k^2$ mostrando que está ecuación corresponde a una hipérbola y que la ecuación $xy + a^2 = bx + cy$ se puede reducir a $xy = k^2$. Identificó las ecuaciones correspondientes a la circunferencia, elipse y parábola, es decir trabajó con ecuaciones de segundo grado.

Los aportes de Fermat son mas afines a la Geometría Analítica actual, Por está razón algunos autores indican que son más prácticos que los de Descartes, al respecto Boyer y Merzbach (2011) indican

> Es una pena que Fermat publicó casi nada durante su vida, porque su exposición fue mucho más sistemática y didáctica que la de Descartes. Además, su Geometría Analítica era algo más cerca de la nuestra, en que las ordenadas se toman generalmente en ángulo recto a la línea de las abscisas. Al igual que Descartes, Fermat era consciente de una Geometría de más de dos dimensiones, pues en otra conexión escribió, hay ciertos problemas que implican sólo un desconocido, y que pueden ser llamado determinante, para distinguirlos de los problemas de Loci ahí son ciertas otras que implican dos incógnitas y que nunca pueden ser reducido a uno solo; estos son los problemas de Loci. En los primeros problemas buscamos un punto único, en el último una curva. Pero si el problema propuesto implica tres incógnitas que uno tiene que encontrar, para satisfacer la ecuación, no sólo un punto o una curva, sino una superficie entera (p. 322).

Es claro que estos dos personajes aportan conocimientos para lo que hoy se conoce como Geometría Analítica, teniendo en cuenta que sus aportes se basaban en el trabajo de Vieta, ya que se dan por la necesidad de asociar el Álgebra y la Geometría, es decir, la Matemática se construye por distintos ideales.

Cabe señalar cual es la finalidad que tiene está rama de la Matemática coincidiendo con la definición brindada por González (2007)

> La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables (p. 205).

Esta área es de utilidad para la sociedad para la ubicación y por supuesto tiene un papel importante en la Enseñanza de la Matemática como lo menciona Acuña (2001):

> La graficación en la Enseñanza Matemáticas es objeto de usos diversos; puede ser considerada en si misma un objeto de estudio cuando se le da un tratamiento de tipo analítico, también puede ser un punto de apoyo para la enseñanza del concepto de función o de relación o puede, incluso, usarse como un modelo de procesos naturales o sociales donde su papel fundamental se asocia con la interpretación de dichos procesos (p. 204).

2.2. Resolución de problemas

Como en el objetivo general se especifica que la unidad didáctica que se desea construir utilizará principalmente un enfoque de resolución de problemas, resulta relevante tratar los aspectos más importantes que plantea esta teoría. Según Capote (2012), define resolución de problemas como

> Una de las metas a alcanzar por los estudiantes al enfrentarse a un problema matemático sería determinar la respuesta correcta (resolución del problema), pero para ello, primeramente deberían ejecutar un conjunto de transformaciones (solución del problema). La esencia de este proceso y resultado es construir el modelo matemático que permitiría determinar la vía de solución para luego realizarla, hasta encontrar su solución (p. 121).

Asimismo se recurre a la definición de Rodríguez (2012),

> Se entiende por resolución de problemas un proceso intelectual que partiendo de una información termina en la formulación de una o más alternativas de acción. Sentir un problema implica percibir una desviación de los acontecimientos de cara a un objetivo; si no tenemos objetivos no hay problemas (p. 45).

Tomando en cuenta el concepto de Ministerio de Educación Pública (2012) y asociando la resolución de problemas dentro del aula, describen:

> La resolución de problemas está asociada sustancialmente a la naturaleza de las Matemáticas, sean problemas del entorno o abstractos. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas matemáticos define la actividad de estos profesionales en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación. Debe existir una explícita relación entre esta naturaleza y las acciones de enseñanza y aprendizaje. No establecer estas conexiones en la acción de aula significaría la incomprensión de un sentido central de las Matemáticas. Sin embargo, pasar de la actividad de resolución de problemas en los quehaceres matemáticos más generales a la acción de aula no se puede realizar de una manera mecánica: debe haber adaptación al entorno escolar (p. 33).

Para terminar se da importancia a lo citado por Bossio, Fernández, Gvirtz, Milton y Silconi (2015), al referirse a resolución de problemas como

> Si bien hablamos de un aprendizaje por medio de la resolución de problemas, estos resultan necesarios, pero no suficientes, para que los alumnos produzcan conocimiento matemático. Podemos decir que sin problemas no hay Matemática, pero resolver problemas no asegura que los alumnos construyan toda la Matemática. La actividad matemática que se podría desplegar a partir de la resolución de un problema no está contenida en su enunciado ni se logra solo al intentar resolverlo, sino que depende especialmente de las interacciones que se pueden generar a partir de él (p. 12).

Por lo tanto y con ayuda de las definiciones anteriores en este trabajo se entenderá como resolución de problemas aquel proceso cognitivo en el cual se plantee una situación desconocida para el individuo y éste debe recurrir a una serie de procedimientos previos para ofrecer una solución innovadora del mismo.

Con lo anterior se tomará como base lo planteado por George Pólya (1945) citado por Alfaro. C (2006), en el cual se contemplan cuatro fases principales para resolver un problema:

1. Comprender el problema: Etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones y decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes ni contradictorias.

2. Elaborar un plan: En esta etapa el problema debe relacionarse con problemas semejantes, además debe relacionarse con resultados útiles y se debe determinar si se pueden utilizar problemas similares o sus resultados.

3. Ejecutar el plan: Es primordial examinar todos los detalles, es importante distinguir entre percibir que un paso es correcto y demostrar que un paso es correcto, es decir, la diferencia entre un problema por resolver y un problema por demostrar.

4. Hacer la verificación: También denominada la etapa de la visión retrospectiva, en esta etapa es muy importante observar qué fue lo que se hizo, se necesita verificar el resultado.

Al respecto se tiene además lo planteado por el Ministerio de Educación Pública (2013) que contempla cinco procesos para resolver un problema:

1. Razonar y argumentar.

2. Plantear y resolver problemas.

3. Comunicar.

4. Conectar.

5. Representar.

Es por esta razón que para el presente trabajo se tomarán los siguientes procedimientos para resolver un problema usando Geometría Analítica:

1. Comprender el problema: el educando deberá leer y comprender el problema.
2. Razonar y argumentar: etapa en la que el estudiante deberá formularse ideas para la resolución del problema planteado.
3. Representación de la situación planteada: en esta etapa el estudiante deberá construir un diagrama, dibujo o cualquier otro instrumento que facilite la visualización del problema planteado.
4. Plantear algebraicamente y resolver: se definirán variables y fórmulas a utilizar para resolver el problema.
5. Concluir: etapa en la que el educando brinda una adecuada respuesta a la situación planteada.

2.3. Uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática

Actualmente el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), es prácticamente obligatorio por parte del docente en el desarrollo de la lección, y debe incluir en el planeamiento estrategias didácticas en las que el empleo de las TIC genere aprendizaje. Briseño, González y Lugo (S.f) opinan al respecto

> Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) son una herramienta importante para contribuir a la mejora de la educación. Sin embargo, su impacto en el aprendizaje de los estudiantes está condicionado, por un lado a su uso por parte de los docentes en sus prácticas de enseñanza, y por otro, al nivel de apropiación pedagógica que estos tengan de las TIC. es decir, que las clases no sigan siendo tradicionales. Por tanto, diseñar estrategias que aprovechen las ventajas de las TIC en el aula, se convierte en un aspecto obligado de los países que buscan enfrentar el desafío de superar la pobreza y generar oportunidades de desarrollo... (p. 4).

Es decir, el uso de tecnología actualmente es una estrategia útil para el abordaje de algunos contenidos, siempre y cuando se haga uso adecuado de las mismas, Figueroa, Piedra, López y Santamaría (2014) opinan que "...la incursión de las TIC en el aula no debe responder solamente a una moda..." (p. 10), es decir, no se debe optar por impartir las lecciones con tecnología por cumplir con lo establecido por la sociedad o moda, o cumplir con los programas de estudio solamente en concordancia con lo que exponen los autores.

En la búsqueda de estrategias didácticas, cabe destacar el trabajo en equipo, técnica que permite al estudiantado el organizarse en equipos para abordar un problema, elaborar un proyecto, entre otras situaciones, Ayestarán (2005) agrega que

> "Trabajar en equipo" es una de las competencias transversales más frecuentemente citadas en los documentos que tratan de la calidad en la gestión de los centros y en la actividad docente del profesorado. Efectivamente, no se puede avanzar mucho en la mejora de la calidad en la gestión de los centros o en la mejora de la actividad docente, si las personas implicadas en esos procesos no tienen la competencia para trabajar en equipo. Se suele hablar de la competencia para el trabajo en equipo. En realidad, esta competencia es una suma de competencias. Algunas de estas competencias son imprescindibles para que el equipo sea eficaz, en el sentido de que logra los objetivos propuestos. Otras competencias permiten al equipo alcanzar un alto nivel de excelencia y de eficiencia, porque suponen mayor desarrollo de las capacidades de sus miembros (p. 12).

Algunas de las competencias citadas por el autor son ser capaces de aplicar el ciclo de la calidad, ser capaces de construir con los demás miembros del equipo un sistema de comunicación basado en la libertad y en el respeto mutuo, ser capaces de reconocer el trabajo de los demás miembros del equipo, ser capaces de aplicar el ciclo de la innovación, ser capaces de aplicar el ciclo de la creatividad grupal. Sin duda alguna el autor hace referencia a una serie de requerimientos indispensables que deben poseer las personas que conforman un equipo, para lograr afrontar exitosamente el problema planteado.

Para llevar a cabo el desarrollo adecuado de una lección apoyada en el uso de tecnología y trabajo en equipo, el docente debe apoyarse en los sustentos teóricos que existan sobre el tema, para seguir las consideraciones o consejos pertinentes. Vence Pájaro (S.f) manifiesta

> Para que la educación responda a las necesidades actuales y del futuro, deben dar cabida a las herramientas tecnológicas y hacer grandes esfuerzos para buscar la mejor manera de utilizarlas. Además, deben generar en el educando y en su comunidad cambios que mejoren la calidad de la educación, en una concepción del desarrollo humano que satisfaga las necesidades de las generaciones futuras... (p. 4).

El uso de tecnología como herramienta de apoyo en la visualización del problema planteado, es una de las maneras en que se pretende mejorar el rendimiento del estudiante en el área de Geometría Analítica y resulta necesario establecer qué se entenderá por tecnología en la enseñanza, desde la perspectiva de Sosa (2008), "la tecnología como mediación instrumental. Utilizar las computadoras y calculadoras como herramientas de re−organización cognitiva, lo cual involucra la transición de éstas tecnologías de herramientas a instrumentos matemáticos computacionales" y Morales (2009), "recurso didáctico que facilite el aprendizaje matemático. Este eje no es sólo importante en el aprendizaje sino para el desarrollo cultural y social del futuro profesional".

En ese caso, es importante resaltar que ambos autores concuerdan en que la tecnología se puede manejar como una herramienta didáctica dentro del aula de estudio. Es claro, que actualmente la tecnología es una parte fundamental del vivir de los estudiantes, por ello, el docente debe de preocuparse por incorporarla como uno de los elementos que conforman el proceso educativo.

Con respecto a lo anterior se puede entender la tecnología como un instrumento pedagógico que ayude a comprender los conceptos matemáticos de una forma dinámica y que resulte sencillo ver su aplicación, además de ser una herramienta para construir conocimiento a partir del ya adquirido.

En otras palabras, el uso de las TIC debe favorecer el desarrollo humano, tanto para las generaciones actuales como para las futuras sociedades. Con todo lo anterior queda reflejada la necesidad de implementar el uso de Tecnologías de la Información y Comunicación en las clases, tomando claro está las consideraciones pertinentes para que el desarrollo de la estrategia logre su cometido y no se convierta solamente en una clase diferente sino en una clase que genere aprendizaje real.

2.4. Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría

La Geometría es una de las partes más importantes del currículo en Matemática, y esta importancia se ha reflejado en los programas de estudio elaborados por el Ministerio de Educación Pública en el año 2013, al incluir nuevos contenidos que anteriormente no formaban parte de la Educación Matemática costarricense.

La Geometría debido a su naturaleza de ser una herramienta creada para resolver problemas, resulta vital que esté presente en el currículo de Matemática y más aún si este se creó bajo un enfoque de resolución de problemas Gamboa y Ballestero (2009), argumentan "la geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo que le permite al ser humano resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial" (p. 114). Resulta necesario tener clara la definición de Geometría Analítica, pues dichos términos son la base fundamental del presente trabajo, según la Real Academia de la Lengua Española, la palabra Geometría significa "estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio", por otro lado etimológicamente el vocablo Geometría significa: tierra y metría significa: medición.

Asimismo, se define Geometría Analítica al "estudio de figuras que utilizan un sistema de coordenadas y los métodos del análisis matemático". los contenidos que se pretenden desarrollar en la unidad didáctica caben dentro de esta definición, pues la construcción de figuras geométricas es necesaria para la resolución de problemas, con el fin de obtener respuestas correctas e innovadoras.

En lo que respecta a la enseñanza de la Geometría, es importante distinguir tres procesos cognitivos que se presentan al realizar una actividad geométrica, los cuales son

remarcados por Duval citado por Fortuny, Iranzo y Morera (2010), las cuales son:

- Visualización de procesos, (lo que se relaciona con la interpretación de los diagramas geométricos). En este sentido se justifica el valor de las representaciones gráficas que ofrecen los entornos informáticos.
- Los procesos de construcción de herramientas, (enfoque operativo que se utiliza para identificar sub-configuraciones). Particularmente en el proceso de resolución de problemas de Geometría, en el que los estudiantes se enfrentan a la exploración, manipulación directa e interpretación de los datos para hacer emerger estrategias de solución.
- El razonamiento, la conjetura y la prueba, relacionando las representaciones espaciales y conocimientos teóricos (p. 74).

Debido a que en esta investigación se pretende elaborar una propuesta didáctica para el abordaje de temas de Geometría Analítica desde un enfoque de resolución de problemas, resulta importante tener claros estos procesos cognitivos, pues cada uno de ellos tiene una función específica en el razonamiento del estudiante al momento de enfrentarse a un problema geométrico.

Es importante rescatar la relación que existe entre el proceso de resolución de problemas y los procesos establecidos para resolver propiamente un problema geométrico, la visualización es el primer paso a seguir a la hora de enfrentarse a una situación geométrica, en ese momento el estudiante logra comprender de mejor forma el ejercicio planteado y proceder razonar sobre posibles métodos de solución.

Como segundo paso se plantea la construcción de herramientas, este proceso se relaciona directamente con el planteamiento algebraico que propone la estrategia de resolución de problemas, en ambos casos el objetivo es utilizar la teoría vista en clase

o previamente conocida por el estudiante, para proceder a la solución del ejercicio. Por último la prueba y la conclusión, son los pasos finales de ambos procesos, aquí se logra llegar a una conclusión, que debe ser acorde a lo planteado por el ejercicio y con lo desarrollado anteriormente.

Por otra parte, resulta importante mencionar que el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013) expone.

> Se pretende una introducción de la Geometría de Coordenadas y Analítica adecuada a los distintos niveles cognitivos. La Geometría Analítica presente en esta área se reduce a la representación en sistemas coordenados de puntos y de algunas figuras geométricas como el círculo. Se estudia la simetría axial, que posee muchos ejemplos interesantes en la realidad, y se introducen, en el Ciclo diversificado, algunas transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). La introducción de estos tópicos favorece los vínculos entre Geometría y Álgebra, una dimensión importante de las Matemáticas contemporáneas (p. 52).

Es importante tener en cuenta, algunas de las dificultades que se suelen presentar al momento de enseñar Geometría, con el objetivo de abordar estas en la propuesta didáctica que se va a realizar. Todas las personas aprenden de maneras diferentes y al ser la Geometría un tema en el que la percepción y visualización son elementos claves para trabajar un problema, los estudiantes posiblemente entenderán el ejercicio de manera distinta, e idearán múltiples formas de resolverlo, en este aspecto la tecnología se vuelve una herramienta importante, pues como se expuso tanto en la justificación como en el segundo apartado del presente marco teórico, este es un instrumento que ayuda a ver la Matemática de manera dinámica y facilita su aplicación.

El hacer que los estudiantes se interesen por aprender Geometría no es una tarea sencilla, ellos suelen ver esta área de la Matemática como un simple recetario de fórmulas y conceptos sin aplicación real, Baéz e Iglesias citados por Gamboa y Ballestero (2009), exponen la contradicción entre lo expuesto por el profesor al indicar la utilidad de la

Geometría en la sociedad, sin embargo, esto no se refleja en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por último se pueden citar seis principios básicos que se deben tener en cuenta en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría según Báez e Iglesias, citados por Gamboa (2009),

- Principio Globalizador e interdisciplinar.
- Integración del conocimiento.
- Contextualización del conocimiento.
- Principio de Flexibilidad.
- Aprendizaje por descubrimiento.
- Innovación de estrategias metodológicas.

2.4.1. Principio Globalizador e interdisciplinar

Para abarcar el principio globalizador es preciso tener en cuenta que no es lo mismo un método globalizador que un enfoque globalizador, por esta razón resulta necesario definir ambos términos. Un método globalizador refiere al uso de estrategias y técnicas concretas, mientras que un enfoque globalizador es una toma de postura profesional ante la labor docente que se está desempeñando y la manera en que se desea que el alumno aprenda, esto con el fin de que el aprendizaje sea significativo fomentando la adquisición de competencias, al respecto Pareja (S.f) señala

> organizar globalizadamente la enseñanza de los contenidos favorece su aprendizaje significativo dado que se basa en la posibilidad de establecer relaciones entre lo dado y lo nuevo; de modo que no cabe duda de que la organización globalizadora favorece por varios motivos dichas relaciones perfilándose como la "solución" más pertinente a la hora de organizar los contenidos con el fin de se realicen aprendizajes funcionales (p. 2).

Por otro lado Luengo (2001) señala que "el aprendizaje significativo es un aprendizaje relacionado, por cuanto toda nueva información se relaciona con algo ya aprendido." Es decir, el alumno puede tener una definición almacenada en la memoria pero si el aprendizaje no es significativo, no la comprende realmente, debe relacionarla con conocimientos ya existentes.

La globalización y la interdisciplinariedad son propuestas pedagógicas y didácticas, cuya finalidad es permitir al docente organizar coherentemente los contenidos escolares de manera que se facilite el proceso de enseñanza – aprendizaje, parten del interés de los alumnos y se desarrollan de modo que los ejercicios propuestos no disminuyan la atención por parte de los discentes, sino que contribuyan al aprovechamiento de los contenidos desarrollados.

Lozzada (2011) señala que

> Las estrategias de enseñanza- aprendizaje son conjuntamente con los contenidos, objetivos y la evaluación de los aprendizajes, componentes fundamentales del currículo, el cual le permite al docente junto a sus alumnos(as) desarrollar actividades dentro y fuera del aula para relacionar asignaturas, incentivar el auto aprendizaje, motivar el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las actividades (p. 1).

En sí se está haciendo referencia al enfoque globalizador, por lo que se debe considerar el concepto de globalización del aprendizaje, Pareja (S.f) refiere

> Para el niño, globalizar el aprendizaje es una función psicológica basada en el carácter acumulador de la percepción infantil. Desde una perspectiva social, los profesionales han de ser capaces de integrar los "saberes culturales" para facilitar los aprendizajes del alumno (p. 3).

Los métodos globalizados consideran que las asignaturas no deben ser los objetivos principales para los educandos, sino que deben ser los medios o instrumentos que le permitan conocer mejor algún aspecto de la realidad de su interés ya sea para elaborar un proyecto o resolver algún problema, no se desvaloriza a las disciplinas, sino que se les da sentido como instrumentos al servicio del conocimiento.

La globalización pretende que todo lo que se aprenda parta de una necesidad o interrogante sobre distintos problemas de la vida cotidiana (fenómenos, actividades de experimentación, etc), hacer preguntas, debatir e intercambiar ideas y brindar respuestas intuitivas sobre la situación problema, exige a quien aprende a un esfuerzo mental necesario para obtener respuestas y conseguir un conocimiento más eficaz, Pareja (S.f) "Las estrategias de resolución de problemas mediante la "investigación" estimulan el pensamiento creativo al tiempo que evitan los aprendizajes memorísticos" (p. 6).

La interdisciplinariedad es un modelo profesional de actuar según la organización del currículo, pretende abordar y estructurar las distintas disciplinas y sus contenidos hacia la globalización del conocimiento, desde un enfoque pedagógico que parte de la integración de los conocimientos para asumir que el educando comprende un problema o situación de su interés.

2.4.2. Integración del conocimiento

Antes de incurrir en una definición formal de integración del conocimiento en la educación, se debe tener claro el concepto de competencias en la educación. En Costa Rica se han implementado nuevos planes de estudio, en los cuales se definen claramente los objetivos que se pretenden cumplir con el fin de reforzar el sistema educativo en Matemática.

Los nuevos programas buscan contribuir significativamente en la educación costarricense y mejorar la calidad de la formación en matemáticas, para ello toman en cuenta aspectos importantes tal y como lo son las competencias. El Ministerio de Educación Pública MEP (2012) comenta con respecto a las competencias "La competencia matemática y las capacidades cognitivas superiores se desarrollan a partir de las actividades cotidianas en el aula para el logro de las habilidades específicas y generales (asociadas a las áreas matemáticas)" (p. 14).

Las competencias generales del nivel medio de enseñanza deberán dirigirse al desarrollo integral del individuo como persona y como miembro de la sociedad, dentro del marco de la globalización y la inmersión en la sociedad del conocimiento.

Niss (2002) considera como competencia "Poseer una competencia (ser competente) en algún dominio de la vida personal, profesional o social es dominar (a un nivel apropiado. módulo condiciones y circunstancias) aspectos esenciales de la vida en tal dominio" (p. 6). Luego establece que la competencia matemática "Es la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticos en los que las matemáticas juega o puede jugar un papel" (p. 7).

Niss (2002) plantea ocho competencias matemáticas organizadas en dos grupos: Competencias para preguntar y responder acerca de, dentro y por medio de las matemáticas

- Pensar matemáticamente
- Plantear y solucionar problemas matemáticos
- Modelar matemáticamente
- Razonar matemáticamente

Competencias de comprensión y uso del lenguaje y los instrumentos matemáticos

- Representar entidades matemáticas
- Manipular símbolos matemáticos y formalismos
- Comunicar dentro de, con, y sobre las Matemáticas
- Hacer uso de los soportes y de las herramientas

Garagorri (2007) plantea algunos peligros en el uso de las competencias en educación

- Reducir el currículo a las competencias específicas observables o medibles olvidando las transversales.
- Hacer un planteamiento de currículo basado en competencias transversales sin ligazón con las competencias específicas y dando por supuesto su transferencia automática
- Reducir el currículo a las competencias, olvidando las experiencias y los saberes que nos constituyen.
- Reducir el planteamiento del currículo basado en competencias a puro formalismo (p. 53).

Como se ha mencionado, hay distintos tipos de competencias y cada tipo posee sus propias características, sin embargo, aunque la diversidad es amplia se presentan ciertos elementos en común. Ante la gran variedad de competencias se hará referencia a la característica integradora del conocimiento, tema desarrollado para el presente trabajo. La mayoría de las definiciones comprenden que las competencias incluyen diversos

elementos de manera integrada, varían de una definición a otra pero coinciden en los conceptos, procedimientos y actitudes

En otras palabras para ser competente es necesario emplear de manera conjunta y coordinada, conocimientos o saberes teóricos conceptuales, procedimientos o saberes aplicativos y actitudes o disposiciones motivacionales, que permiten llevar a cabo una tarea. Garagorri (2007) plantea al respecto "Esta forma integrada de entender los contenidos del proceso de enseñanza-aprendizaje supone un avance con respecto a la comprensión con frecuencia compartimentada que se ha hecho de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales" (p. 50).

Roegiers (2007) señala "La integración se entiende, pues, "no solamente como la articulación de los diferentes saberes entre sí, sino, sobre todo, la articulación de estos saberes en las situaciones en que deben ser movilizados, ya sea en el campo de la concepción de un currículo de enseñanza, en el de las prácticas de clase mismo o también en las modalidades de evaluación"" (p. 28).

Roegiers propone un currículo integrador en el proceso de enseñanza–aprendizaje, recordemos que en este sentido el currículo está orientado a competencias y estas se destacan por presentar el aprendizaje de forma significativa, debemos considerar que una situación significativa para el docente quizá no lo sea para el discente. Al respecto Roegiers (2007) señala

> Es necesario que la situación escogida no haya sido resuelta anteriormente, ni colectivamente, ni tampoco individualmente por un alumno. De lo contrario, se trata de reproducción, y la reproducción crea otra cosa que una movilización de recursos diversos. Es indispensable que la situación comprenda algunas diferencias en relación con las que fueron explotadas anteriormente. Sin embargo, tampoco debe ser demasiado diferente: hay que escogerlas dentro de la familia de situaciones que definen la competencia (p. 213).

Esto permite al educando la comprensión de un ejercicio e idear distintas formas de solucionar los problemas, dependendiendo de las características que se presentan, el escoger la fórmula apropiada para lograr la solución de un problema, debe ser una practica cotidiana acaptada a casa caso particular.

2.4.3. Contextualización del conocimiento

La educación matemática siempre ha generado actitudes de rechazo, disgusto y hasta miedo en la población estudiantil, como se menciona el Ministerio de Educación Pública en el documento de la reforma curricular en el Departamento de Matemática (2013)

> el mito de que las Matemáticas son áridas, feas, imposiblemente difíciles y algo de lo que los estudiantes tienen que sentir miedo. Esta visión de las Matemáticas como "el coco" ha sido tradicional en Costa Rica y en casi todo el mundo, y es uno de los prejuicios que hay que superar para lograr un cambio significativo en nuestra capacidad de enseñar y aprender Matemáticas. Se trata de familiarizar al estudiante con las Matemática, de hacérsela cercana, agradable, emocionante.

Como se argumenta en la cita la población docente debe lograr que el estudiante se sienta atraído por estudiar y aprender, para lograrlo es importante tener presente que la Matemática surge con el propósito de solucionar problemas y si se separada de este objetivo se convierte solamente en un conjunto de símbolos y reglas formales que carecen de sentido.

Según Ramos y Font (2006) "... las matemáticas informales e idiosincrásicas son las dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuel." (p. 2). Esta brecha hace que el estudiante no entienda para que tiene que aprender Matemática, aún cuando todos esos conceptos están implícitamente presentes en la vida cotidiana.

Para Rioseco y Romero (1999) "si se enseña en el contexto del mundo real, el aprendizaje puede llegar, con mayor probabilidad, a ser significativo. Al ligar los contenidos científicos con el ámbito de la experiencia del alumno se contextualiza la enseñanza y el aprendizaje, lo que permite a éste establecer conexiones entre el contenido científico a aprender y lo que él ya conoce." (p. 52). Es decir la persona se ve interesada en aprender cosas que le sirvan para algo o que en algún momento lleguen a utilizar para resolver situaciones que se le presenten, para Ramos y Font (2006) en la vida real se presentan problemas concretos y que solo son resueltos si la persona considera que es necesario hacerlo, por lo para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes.

Con lo anterior se puede asegurar que la contextualización del conocimiento matemático es necesaria para que los estudiantes se interesen por aprender, y que sientan que están estudiando algo funcional.

Al elaborar problemas matemáticos contextualizados es importante tener claro los elementos estructurales que lo componen, para Borasi citado por Conejo y Ortega (2013) "Dichos elementos estructurales son los siguientes:

- El contexto del problema, que hace referencia a la situación en la cual se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema o definición explícita de la tarea por realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría utilizarse para alcanzar la solución" (p. 133)

Resulta importante destacar que el contexto que se le da al problema debe ser de interés para los estudiantes, en el que se plantee una situación real o que involucre un tema de la actualidad de los alumnos. Al formular el problema este debe ser claro y conciso con lo que pide, evitar ambigüedades hará que resulte más sencillo llegar a la solución deseada, con respecto a esto se debe tener claro que en muchos casos no hay una solución única y que pueden existir diferentes maneras de llegar a una misma solución, por lo que el docente al plantear el problema debe prever cuales son los posibles métodos que utilizarán los estudiantes para llegar a la respuesta.

Es probable que el método de solución utilizado por los estudiantes, dependa del momento en que se les plantean los problemas contextualizados, en relación con esto D'Amore, Fandiño y Marazzani citados por Ramos y Font (2006) argumentan que:

> Se pueden proponer a continuación de un proceso de instrucción en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema... También se pueden proponer los problemas contextualizados al inicio de un tema o unidad didáctica con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar en esta unidad didáctica (p. 10).

En el caso de utilizar el problema luego de estudiar un tema determinado, este tendrá el objetivo de consolidar el conocimiento y que el estudiante perciba la aplicación en una situación concreta del concepto ya adquirido. En este caso el docente espera que la respuesta al problema sea concisa y que se resuelva aplicando los conocimientos que ya han sido trabajados.

Si el problema es planteado al inicio del tema, el objetivo debe ser que se utilicen conocimientos previos para formular una respuesta, es probable que surjan diferentes hipótesis de como se puede llegar a la solución, pero en conjunto con el docente se pueden organizar las ideas y elegir el método que se aplica. En este caso el conocimiento se construye a partir de la necesidad de resolver una situación.

Al hablar de problemas que se pueden aplicar en el aula resulta importante destacar las características que los diferencian, no es lo mismo proponer al estudiante que calcule el resultado de una operación numérica, a que resuelva una situación donde sea necesario plantear y resolver la misma operación, pero teniendo en cuenta las condiciones que se mencionan. Conejo y Ortega (2013) exponen una clasificación de los tipos de problemas matemáticos basados en el modelo de Borasi:

- **Ejercicio:** No tiene contexto, su formulación es explícita, busca obtener una solución exacta y única que se logra aplicando algoritmos conocidos.
- **Ejercicios y problema contextualizado:** Hay un concepto matemático implícito en el texto, su formulación es explícita y puede ser única o con varias alternativas, se quiere obtener una única solución.
- **Ejercicios con texto:** El contexto no necesariamente debe ser matemático, propone una situación de donde se extraen los elementos matemáticos que se necesitan para resolver el ejercicio.
- **Problemas de la vida real:** El contexto se encuentra explícito en el texto de forma parcial, se formulan algunas alternativas posibles pero deja muchas posibilidades para su solución. en muchos casos las soluciones son aproximadas, para llegar a la respuesta se debe crear un modelo explorando el contexto planteado.
- **Situación problemática:** El contexto se introduce de forma parcial a manera de problema, se sugieren algunas problemáticas a resolver de las cuales las soluciones pueden ser varias, para llegar a estas se debe reformular y plantear el problema específico.
- **Situación:** El texto propone una situación no problemática, la solución será la creación del problema a partir de dicha situación.

Como se detalló, existen hasta seis tipos de problemas con objetivos distintos y con varias formas para llegar a la solución, en el desarrollo de una lección el docente debe emplear el tipo de problema que satisfaga las necesidades de sus estudiantes, y en los momentos que lo crea correcto. Trabajar bajo una metodología de resolución de problemas, no significa que se deba dejar de lado la resolución de ejercicios explícitos, los conceptos matemáticos se aprenden al ponerlos en práctica, por lo que llegar a un balance entre la aplicación de los tipos anteriores es muy importante, y enriquecerá la actividad en el aula.

Por esta razón en la presente Unidad Didáctica, se hace uso de algunos de los distintos tipos de problema citados por Borasi, la utilización de ejercicios con el fin de poner en práctica procedimientos necesarios para la resolución de problemas contextualizados y de la vida real. Además los problemas con texto tienen el objetivo de orientar los conceptos estudiados y relacionarlos con situaciones no necesariamente matemáticas.

2.4.4. Principio de Flexibilidad

El planeamiento se construye con el objetivo de que el docente tenga una guía para desarrollar la lección, pero en el aula pueden ocurrir muchas situaciones que el educador no espera y que debe estar preparado para enfrentar. teniendo en cuenta que los estudiantes aprenden de distintas formas, al aplicar un problema no se puede saber si se obtendrá el resultado buscado, por lo que resulta imposible planear la clase perfecta para todos los educandos.

Para que con los problemas incluidos en el currículo se obtenga los resultados esperados, se debe tener presente el concepto de flexibilidad a la hora de su formulación, según Callejo y Zapatera (2014) "la flexibilidad está fuertemente relacionada con el proceso de resolución de problemas y con el éxito del mismo" (p. 68) además entienden flexibilidad

como la "habilidad para modificar la estrategia de resolución de un problema cuando se modifica su demanda cognitiva" (p. 66).

Por otro lado Llinares (S.f) define flexibilidad como "el uso consciente de las limitaciones, potencialidades y características de los vínculos entre diferentes modos de representación para obtener los objetivos de aprendizaje pretendidos" (p. 119). tomando cuenta la definición de los anteriores dos autores, se puede decir que flexibilidad es la habilidad de modificar la estrategia de resolución de un problema, tomando en cuenta las limitaciones y potenciales que poseen los estudiantes.

Resulta común confundir el término flexibilidad con adaptabilidad, para Verschaffel et al. (2009) los términos en muchos casos son utilizados como sinónimos pero según su artículo, flexibilidad es utilizado para referirse al cambio entre estrategias, mientras que adaptabilidad pone más énfasis en seleccionar la estrategia adecuada.

En la práctica de aula los estudiantes encontrarán diferentes formas de resolver los problemas que se le plantean, y en muchos casos el docente se dará cuenta que debe reformular las interrogantes y procedimientos para obtener los resultados que buscaba. Por esta razón incorporar la flexibilidad en los problemas utilizados hace que el aprendizaje llegue la mayoría de los estudiantes de manera eficaz.

Por otro lado siempre se debe tener presente, que todo problema representa un reto para el alumno y que existe la posibilidad de que el docente crea que va a ser resuelto de manera rápida y que no ocurra así. Callejo y Zapatera mencionan con respecto a esto "lo que se ha aprendido en una situación o aplicado a un problema determinado, no siempre se puede aplicar a otros problemas, aunque aparentemente sean semejantes" (p. 67) se quiere lograr que el estudiante adquiera un pensamiento flexible que le permita adaptar el conocimiento en diferentes situaciones.

La Unidad Didáctica resultante de la presente investigación está constituida por problemas que requieren análisis por parte del estudiante y la aplicación los conocimientos adquiridos para obtener una respuesta, la aplicación queda sujeta al docente pero permite la reformulación dependiendo de las condiciones que se presenten en el contexto del aula.

2.4.5. Aprendizaje por descubrimiento

La teoría del aprendizaje por descubrimiento corresponde a un método de enseñanza utilizado desde el pasado por distintos personajes que en la actualidad son de gran prestigio, es así como lo menciona Arias y Oblitas (2014) al mencionar que la teoría del aprendizaje por descubrimiento se le atribuye principalmente a Sócrates filósofo entre los años (470 a.C. - id., 399 a.C), ya que este consideraba que los seres humanos están dotados de los conocimientos necesarios, pero que van surgiendo debido a los cuestionamientos o actividades que brotan en el proceso indagación.

Sin embargo, es Brunner (1966) citado por Eleizalde (2010) quien da a conocer en la década de los 60 una teoría del aprendizaje de índole constructivista, conocida como aprendizaje por descubrimiento, la cual define como:

> el concepto de aprendizaje por descubrimiento para alcanzar un aprendizaje significativo, sustentado en que a través del mismo los maestros pueden ofrecer a los estudiantes más oportunidades de aprender por sí mismos. Así pues, el aprendizaje por descubrimiento, es el aprendizaje en el que los estudiantes construyen por sí mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o transmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes (p. 273).

En congruencia con lo mencionado algunos autores defienden esta teoría en algunas áreas tal es el caso señalado por Pozo y Gómez, (1998):

> El aprendizaje por descubrimiento es especialmente efectivo en la enseñanza de las ciencias, según resultados reportados en diversos estudios, en los cuales los estudiantes, que emplean estrategias que favorecen el aprendizaje por descubrimiento, obtienen mejores resultados que aquellos donde enseñanza se basa en la transmisión de información (Bittinger, 1968; Meconi, 1978; Santrok, 2004) (p. 273).

Es importante señalar que este método dentro de un aula se lleva a cabo mediante la participación de los estudiantes como ejes principales de la enseñanza- aprendizaje y el rol docente, donde el educador debe tener presente que debe intervenir en los períodos que considere necesarios para que este método sea productivo para ambas partes, pues como lo menciona Baro (2011) citado por Gallejos et al. (2014)

> El aprendizaje por descubrimiento está más orientado hacia la participación de los estudiantes, pues es a partir de la interacción con otros que se construyen los significados. Pero los significados que construye son también producto de una compleja serie de interacciones con el profesor, los contenidos estudiados y la estructura cognitiva del estudiante (p. 458).

Es importante tener presente que aplicar el método requiere de conocimiento por parte de cada educador, ya que se debe recordar que dentro del aula existen inteligencias múltiples y este aspecto hay que ser cuidadoso, como menciona De Luca (2000)

> La teoría de las inteligencias múltiples puede describirse de la manera más exacta como una filosofía de la educación, una actitud hacia el aprendizaje, o aún como una meta-modelo educacional en el espíritu de las ideas de John Dewey sobre la educación progresiva. No es un programa de técnicas y estrategias fijas. De este modo, ofrece a los educadores una oportunidad muy amplia para adaptar de manera creativa sus principios fundamentales a cualquier cantidad de contextos educacionales (p. 2)

Es decir, el proceso de enseñanza -aprendizaje se conforma por la población estudiantil y por el docente, pero esta población tiene diversas características en cuanto a

la personalidad, situación económica, razonamiento y otros factores en los que se desenvuelven. Por lo que el educador debe aprender a identificar cuales actividades serían provechosas y cuáles no para cada grupo, para evitar que este método se convierta en un inconveniente, al ser aplicado en una población que puede tomar la actividad de forma inapropiada.

Cabe señalar que la creación de esta unidad tiene como fin utilizar este método en algunos problemas, sin embargo, el docente puede modificar dichos problemas según lo considere necesarios para adaptarlos a las necesidades de sus alumnos, y teniendo presente la contextualización de los mismos.

Por lo tanto, se entenderá como aprendizaje por descubrimiento al proceso por el cual el estudiante debe indagar la solución de un problema sin necesidad de conocer algunos contenidos, es el mismo estudiante quien será capaz de deducir conceptos, tanto con la ayuda de recursos tecnológicos y con la intervención del docente, pues este debe cumplir el papel de guía y además de concretar de forma técnica y matemática, los contenidos que se presenten después del análisis por parte del estudiantado.

2.4.6. Innovación de estrategias metodológicas

Las estrategias son una actividad necesaria y constante en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, por esta razón es importante tener claro lo que se va a enterder en esta investigación como estratégia, para Latorre y Seco (2013)

> el término "estrategia" procede del ámbito militar, en el que se entendía como "el arte de proyectar y dirigir grandes movimientos militares" y, en este sentido, la actividad del estratega consistía en proyectar, ordenar y dirigir las operaciones militares de tal manera que se consiguiera la victoria. En este entorno militar los pasos o peldaños que forman una estrategia son llamadas "tácticas". (p. 15)

Asimismo, al consultar la definición brindada por el diccionario de pedagógico "Se refieren al conjunto de procedimientos empleados en una situación de asimilación de conocimientos, mediante actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento y utilización de la información."

De igual modo Díaz y Hernández (2002) aportan su definición de estrategia, no obstante, hacen una clasificación refiriéndose a estrategias para orientarla atención de los alumnos definiéndolas como "son aquellos recursos que el profesor o el diseñador utiliza para focalizar y mantener la atención de los aprendices durante una sesión, discurso o texto. Los procesos de atención selectiva son actividades fundamentales para el desarrollo de cualquier acto de aprendizaje" (p. 6).

Al respecto menciona López (2009) en referencia a estrategias de aprendizaje argumenta:

> Pueden entenderse como el conjunto organizado, consciente e intencional de lo que hace el aprendiz para lograr con eficacia un objetivo de aprendizaje en un contexto social dado. Actuar estratégicamente supone querer aprender eficazmente y diseñar y ejecutar planes de acción ajustados a metas previstas y a las condiciones del contexto, seleccionando y poniendo en marcha procedimientos, habilidades y técnicas eficaces para aprender (p. 2).

De esta manera se concreta según los conceptos mencionados que una estrategia corresponde a todos aquellos vínculos que una persona realiza para completar algún objetivo, si se especifica en el área de la educación, estas estrategias pueden llevarse a cabo en la forma en la cual el docente desempeña la lección, las técnicas que este utiliza para educar a sus estudiantes con el objetivo principal de que estos adquieran nuevos conocimientos.

Por otra parte, inquiriendo sobre el termino metodología consultado en el diccionario de la real academia de la lengua española se define por metodología "al conjunto de métodos que se siguen en una investigación científica o en una exposición doctrinal,

entendiendo por métodos aquellos procedimientos que se siguen en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla."

De igual modo en el diccionario pedagógico se entiende por metodología

> el conjunto de criterios y decisiones que organizan de forma global la acción didáctica en el aula, determinando el papel que juega el profesor, los estudiantes, la utilización de recursos y materiales educativos, las actividades que se realizan para aprender, la utilización del tiempo y del espacio, los agrupamientos de estudiantes, la secuenciación de los contenidos y los tipos de actividades

En relación a lo anterior Latorre y Seco (2013) refiriéndose a estrategia metodológica mencionan

> La estrategia es un procedimiento heurístico que permite tomar de decisiones en condiciones específicas. Es una forma inteligente de resolver un problema. Las estrategias, son siempre conscientes e intencionales, dirigidas a un objetivo relacionado con el aprendizaje. Una técnica de aprendizaje es un procedimiento algorítmico. Las estrategias y técnicas son siempre conscientes e intencionales, dirigidas a un objetivo relacionado con el aprendizaje (p. 19).

Por esta razón se entenderá estrategia metodológica como el plancamiento constante por parte del docente para llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje dentro del aula en el cual este deberá utilizar distintos métodos y técnicas para lograr aprendizaje significativo.

Al analizar los principios anteriores, es importante destacar que si se aplica la tecnología en el proceso de Enseñanza de la Geometría de manera correcta, todos estos principios se pueden abarcar de manera integral, pues ese es el objetivo de utilizar esta metodología de resolución de problemas y tecnología.

2.5. El uso de la tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría

Al buscar información sobre tecnología aplicada en la Enseñanza de la Geometría, es común encontrar el concepto de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), tal es el caso de lo planteado por González (2001),

> Los SGD se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado. Estas acciones producen construcciones geométricas más o menos complejas en las que algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y "arrastrados" por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción (p. 278).

Los SGD como plantea el autor son software en los que existe la posibilidad de dibujar objetos geométricos, algo que resulta imprescindible para lo que se pretende realizar en la presente investigación.

La Geometría tradicionalmente es visualizada como un recetario de fórmulas que se deben memorizar y luego aplicar para obtener un resultado, por esta razón el uso de la tecnología como herramienta de apoyo, especialmente los Sistemas de Geometría Dinámica, contribuyen para que el determinar una solución sea un procedimiento común, relacionado a lo cotidiano, para González (2001),

> ... la geometría no se concibe como un cuerpo codificado de conocimientos a transmitir, sino como el resultado de una actividad de los sujetos sobre determinados objetos de su entorno. En un SGD tales objetos son el resultado de una modelización computacional de determinados conceptos geométricos y las actividades a desarrollar están condicionadas por el tipo de comunicación que se establece con el sistema informático (p. 279).

Finalmente luego de conocer las características principales que poseen los Sistemas

de Geometría Dinámica, se puede apreciar que dichos instrumentos aplicados de manera correcta y junto con un enfoque de resolución de problemas, pueden contribuir a solucionar las dificultades expuestas anteriormente y a cumplir con todos los procesos que involucra resolver un problema geométrico.

2.6. GeoGebra

El programa GeoGebra desarrollado por Markus Hohenwarter es un software que permite trabajar en temas de Geometría, Álgebra, Estadística, hojas de cálculo, entre otros; la página oficial lo describe como

> "Un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países."

Además, se detalla que el programa se ha convertido en el líder de proveer software dinámico, con el fin de innovar en la Enseñanza y Aprendizaje de las ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas.

Con la utilización de este software de Geometría dinámica los estudiantes tienen la posibilidad de crear hipótesis propias, sobre la aplicación de los conceptos que ya poseen, y con la guía adecuada llegar a la construcción de conocimientos que hasta ese momento no tenían, como lo argumenta Arias (2011) "El GeoGebra facilita el aprendizaje del álgebra, geometría y la integración de otros contenidos matemáticos, esto mediante un ambiente colaborativo con la utilización de las TIC en el aula. Es una herramienta provechosa en la formulación de hipótesis por parte de los estudiantes" (p. 2).

En relación con lo anterior Ortiz (2012) define GeoGebra como "una herramienta dinámica y gratuita con la que le damos la oportunidad al estudiante de descubrir por

sí mismos, es decir, que mediante el análisis y la exploración, y una guía adecuada, el estudiante pueda construir sus propios conocimientos" (p. 3).

Como lo han mencionado los autores, este software es una importante herramienta que se debe tener en cuenta en el desarrollo de una lección, si el objetivo es trabajar bajo un enfoque de Resolución de Problemas, en donde el estudiante construya el conocimiento a partir de su experiencia.

La razón principal para definir a GeoGebra como un software especial para trabajar con esta metodológica, es su versatilidad y el dinamismo que aporta en el proceso de aprendizaje de la matemática, para Peña (2010) el programa "Se abre a la educación para interactuar dinámicamente con la Matemática, en un ámbito en que se reúnen las Geometría, el Álgebra y el Análisis o Cálculo" (p. 168).

Un aspecto que resulta relevante destacar es que GeoGebra, es un software gratuito y por lo tanto de fácil obtención para cualquier persona que tenga acceso a Internet, además, la interfaz con la que se trabaja es sencilla y práctica, Peña (2010) describe el entorno de trabajo estableciendo que

> ofrece dos ventanas, una algebraica y otra geométrica, que se corresponden la una con la otra. Esto es, una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Por tanto, consta de dos secciones bien definidas desde las que se puede, por un lado, dibujar todo tipo de formas y figuras geométricas así como realizar cálculos de áreas, perímetros, vectores, etc (p. 168).

Incluso cuando se menciona que GeoGebra es un programa que posee una estructura sencilla de trabajo, es necesario que el usuario conozca algunos de sus comandos principales, así como el uso de cada una de las herramientas con las que se cuenta, para sacar el mejor provecho en su implementación. El software permite la creación de construcciones en muchas áreas de la matemática, que van desde lo más sencillo, hasta

programaciones muy elaboradas en las que se requiere un conocimiento profundo de la aplicación.

2.7. Unidad Didáctica

El objetivo de la presente investigación es la construcción de una Unidad Didáctica dirigida al docente, para abordar los temas de Geometría Analítica en décimo año de la educación diversificada, por esta razón resulta importante definir que se entenderá por Unidad Didáctica.

Para García (2009) una Unidad Didáctica es:

> Un conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje (motivación, relaciones con otros conocimientos, objetivos, contenidos, método y estrategias, actividades y evaluación) con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo (p. 1).

También Cubillo et al. (2014) lo define como:

> Un instrumento organizado y sistemático que sirve como apoyo curricular en respuesta de las necesidades educativas; que incluye en su construcción las habilidades a desarrollar, contenidos, estrategias y actividades para construcción de conocimientos, así como actividades de comprensión y evaluación. (p. 47)

A partir de las definiciones anteriores, en este documento se entenderá por Unidad Didáctica al instrumento que incluye los contenidos, actividades y las estratégias para la construcción de conocimientos, necesarias para abordar un tema específico, respondiendo a las necesidades educativas de los estudiantes y siendo un apoyo para el docente.

Capítulo 3

Marco Metodológico

A continuación, se presenta la manera en que se desarrollará cada uno de los objetivos planteados en el presente trabajo de investigación.

3.1. Tipo de Investigación

Esta investigación se instaura en el paradigma Cualitativo: se fundamenta en un proceso inductivo donde se explora y describe sobre un problema en específico, para luego generar perspectivas teóricas. En la mayoría de las investigaciones no se prueban hipótesis, sino que estas se generan durante el proceso y van refinándose conforme se recaban más datos o son un resultado del estudio.

Bravo y Buendía (1994) citados por Barrantes (2014) expresan "Este enfoque pone énfasis en la profundidad y sus análisis no, necesariamente, son traducidos a términos matemáticos; de hecho: la escogencia de un problema surge generalmente de una pregunta que se hace, a la que no se le puede dar una explicación con los conocimientos en ese momento" (p. 95).

3.1.1. Primera Fase: Diseño del proyecto de investigación

Para acceder a la información se presentan dos fuentes principales: revisión bibliográfica y trabajo de campo, mediante la aplicación de entrevistas a docentes de secundaria que posean conocimiento de los temas de interés (Ver Anexo 2).

La revisión bibliográfica se llevó acabo utilizando los recursos que ofrece la Biblioteca Arturo Agüero Chaves, tomando en cuenta tanto la colección general como las bases de datos a las que tiene acceso la Universidad. El objetivo de dicha consulta de bibliografía es crear una base teórica fuerte y formal, tanto en enfoques relacionados a la resolución de problemas y uso de tecnologías en la Enseñanza de la Matemática, como en la teoría referente a Geometría Analítica.

La entrevista (Ver Anexo 2), se aplicó a 36 docentes de secundaria, que desempeñan su labor en instituciones de la zona de Occidente (circuito 02), entre los colegios que se visitaron se tienen: Liceo Nuestra Señora de los Ángeles, Colegio Bilingüe San Ramón, Colegio Diurno de Naranjo, Colegio Patriarca San José, Colegio Bilingüe de Palmares, Colegio Dr. Moreno Cañas, Liceo de Magallanes, entre otros. Para llevar a cabo las entrevistas se procedió con la solicitud de los permisos correspondientes a los directores de cada Institución y a los docentes implicados, cabe destacar que en la primera etapa se entrevistó a 6 docentes con el objetivo de evaluar el instrumento y verificar si se recolecta la información deseada y que sea de utilidad para la investigación, dicha muestra no se consideró para el trabajo final.

La entrevista se aplicó a los docentes anteriormente mencionados, con el objetivo de identificar cuáles son las dificultades mas importantes que se presentan en el aula, al momento de trabajar los temas de Geometría Analítica, con el fin de que la Unidad Didáctica satisfaga esas dificultades y sea útil para el docente.

Además, se indagó sobre los programas informaticos que más utilizan los docentes en el desarrollo de las lecciones. con el fin de escoger apropiadamente el Sotware que se tendrá como base en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

Al escoger los docentes a entrevistar no se limitó a solo profesores que impartan décimo año, pues resulta importante tanto la opinión de quienes han tratado temas de Geometría Analítica, como de quienes aplican regularmente tecnología en sus lecciones, además de aquellos que no utilizan ningún recurso didáctico, para que de esta forma la Unidad Didáctica fuese de provecho para los educadores.

Estas son las razones fundamentales del porque se opta por aplicar un instrumento a docentes de secundaria, pues la información recabada sirvió de guía en la creación de una Unidad Didáctica versátil e innovadora, que satisface las necesidades de profesores que trabajan con distintas metodologías.

Debido a lo anterior, al terminar de aplicar las entrevistas se debe procedió a realizar un análisis de la información obtenida, por el tipo de instrumento, resultó provechoso analizar las respuestas abiertas de los docentes en lugar de limitarse a evaluar cuantitativamente los resultados. es importante enfocarse en aspectos claves que se ven evidenciados claramente al final de ésta investigación, uno de estos es la elección de un software educativo que sea conocido por la mayoría de los docentes entrevistados.

Además, identificar las dificultades que se presentan en el aula al estudiar el tema de Geometría Analítica, hizo que la Unidad sea un material diferente e innovador, tomando en cuenta que los problemas que se planteen sean afines con los establecidos en las últimas pruebas de Bachillerato realizadas por el Ministerio de Educación Pública.

3.1.2. Segunda Fase: Elaboración de la Unidad Didáctica

Como una segunda fase se realizó la propuesta didáctica para abordar el tema de Geometría Analítica, con el fin de solventar las necesidades evidenciadas por los docentes en las entrevistas aplicadas.

Por esta razón, al inicio de la unidad se creó un breve manual que específica, cómo utilizar los comandos que se encuentran en GeoGebra. pues es el software que los docentes entrevistados más conocen. asimismo se planteó la siguiente estructura a lo largo de la unidad:

- **Caja de definición:** en la cual se presentan definiciones formales sobre los contenidos que se presentan en el tema de geometría analítica.
- **Caja de ejemplo:** en esta caja se presentan algunos ejemplos contextualizados, o simplemente ejercicios con el fin de trabajar los contenidos.
- **Caja de problema:** se presentan problemas de creación propia. en los cuales se espera que los estudiantes, generen nuevos conocimientos a partir del problema planteado.
- **Caja de recuerde:** la idea de esta caja es recordar algunos conocimientos previos que son de importancia para abordar algunos conceptos desconocidos.
- **Caja de observación:** se presenta con el fin de concentrar fórmulas o procedimientos necesarios para abordar nuevos contenidos.
- **Caja de lista de ejercicio:** en este aspectos se proponen algunos ejercicios complementarios para que el docente los trabaje en clase o como trabajo extraclase, es importante resaltar que la mayoría de los ejercicios son los que se han presentado en los exámenes del ministerio de educación en años anteriores.

En general, se presentan construcciones en GeoGebra a lo largo del documento, estas construcciones tienen distintos fines, algunas se presentan en las actividades para trabajar con el aprendizaje por descubrimiento, otras se presentan con el fin de concretar alguna definición y para ayudar el aspecto visual de un problema, con el fin de llegar a una solución satisfactoria.

Es importante resaltar que el docente que desee utilizar alguna de estas construcciones puede hacerlo de forma factible, ya que se presentan códigos de respuesta rápida "Código QR" los cuales, por medio de un dispositivo móvil con la aplicación de lectura adecuada, lo enlaza a las construcciones que se encuentran en una carpeta pública en dropbox.

Asimismo, para la creación de la unidad se consideró importante una guía para elaborar cada construcción las cuales se encuentran en los anexos. (Ver Anexo de la Unidad didáctica pág. 205).

3.1.3. Tercera Fase: Aplicación de la Unidad Didáctica

Como una tercera fase de la investigación se aplicó la Unidad Didáctica en dos colegios de la zona a una población de 46 estudiantes, en el Colegio Bilingüe de San Ramón se aplicó a un grupo de Décimo conformado por 18 estudiantes y otro de undécimo año con 11 integrantes, y en el Colegio Científico de San Ramón al grupo de Décimo año que consta de 17 educandos.

Se aplicó un diagnostico a los estudiantes (Ver anexo 5), con el fin de determinar el nivel cognitivo con el que cuentan en relación con los temas abarcados en el desarrollo del Trabajo, este diagnóstico se aplicó una lección antes de la aplicación de la Unidad Didáctica.

Para verificar el funcionamiento de la Unidad, se procedió a impartir una lección a cada grupo de estudiantes de los mencionados anteriormente, en donde uno de los integrantes del presente Trabajo Final de Graduación y el profesor colaborador a cargo del grupo, llenaron una guía de observación que se elaboró con anterioridad (ver anexo 4), esto con el fin de establecer criterios de funcionabilidad para el trabajo que se está desarrollando a partir de los resultados obtenidos, además de medir el alcance de los objetivos propuestos y la reacción del grupo de estudiantes ante la aplicación y desarrollo de la Unidad Didáctica.

Por otra parte, al finalizar cada lección el docente que aplicaba la Unidad solicitó a los estudiantes partícipes de la clase, que llenaran una breve cuestionaio (ver anexo 4), para establecer el grado de satisfacción de los estudiantes con la metodología utilizada para impartir los contenidos.

3.1.4. Cuarta Fase: Análisis de los resultados

Con respecto a la reforma educativa, se realizará una breve reseña de como fue el proceso que llevó a la reforma curricular en Matemática y a los planes de estudio con los que se está trabajando actualmente. Se analizarán los cambios que esta reforma propuso, comparando con lo establecido en los planes de estudio anteriores, se dentrá en cuenta la estructura del sistema educativo del país y las necesidades que presenta la población estudiantil.

Con respecto a los libros de textos presentes en el mercado, los cuales son utilizados por algunas instituciones educativas para abordar los temas de matemática en décimo año, el principal objetivo corresponde a analizar la completitud del tema de Geometría Analítica. la presentación estética, la relación con los programas de estudio del ministerio de educación pública así como el enfoque de resolución de problemas, los conceptos

y la utilización de la tecnología para abordar el tema en estudio.

Para llevar a cabo el análisis se tendrán en cuenta los siguientes cuatro aspectos:

- Datos generales del libro.
- Aspectos específicos sobre los contenidos de Geometría Analítica: forma de introducir los conceptos para el tema de circunferencia.
- Aspecto generales de la circunferencia: punto interior, punto exterior, recta tangente, secantes, exteriores, paralelas y perpendiculares a la circunferencia, traslaciones de la circunferencia.
- Comentarios y conclusiones: Cuánto se ajusta al programa del MEP, tanto desde el punto de vista de contenidos como metodológicamente, utilizando la tecnología.

Para determinar las dificultades presentes al momento de impartir los temas de Geometría Analítica en las aulas de secundaria, se analizarán los resultados de las entrevistas aplicadas a los docentes (Ver anexo 2), en específico las respuestas obtenidas en las preguntas 15,16,17,18. las cuales están relacionadas con el trabajo en las clases de geometría.

Capítulo 4

Análisis de los resultados

4.1. Análisis Reforma Educativa

El proyecto de la reforma inicia por la propuesta que el Ministro de Educación Pública en ese momento el Dr. Leonardo Garnier Rímolo le hace a Ángel Ruiz (mismo autor del cual se está analizando el documento). para realizar cambios en el sistema curricular de matemática. la comisión encargada de redactar el documento de la nueva propuesta se conformó:

> "Hugo Barrantes y Edison de Faria (de la Universidad de Costa Rica), Edwin Chaves y Oscar Salas (de la Universidad Nacional) y Ricardo Poveda (profesor de una institución de educación secundaria nocturna y de la universidad Nacional). Esta primera comisión contó rápidamente con el apoyo de Luis Hernández y Miguel González (docentes en servicio del MEP) y Damaris Oviedo (docente de primaria de una escuela privada)"

Posteriormente el autor habla sobre la colectividad que se dio para redactar el documento en la mayoría de las ocasiones, sin embargo, aclara: "Sus autores De Faria en Relaciones y Álgebra, Barrantes en Geometría y Medidas, Chaves en Estadística y probabilidad, Poveda en números."

Excepto por Ricardo Poveda, las demás personas encargadas de redactar los nuevos planes no son docentes de secundaria o primaria, por consecuente es importante preguntar ¿Qué papel desempeñaron estas personas que pertenecían a la comisión, en especial los profesores de secundaria y primaria?

Simultáneamente en este mismo aspecto el autor cita:

> la comisión redactora incluyo como miembros plenos de la misma a los tres docentes que habían participado inicialmente como apoyo técnico en el diseño curricular debido a sus significativos aportes a la segunda propuesta (Hernández, González y Oviedo)

Es decir el apoyo que estos docentes hacen a la propuesta se da hasta la creación de la misma y a raíz de las recomendaciones que se le ofrecieron en los debates y mesas redondas, además estos educadores obtuvieron el cargo de miembros plenos, cuando la propuesta estaba adelante y no desde el inicio, aunque formaban parte de dicha comisión.

Se considera que la comisión debió estar conformada desde un inicio en su mayoría por docentes en servicio del MEP tanto de primaria como de secundaria, ya que quienes estarán a cargo de trabajar con los nuevos planes son los mismos docentes y a partir del conocimiento empírico que estos poseen podrían abordar de forma más integrada las habilidades de razonamiento en los estudiantes.

Por otra parte las personas citadas anteriormente poseen mucho conocimiento en el área, sin embargo, trabajan en instituciones superiores donde la enseñanza es distinta por la madurez de los estudiantes.

Asimismo Ángel Ruiz ilustra sobre las reuniones que se dieron con los asesores regionales cuando ya estaba lista la propuesta inicial del los nuevos planes, por otro lado el mismo autor describe: "existen 27 sedes regionales educativas que se encargan de administrar la educación. En casi todas hay un asesor pedagógico de matemáticas..."

Con lo cual queda claro que si ya la población de secundaria y primaria, estaba un poco aislada del proceso de cambio, aún más porque no todos podían participar en las reuniones para debatir la propuesta, dado que en algunas sedes no contaban con un asesor.

La propuesta de cambio curricular se sometió a debates en los cuales participaron entidades como la UCR, UNA UNED, ITCR, ANDE y otras organizaciones, la Escuela de Matemática del ITCR criticó la poca participación de docentes, gremios y entidades que debían participar en la creación de los programas de estudio. A raíz de los reproches hechos por la escuela del ITCR se cita en el documento en análisis: "No sólo envió su reporte privadamente al organismo que había solicitado su parecer, sino que lo divulgó ampliamente en la comunidad educativa..."

Era clara la disconformidad por parte de la "comisión" de que todo el sistema educativo tuviese acceso a la propuesta, no solo por lo que el autor expresa anteriormente sino también por lo que él mismo añade al mencionar que debía ser un proceso rápido: "el tiempo era fundamental, pues era crucial lograr su aprobación e iniciar su instalación dentro de la administración de Garnier"

También el secretario general del APSE Mariano Rodríguez comenta al respecto: "en una materia tan importante como la Matemática no se pueden hacer cambios precipitadamente, sino en forma consensuada, luego de una amplia reflexión. Esta prisa es lo que molesta al docente"

En general al realizar cambios en cualquier área, se debe considerar principalmente que generen el bienestar de todos los involucrados o el de su mayoría, que se realice un cambio en aspectos curriculares debe ser minuciosamente estudiado y en este caso parece ser que la comisión y el ministro de la administración anterior necesitaban apresurarlo.

Después se hace alusión a las reacciones negativas que los sindicatos del ANDE y APSE (como se cito anteriormente) hacen a las propuestas, sin embargo, estas llegaron tarde porque este proceso ya estaba bastante avanzado, una de las molestias que la comisión parecía evitar.

Otro de los entornos que se desarrolla en este análisis es la situación actual de la Matemática en primaria y secundaria en el país, donde el mismo documento fundamenta los problemas que se reflejan en las distintas pruebas de evaluación de Matemática a educandos, donde los resultados son poco satisfactorios, por otro lado surgen las siguientes inquietudes ¿qué es lo que provoca estas deficiencias en el área de Matemática? ¿Son los planes de estudio anteriores los causantes de estos resultados ó es el problema más complejo?

Conjuntamente en la lectura se hace mención sobre aspectos importantes, se habla de la conformación de la educación donde las universidades privadas son en su mayoría formadoras de los docentes que están actualmente en servicio, principalmente en el área de primaria.

También se explica que son pocos los accesos a estudios específicos en modalidades o especialidades matemáticas que ofrecen en general las universidades. Además de los "docentes exprés" que califica Ángel Ruiz.

El mismo autor resalta estas debilidades: "ausencia de un sistema integrado y continuo de capacitación docente. Ausencia de criterios de exigencia para la selección de postulantes a docentes en las universidades nacionales: los estudiantes (salvo excepciones) se reclutan de los percentiles de universitarios de rendimiento más bajo"

Si de antemano existen problemas que son de conocimiento y que el mismo autor puntualiza, ¿por qué en la comisión solo se le dio relevancia a la modificación de los programas?

Por ejemplo, si es de conocimiento nacional el mal control sobre la selección del personal que se encarga de la educación y estos son los que van a estar a cargo de implementar los nuevos planes, ¿qué cambios o que evaluaciones se les hicieron para considerar que con esta propuesta curricular la situación en las aulas sería distinta?

Asimismo, la preparación que se le da en las universidades se centra más en la ilustración académica que en la enseñanza de la pedagógica, esta situación se refleja en circunstancias del pasado, por ejemplo en el 2004 en el periódico del semanario universidad, se publica la noticia acerca de la propuesta del exministro de educación Manuel Antonio Bolaños para modificar o eliminar las pruebas de bachillerato, el dirigente magisterial añade:

> "los docentes necesitan constante capacitación pues en las universidades les hablan de metodologías modernas, pero al llegar al aula se encuentran con pupitres en mal estado y pizarras donde la tiza se desmorona. En el aula universitaria lo preparan a uno para condiciones modernas pero la realidad no es así".

Se sabe del problema que existe en las aulas por la mala preparación docente (algunas universidades) y por la falta de recursos didácticos, sin embargo este problema se sigue arrastrando y aún así, estos nuevos programas están en alguna medida siendo aplicados en las instituciones.

Por otra parte el documento en análisis inicia argumentando sobre los aspectos que se deben tomar en cuenta para proponer una reforma educativa por ejemplo menciona: "no es lo mismo hacer cambios educativos en una nación homogénea o en una partida por desigualdades socioeconómicas graves".

De esta manera, para realizar un cambio en el sistema educativo se debe comparar las necesidades de la población educativa, de esta forma se puede mencionar que Costa Rica cuenta con un sistema que está estructurado por los distintos niveles académicos (primaria, secundaria, educación diversificada), además por instituciones rurales y

urbanas, por consecuente economías distintas lo que marca diferencias al acceso de materiales educativos, este definitivamente era un aspecto que se debía considerar en la realización de los nuevos planes, pues no todas las instituciones cuentan con herramientas sofisticadas para trabajar de forma satisfactoria estos programas. Sin embargo, los planes de estudio si involucran el uso de la tecnología, en las cinco áreas matemáticas (números. medidas, Geometría y probabilidad, relaciones y álgebra) a través de software, por ejemplo en el propio escrito de la reforma de cambio curricular de los programas de estudio de matemáticas actuales, MEP cita:

> las actividades de cálculo en el aula permiten fortalecer la búsqueda de soluciones distintas. El registro, explicación, crítica y comunicación de estrategias de cómputo permiten favorecer procesos cognitivos importantes, que ayudan en el desarrollo de la competencia matemática (p. 50)

Se debe tomar en cuenta el acceso a las tecnologías y el uso que se le dé a estas, pues actualmente la calculadora más que un apoyo se convirtió en una dependencia para el cálculo tanto en secundaria como en primaria.

Se debe hacer un cambio en el sistema educativo y definitivamente se deben formar seres pensantes y críticos para la sociedad, situación que se va perdiendo según María Mayela Calvo (2008):

En la Enseñanza de la Matemática se ha dejado de lado el pensamiento analítico y reflexivo, el cual ha sido substituido por la memoria y la mecanización generada principalmente por la repetición de ejercicios" (p. 129).

Esta nueva reforma en alguna medida busca eliminar la memorización e incluir el análisis, sin embargo, si existen problemas se deben solucionar para así evitar que estos incrementen.

Los problemas en la Educación en Matemática son diversos desde la formación docente, el control o selección de docentes, la falta de capacitaciones, Gaete M y Jiménez W, (2011) mencioan:

> el rendimiento académico en matemáticas, como problema de investigación, es el resultado del efecto combinado de procesos de formación docente, prácticas pedagógicas, planes y programas de estudio, contextos económicos, sociales y culturales diferenciales" (p. 94)

Por esta situación el documento que Ruiz realizó para explicar el proceso de la reforma no tiene consecuencia, ya que él resaltó las dificultades de la Educación Matemática y de los programas anteriores, pero no se reflejan las soluciones para estas, sino que de antemano se proponen los planes arrastrando los problemas propios de preparación y selección docente, que el mismo Ruiz recalcó en todo el documento.

Comparación de las debilidades citadas por el autor acerca de los planes anteriores y los actuales

- Serias carencias en indicaciones metodológicas, evaluación y gestión de aulas pertinentes. precisas y adecuadas a cada año lectivo y área Matemática.

  Esta debilidad estaba en los planes anteriores y en los planes actuales, se considera que es peor porque la metodología debe cambiar y esto demanda más tiempo a la hora de las explicaciones sin embargo la evaluación no cambia se mantiene la anterior por lo que es probable que no solo se dé un cambio parcial en la gestión dentro del aula.

- Imprecisión. confusión e inadecuado tratamiento de la resolución de problemas: no se asume como una estrategia pedagógica, ni se enfatiza como eje central

  Este definitivamente es el eje central de la reforma actual posicionando la resolución de problemas como el camino para el análisis crítico e intuitivo de los

estudiantes mientras en los planes anteriores cuando se abordaba problemas eran similares y no buscaban el análisis, mecanizar los problemas, ya que los ejercicios eran los mismos solo cambiaban las cantidades numéricas.

- Una contextualización artificial que no provoca el interés y la acción estudiantiles, ni mucho menos el uso y construcción de modelos.

  Dentro de un aula es importante que los estudiantes sean participes en el desarrollo de las lecciones, ya que va a generar interés por aprender la Matemática y una de las ideas de los nuevos programas es que el docente sea un facilitador en la resolución de problemas evitando las clases magistrales, para que los alumnos sean protagonistas y no únicamente receptores, como lo expresa Benjamín Franklin en una de sus frases: "Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"

- Ausencia de un lugar apropiado para el uso de las tecnologías (calculadora, computadoras, internet), en correspondencia con las necesidades de la juventud y la sociedad del siglo XXI.

  Este es uno de los ideales que se observa con gran intensidad en los nuevos programas, sin embargo aunque los nuevos programas tienen el uso de la tecnología como uno de sus importantes ejes, si las instituciones no cuentan con recursos necesarios es poco probable que estos ideales se puedan llevar a cabo, siendo también una debilidad en la nueva propuesta, aunque el papel disponga otra situación.

- Desconexión entre las áreas y su relación con otras asignaturas. La ausencia de problemas en contextos reales no favorece este tipo de conexiones.

  Dentro de los nuevos programas se pretende introducir la interculturalidad, utilizando dentro de los problemas situaciones propias de la realidad no ficticias que se relación con otras asignaturas como ciencias, estudios sociales y demás materias.

Para que los estudiantes no vean la Matemática como un requisito para la educación, sino como lo que realmente es, un instrumento que se utiliza diariamente en distintos contextos, pero que lamentablemente se visualiza como algo abstracto y de poca utilidad para la sociedad.

- Debilidad grave en el lugar que se brinda al área de estadística y probabilidad, trascendente para el ciudadano del escenario histórico actual. No solo faltan tópicos esenciales sino que se tratan con un enfoque inadecuado.

  Los nuevos programas resaltan la estadística como un eje principal, siendo ésta una de las áreas de mayor comprensión, buscando eliminar las creencias de que la Matemática es aburrida y difícil, visualizándola como una herramienta útil para la sociedad. Situación que en los programas anteriores no se refleja ya que la estadística solo se utilizaba en la visualización de gráficas ajenas al contexto social de los estudiantes.

- Una bibliografía mínima y dasactualizada que no toma en cuenta una amplia cantidad de las investigaciones relevantes en Educación Matemática, para así poder sostener un programa con solidéz y serios estándares académicos.

  Este punto lo que crítica es el poco interés por parte de los docentes por actualizar su metodología pedagógica basándose solo en los contenidos que señalan los planes, sin embargo, si con estos planes la población docente desea seguir con los mismos ideales no se verá un cambio.

Las ideas que pretenden los programas de estudio son de gran importancia y las diferencias que tiene con los anteriores en varios aspectos son importantes, no obstante, si los docentes continúan trabajando con las metodologías anteriores de nada servirán las nuevas propuestas.

4.2. Análisis libros de texto

Libro 1

Datos generales del libro:

Título del libro: Matemática 10

Editorial: Santillana

Año de publicación: 2016

Contenido general: El libro está subdividido en tres capítulos, para el primer capítulo se tiene el tema de Geometría, el segundo es de Relaciones y Álgebra y el tercer capítulo abarca Estadística y Probabilidad.

Aspectos específicos sobre los contenidos de Geometría Analítica: forma de introducir los conceptos para el tema de circunferencia.

La unidad 1 titulada Geometría relaciones y álgebra, comienza con una breve descripción de lo que significa la Geometría en la vida cotidiana, sobre la Geometría Analítica menciona que tiene aplicaciones importantes en el funcionamiento del GPS, combinado con una imagen de uno de estos aparatos, además podemos encontrar una línea de tiempo clara y concisa de los principales matemáticos que han aportado al desarrollo de estos temas.

También se enumeran las habilidades generales que se van a tratar en este capítulo las cuales coinciden con las propuestas por el Ministerio de Educación Pública, en general la presentación del capítulo es adecuada y puede resultar atractiva al estudiante, especialmente por las imágenes modernas y por la contextualización que se pretende dar a los contenidos.

A lo largo de todo el libro se pueden encontrar diferentes capsulas con notas históricas o hechos curiosos, además de recordatorios con conocimientos previos que los estudiantes necesitan para comprender la materia que se está estudiando.

Con respecto al abordaje de los contenidos el capítulo 1 titulado Conceptos de Geometría Analítica. se inicia con una situación problema, donde se enuncia y se plantean tres preguntas en las cuales su repuesta ayudará a alcanzar la solución, en este punto el docente debe ser un guía que haga que los estudiantes lleguen a la respuesta. solo se quiere que el estudiante analice y responda, argumentando de buena manera pero no necesariamente mediante conceptos matemáticos, pues luego el libro brinda la solución algebraica y en esta parte el docente toma su papel de dirigente y les explica la solución desde el punto de vista formal.

Aspecto generales de la circunferencia: punto interior, punto exterior, recta tangente, secantes, exteriores, paralelas y perpendiculares a la circunferencia, trasladaciones de la circunferencia

Con respecto a los conceptos matemáticos cada definición es acorde con lo que los estudiantes necesitan conocer, la definición de circunferencia según Santillana 2016: "es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama radio.", la definición es correcta y fácil de entender para los jóvenes, pero deja de lado el lenguaje formal que de alguna manera se debe incluir.

La ecuación de la circunferencia es abordada por el libro de forma directa, utilizando un diagrama y brindando la ecuación para la circunferencia de centro (C, P) y $(0, 0)$, en este punto se pierde la posibilidad de que el estudiante logre inferir el cambio en la ecuación si el centro varía, pues al dar ambas ecuaciones de forma explícita no queda campo para el descubrimiento.

En conjunto la teoría es presentada de manera breve y en algunos casos hasta pasa inadvertida por la cantidad de ejercicios o diagramas que la rodea en cada página. en dichos dibujos se utiliza la escala apropiada y el tamaño óptimo.

Comentarios y conclusiones: Cuánto se ajusta al programa del MEP, tanto desde el punto de vista de contenidos como metodológicamente, utilizando la tecnología.

En general la presentación del libro es buena, utiliza colores adecuados y una buena distribución del espacio. las páginas contienen mucha información, pero no se sienten cargadas ni desordenadas

El libro limita el uso de tecnologías a recuadros en los márgenes de las páginas. en los cuales se proponen ejercicios complementarios incluyendo videos y ciertos comandos para seguir en GeoGebra u otros programas, acordes para el docente no tanto para el estudiante. pues la dificultad y los conocimientos previos limitan la aplicación que se les pueda dar. además de que su uso está propuesto solamente como ejercicio extra clase. En la actualidad la mayoría de los dicentes cuentan con dispositivos móviles en los que se puede trabajar de forma dinámica y más sencilla algunos ejercicios, sin necesidad de contar con recursos adicionales, de esta forma el uso de tecnología podría estar incluido en el abordaje de los ejercicios propuestos, no solamente como un complemento.

El libro propone secciones de ejercicios donde se plantea una serie de situaciones problema para ser resueltas por el estudiante, es importante destacar que al ser un libro de texto diseñado para todo el sistema educativo nacional. los problemas no resultan cotidianos para todos los estudiantes pues depende del contexto donde viven. además de que se reducen a simplemente ejercicios con texto, por lo que se pueden plantear problemas reales donde el estudiante investigue y formule las situaciones, de modo que se aplique parte de la teoría ya vista y resulte de interés para cada estudiante.

Libro 2

Datos generales del libro:

Titulo: Matemática: Un enfoque con base en la resolución de problemas

Editorial: Grupo fénix

Año de publicación: 2016

Autores: grupo fénix

Contenido general: Está dividido en tres unidades: unidad I Geometría, unidad II relaciones y algebra, unidad III estadística y probabilidad.

Aspectos específicos sobre los contenidos de Geometría Analítica: forma de introducir los conceptos para el tema de circunferencia.

El libro de grupo fénix se desarrolla principalmente por una secuencia correspondiente al título de unidad correspondiente a Geometría el cual inicia con la breve historia de la Geometría en la cual se menciona el significado, sus principales precursores, además algunos de los primeros problemas geométricos de la historia.

En este libro se desea introducir el tema de Geometría Analítica con la ayuda de un problema sobre estaciones sismológicas en las cuales a raíz de un sismo, se platean preguntas con el fin que el lector sea capaz de encontrar el punto central de una circunferencia, el radio así como la ecuación de la circunferencia; dicho problema es tomado de los planes de estudio del ministerio de educación pública. Posterior se dan dos ejemplos de las gráficas correspondientes a una circunferencia centrada en el origen y con radio 1, y una circunferencia centrada en $(-1, 2)$ y de radio 3. Esto para abarcar la habilidad de representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio, y se deja una lista de 12 circunferencias como práctica.

Para aplicar la habilidad de representar una circunferencia dando su centro y su radio los autores describen

"La ecuación general de la circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$donde $C:(h,k)$ es el centro y r es el radio"

Esta definición es correcta debería de tener aspectos que aclaren, por ejemplos que los valores de h y k son reales.

Después de la definición y se enlistan 12 ejercicios donde se aporta el centro y el radio para que el estudiante sea capaz de escribir la ecuación del círculo que satisface esas características.

Aspecto generales de la circunferencia: punto interior, punto exterior, recta tangente, secantes, exteriores, paralelas y perpendiculares a la circunferencia, trasladaciones de la circunferencia.

La definición de punto interior y exterior a una circunferencia, el libro abarca dos aspectos, en el cual se trabaja con la distancia del centro hacia el punto que se desea saber su condición en el primer caso si el radio de la circunferencia es mayor a la distancia se dice que el punto es interior y en el segundo caso como el radio es menor a la distancia el punto en análisis es exterior.

El aspecto de rectas secantes, exteriores y tangentes, los autores desarrollan el concepto con la ayuda de un ejemplo en el cual se presenta la ecuación de una circunferencia y una recta y se desea conocer si la recta es secante, tangente o exterior a la circunferencia. Se resuelve el ejercicio sustituyendo la recta en la circunferencia, a partir de la ecuación se determina el discriminante si este es mayo que 0 es secante, si es negativo es exterior y si es 0 es tangente.

En contenido de trasladación a una circunferencia se aborda de una ayuda de una gráfica con dos circunferencias con sus respectivas ecuaciones en la cual se observa la trasladación de una respecto a la otra. donde solamente cambia el centro y radio se mantiene igual, para evaluar se dejan 9 ecuaciones con sus respectivos centros para las trasladaciones correspondientes.

En este aspecto para desarrollar una trasladación se limita a dar una ecuación y luego se le da otro centro donde únicamente la idea es cambiar el (h, k) en la ecuación.

Comentarios y conclusiones: Cuánto se ajusta al programa del MEP, tanto desde el punto de vista de contenidos como metodológicamente, utilizando la tecnología.

En cuanto al aspecto de la estética no es agradable, además la metodología utilizada por este libro es meramente tradicional se da la teoría y posterior se presenta una lista de ejercicios repetidos los problemas son tomados del mep, y las definiciones son un poco aisladas de las definiciones matemáticas.

Asimismo. el uso de la tecnología que presenta este libro es un poco separado pues únicamente se menciona el link, y no existe claridad en la utilización del software.

Libro 3

Datos Generales del Libro:

Título: MATEMÁTICA 10.

Editorial: Compas ERV. 2015.

Año de publicación: 2015

Autores: Publicaciones Porras.

Contenido en General: El libro está subdividido en tres capítulos, para el primer capítulo se tiene el tema de Geometría, el segundo es de Relaciones y Álgebra y el tercer capítulo abarca Estadística y Probabilidad.

Al inicio se cuenta con una guía de cómo utilizar el libro, en donde se define la nomenclatura que corresponde a conceptos, conocimientos, habilidades específicas, historia, actividades, selección única, problemas y ejemplos.

Aspectos específicos sobre los contenidos de Geometría Analítica: Forma de introducir los conceptos para el tema de circunferencia

Se introduce la representación geométrica de una circunferencia mediante un problema, en el cual se deja espacio para plantear una estrategia de solución y otro espacio para la respuesta. Seguidamente Porras (2015) brinda la siguiente definición de circunferencia

Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de un plano que equidistan de un punto fijo del mismo plano. Dicho punto fijo se llama centro $C(h, k)$; a la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se denomina radio r (p. 11).

Posteriormente se brindan cuatro ejemplos, se propone una actividad que consta de dos apartados en una se proporciona el centro y radio de la circunferencia y los discentes deben realizar el dibujo esto para seis ejercicios y para el segundo apartado se brinda la gráfica de la circunferencia en el plano coordenado y se solicita el centro y radio de la misma.

Se evidencia el uso de tecnología, el software utilizado es GeoGebra y se cuenta con dos páginas de información con los nombres de cada herramienta con la que cuenta el software y cómo utilizarlo para graficar circunferencias dado su centro o su radio.

En cuanto a la representación algebraica de una circunferencia Porras (2015) brinda la siguiente definición "En Geometría Analítica, la gráfica de una circunferencia, con centro $C(h,k)$ y radio r se puede expresar algebraicamente mediante una ecuación estándar de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (p. 15)

Se brindan igual cuatro ejemplos y se propone una actividad que consta de dos apartados, en el primero se brinda la ecuación algebraica de la circunferencia y se solicita la gráfica y en el segundo se da la representación y se solicita la ecuación algebraica.

Aspecto generales de la circunferencia: Punto interior, punto exterior, recta tangente, secantes, exteriores, paralelas y perpendiculares a la circunferencia, traslaciones de la circunferencia

Porras (2015) refiere a la traslación de una circunferencia como "Para trasladar la gráfica de una circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ con centro $C(h,k)$ y radio r; se determina un nuevo centro $O(a,b)$ en el plano cartesiano con igual radio, cuya ecuación estándar corresponde a $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (p. 16)

Se hace un dibujo de la situación planteada y se brindan un par de ejemplos, seguidos de una actividad y de una explicación con dos ejemplos de problemas de distancia entre puntos, igualmente concluyen con una actividad.

De igual manera se introduce el tema de punto interior y punto exterior haciendo uso de un problema que modele y haga intuir un poco la definición, se brindan tres gráficas para explicar punto interior, punto exterior y punto sobre la circunferencia y se proporciona una definición algebraica para cada situación. Analizan tres ejemplos y se propone una actividad, igualmente para el tema de recta tangente, secante y exterior.

El tema de rectas paralelas y perpendiculares lo abarcan con un problema, luego se brinda una clara explicación de la ecuación de una recta se desarrollan ejemplos y

se proponen actividades. Por último se hace uso de la tecnología nuevamente con una clara explicación sobre la utilización del software GeoGebra para crear rectas secantes, tangentes, exteriores a una circunferencia.

Comentarios y conclusiones: Cuánto se ajusta al programa del MEP, tanto desde el punto de vista de contenidos como metodológicamente, utilizando la tecnología

Estéticamente quizá se pudo no cargar tanto las páginas, como hay páginas con espacio adecuado hay otras que visualmente están muy cargadas de información y ejercicios.

Para los ejercicios de graficación en cuanto al círculo y circunferencia, se pudo brindar una cuadrícula para resolver cada ejercicio, ya que se dejó el espacio para realizar el dibujo

Para los problemas planteados se pudo utilizar ejercicios más relacionados con la vida cotidiana, en algunos temas se utilizó problemas en los que si no se contara con el dibujo no se lograría interpretar adecuadamente el problema.

No se evidencia el uso de la historia en ninguno de los apartados.

4.3. Dificultades presentes en la enseñanza del tema de Geometría Analítica en Décimo año

De los docentes entrevistados, se percibe que la metodología de Resolución de Problemas planteada por el Ministerio de Educación Pública, se dificulta a los estudiantes, ya que no cuentan con los conocimientos básicos necesarios para comprender los pro-

blemas, además tienen el hábito de no pensar y pretender que existe una receta del cómo hacer las cosas, como lo menciona el coordinador de la Sección de Matemática Carlos Manuel Ulate Ramírez, Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica en una entrevista del periódico Semanario Universidad sobre las pruebas de diagnóstico en Matemática al mencionar:

> el Ministerio de Educación Pública (MEP), les da a los profesores un plan de trabajo para preparar a los estudiantes solamente para pasar la prueba. Aseguró que el alumnado no aprende a analizar, solo a resolver un procedimiento con calculadora

Esta fue una de las observaciones señaladas por la población docente entrevistada, pues se deja en claro que el estudiante está acostumbrado a utilizar la calculadora sin saber en el fondo que procesos matemáticos se están llevando a cabo y que en algunas ocasiones pareciera que el Ministerio de Educación Pública, ve la calculadora como uso de la tecnología y está metodología abarca más que este instrumento, sin embargo, en respuesta al uso de tecnología se obtuvo como resultado que los docentes la utilizan con poca frecuencia en sus lecciones, argumentando que se debe a la falta de tiempo para elaborar el material necesario, falta de recursos en las aulas, así como la poca preparación en el uso de software educativos. Al respecto en una noticia del periódico la nación de febrero 2013 el viceministro de educación en ese año, añade

"El punto de partida que tenemos no es el ideal, hay diferentes niveles de conectividad y hace falta que los docentes que recién se gradúan aprendan no solo a usar la tecnología, sino a enseñar con ella", declaró el viceministro de Educación, Mario Mora.

Al respecto Ángel Ruiz participe de la creación de los programas vigentes actualmente, aporta en el informe de la nueva reforma curricular

> es la ausencia de tiempo suficiente para el desarrollo de fines curriculares en el aula, debido por ejemplo a un abarrotado conjunto de contenidos a cumplir en un cronograma muy rígido. Por el otro lado, obedece a una falta de elementos de apoyo para abordar estrategias pedagógicas distintas que requieren, entre otras cosas, insumos y materiales específicos... ausencia de formación docente en enfoques alternativos asociados de manera específica a la labor de aula en la enseñanza de las Matemáticas (p. 58)

Se puede observar según la opinión tanto del viceministro de Educación del 2013 y profesor Ángel Ruiz que se debe dar una incorporación de la tecnología, para enriquecer el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, pero también de estrategias pedagógicas que incorporen esta herramienta como parte indispensable del currículo, además de materiales específicos para ciertos temas del programa de estudio.

Este fue uno de los puntos que arrojaron las entrevistas, donde se concuerda que si se elabora material empleando algún software dinámico facilita la labor docente, y permite la comparación directa del Álgebra con la Geometría, además una visualización más cercana a la realidad, y se crean lecciones agradables para el discente.

Tomando en cuenta que no todas las instituciones tienen los recursos tecnológicos necesarios, una solución es la utilización de los dispositivos móviles de los estudiante, ya que según Muñoz y Nicaragua (2014) "el 86.8 % de los hogares contaba en el 2010 con al menos un teléfono celular, y que de este porcentaje, al menos un 16,5 % utilizaban Internet por celular", se percibe entonces que incorporar este dispositivo es posible, dado que la mayoría de los estudiantes lo disfrutan.

Asimismo, el utilizar el celular dentro de las aulas no es perjudicial siempre y cuando se manipule de manera adecuada y con la guía del educador como lo menciona Cantillo, Roura y Sánchez (2012)

> "Una solución posible a esta dualidad entre la prohibición de los dispositivos móviles en el aula y la necesidad de desarrollar proyectos educativos que liguen la escuela con el entorno social y tecnológico en el que se desenvuelve el alumnado fuera de ella, es optar por una entrada de los dispositivos móviles autoregulada por el propio profesorado y el alumnado a la vez, exponiendo el tema en común y buscando entre todos soluciones por consenso"

Además, la mayoría de los docentes consultados, conocen y han utilizado el software GeoGebra, el uso de dicho software se debe a que es libre y de fácil instalación. Además, es el recurso tecnológico que sugiere el Ministerio de Educación Pública en los programas vigentes, ya que es de fácil manipulación; los educadores manifiestan que es una herramienta útil, en la que se puede crear contenido interactivo, que se adapta a diferentes temas, especialmente en Geometría, pero también en Álgebra y Probabilidad. Al ser factible su manipulación, los entrevistados proponen que el estudiante debe utilizarlo directamente para descubrir y crear conocimiento, de esta forma se logra familiarizarlos con las tecnologías educativas facilitando y agilizando el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es importante destacar que este software es gratuito y de fácil instalación en los dispositivos móviles.

En cuanto a la implementación de material de apoyo para las lecciones se evidencia que los docentes prefieren utilizar material de elaboración propia que un libro de texto, pues argumentan que los libros que utilizan son solo una base para enriquecer sus notas, en ocasiones el uso de textos limita la creatividad tanto del docente como el discente, sin embargo, por lo extenso de los programas de estudio y la falta de tiempo es una herramienta de apoyo. Algunos de los docentes manifiestan que los folletos elaborados muchas veces son meramente teoría, dejando de lado la implementación de tecnología en las lecciones, pues se evidencia el uso de computadora y video proyector ocasionalmente como un recurso, pero no cambia el desarrollo de la lección; es sólo para uso motivacional.

Respecto a las sugerencias brindadas por los educadores, se tiene que la propuesta didáctica que se elaboró debe ser funcional, y abarcar los contenidos establecidos en los programas del Ministerio de Educación Pública, teniendo en cuenta que los ejercicios propuestos se deben adaptar al contexto real del estudiantado y que la dificultad sea acorde a ellos. Además, que la unidad cuente con contenidos de años anteriores (fórmulas o teoremas), pues aunque ya deben ser conocimientos previos, en la mayoría de casos los estudiantes lo necesitan para lograr comprender la nueva teoría. Así mismo debe existir una guía para la utilización del Software dirigida a docentes que no están familiarizados con el programa.

4.4. Análisis Entrevistas Aplicadas

Una vez finalizada la aplicación de la Unidad Didáctica, se lleva a cabo un análisis de los resultados obtenidos en los diagnósticos aplicados a los estudiantes antes de aplicar la Unidad Didáctica, la encuesta dirigida a los discentes después de la aplicación , además de analizar los datos recabados en la guía de observación de los profesores colaboradores.

De los docentes entrevistados, se percibe que la metodología de Resolución de Problemas planteada por el Ministerio de Educación Pública, se dificulta a los estudiantes, ya que no cuentan con los conocimientos básicos necesarios para comprender los problemas, además tienen el hábito de no pensar y pretender que existe una receta del cómo hacer las cosas, como lo menciona el coordinador de la Sección de Matemática Carlos Manuel Ulate Ramírez, Sede de Occidente de la Universidad de Costa Rica en una entrevista del periódico Semanario Universidad sobre las pruebas de diagnóstico en matemática al mencionar:

> "el Ministerio de Educación Pública (MEP), les da a los profesores un plan de trabajo para preparar a los estudiantes solamente para pasar la prueba. Aseguró que el alumnado no aprende a analizar, solo a resolver un procedimiento con calculadora"

Esta fue una de las observaciones señaladas por la población docente entrevistada, pues se deja en claro que el estudiante está acostumbrado a utilizar la calculadora sin saber en el fondo que procesos matemáticos se están llevando a cabo y que en algunas ocasiones pareciera que el Ministerio de Educación Pública, ve la calculadora como uso de la tecnología y está metodología abarca más que este instrumento, sin embargo, en respuesta al uso de tecnología se obtuvo como resultado que los docentes la utilizan con poca frecuencia en sus lecciones, argumentando que se debe a la falta de tiempo para elaborar el material necesario, falta de recursos en las aulas, así como la poca preparación en el uso de software educativos. Al respecto en una noticia del periódico la nación de febrero 2013 el viceministro de educación en ese año, añade

> "El punto de partida que tenemos no es el ideal, hay diferentes niveles de conectividad y hace falta que los docentes que recién se gradúan aprendan no solo a usar la tecnología, sino a enseñar con ella", declaró el viceministro de Educación, Mario Mora.

Al respecto Ángel Ruiz participe de la creación de los programas vigentes actualmente, aporta en el informe de la nueva reforma curricular

> "es la ausencia de tiempo suficiente para el desarrollo de fines curriculares en el aula, debido por ejemplo a un abarrotado conjunto de contenidos a cumplir en un cronograma muy rígido. Por el otro lado, obedece a una falta de elementos de apoyo para abordar estrategias pedagógicas distintas que requieren, entre otras cosas, insumos y materiales específicos... ausencia de formación docente en enfoques alternativos asociados de manera específica a la labor de aula en la enseñanza de las Matemáticas" (p.58)

Se puede observar según la opinión tanto del viceministro de Educación del 2013 y profesor Ángel Ruiz que se debe dar una incorporación de la tecnología, para enriquecer

el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, pero también de estrategias pedagógicas que incorporen esta herramienta como parte indispensable del currículo, además de materiales específicos para ciertos temas del programa de estudio.

Este fue uno de los puntos que arrojaron las entrevistas, donde se concuerda que si se elabora material empleando algún software dinámico facilita la labor docente, y permite la comparación directa del Álgebra con la Geometría, además una visualización más cercana a la realidad, y se crean lecciones agradables para el discente.

Tomando en cuenta que no todas las instituciones tienen los recursos tecnológicos necesarios, una solución es la utilización de los dispositivos móviles de los estudiante, ya que según Muñoz y Nicaragua (2014) "el 86,8 % de los hogares contaba en el 2010 con al menos un teléfono celular, y que de este porcentaje, al menos un 16,5 % utilizaban Internet por celular", se percibe entonces que incorporar este dispositivo es posible, dado que la mayoría de los estudiantes lo disfrutan.

Asimismo, el utilizar el celular dentro de las aulas no es perjudicial siempre y cuando se manipule de manera adecuada y con la guía del educador como lo menciona Cantillo, Roura y Sánchez (2012)

> "Una solución posible a esta dualidad entre la prohibición de los dispositivos móviles en el aula y la necesidad de desarrollar proyectos educativos que liguen la escuela con el entorno social y tecnológico en el que se desenvuelve el alumnado fuera de ella, es optar por una entrada de los dispositivos móviles autoregulada por el propio profesorado y el alumnado a la vez, exponiendo el tema en común y buscando entre todos soluciones por consenso" (p. 9)

Además, la mayoría de los docentes consultados, conocen y han utilizado el software GeoGebra, el uso de dicho software se debe a que es libre y de fácil instalación. Además, es el recurso tecnológico que sugiere el Ministerio de Educación Pública en los programas vigentes, ya que es de fácil manipulación; los educadores manifiestan que es una herramienta útil, en la que se puede crear contenido interactivo, que se adapta

a diferentes temas, especialmente en Geometría, pero también en Álgebra y Probabilidad. Al ser factible su manipulación, los entrevistados proponen que el estudiante debe utilizarlo directamente para descubrir y crear conocimiento, de esta forma se logra familiarizarlos con las tecnologías educativas facilitando y agilizando el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es importante destacar que este software es gratuito y de fácil instalación en los dispositivos móviles.

En cuanto a la implementación de material de apoyo para las lecciones se evidencia que los docentes prefieren utilizar material de elaboración propia que un libro de texto, pues argumentan que los libros que utilizan son solo una base para enriquecer sus notas, en ocasiones el uso de textos limita la creatividad tanto del docente como el discente, sin embargo, por lo extenso de los programas de estudio y la falta de tiempo es una herramienta de apoyo. Algunos de los docentes manifiestan que los folletos elaborados muchas veces son meramente teoría, dejando de lado la implementación de tecnología en las lecciones, pues se evidencia el uso de computadora y video proyector ocasionalmente como un recurso, pero no cambia el desarrollo de la lección; es sólo para uso motivacional.

Respecto a las sugerencias brindadas por los educadores, se tiene que la propuesta didáctica que se está elaborando debe ser funcional, y abarcar los contenidos establecidos en los programas del Ministerio de Educación Pública, teniendo en cuenta que los ejercicios propuestos se deben adaptar al contexto real del estudiantado y que la dificultad sea acorde a ellos.

4.5. Análisis de los resultados obtenidos en los diagnósticos aplicados a los estudiantes

En los diagnósticos aplicados al grupo de Décimo año del Colegio Científico de San Ramón, se evidencia la dificultad en el tema de recta secante, tangente o exterior a una circunferencia, así como la distinción de la ecuación de una elipse.

Para los estudiantes del Colegio bilingüe de San Ramón, se muestra desconocimiento en el tema de la ecuación de la elipse y se complica un poco el tema de punto interior y exterior a una circunferencia.

En general los estudiantes identifican correctamente la ecuación de la circunferencia y su representación gráfica, así como la manera en que se traslada en el plano cartesiano. Esto quizá por ser un tema que se desarrolla al inicio del período lectivo, tal y como se establece en los programas de estudios, por esta razón la aplicación de la Unidad se consideró como un repaso de los contenidos del tema de Geometría Analítica, aunque el incluir la ecuación de una elipse resulta un tema nuevo a nivel de secundaria.

4.6. Análisis de los resultados de la encuesta dirigida a los discentes

Luego de la aplicación de la Unidad Didáctica a los grupos de secundaria, en total 46 estudiantes, se pidió que llenarán una encuesta, con el objetivo de analisar la actitud que tuvieron durante el desarrollo de la lección.

En cuanto a la actitud de los estudiantes antes, durante y al finalizar la aplicación de la Unidad Didáctica, 20 de los educandos tenían interés y lo mantuvieron, diez manifestaron no tener interés y ahora sí, siete no tenían interés y continúan sin tenerlo, seis tenían interés y ahora quieren saber más, y por último tres tenían interés y lo perdieron. En general se evidencia una buena actitud por parte de los educandos en base a los contenidos desarrollados en la aplicación de la Unidad Didáctica.

Con respecto a la metodología de resolución de problemas empleada en la Unidad, el total de los educandos manifiestan que les gustó, argumentan con adjetivos como: diferente, interesante, dinámico, entretenido. fácil de visualizar y didáctico. Según los resultados obtenidos en esta pregunta podemos decir que se cumple con el objetivo de que la Unidad sea versátil, dinámica y novedosa para los discentes, cambiando en gran escala el desarrollo de la lección.

Considerando el uso de tecnología para el mejoramiento del aprendizaje, se obtuvo como resultado que 41 de los discentes está de acuerdo con que se mejora el aprendizaje, argumentan que facilita y agiliza el proceso, simplifica los procedimientos y por lo tanto se ahorra tiempo, mantiene activos e interesados a los estudiantes pues el desarrollo de la clase no es tradicional, es divertido y se relaciona con problemas cotidianos (de la vida real).

Cinco estudiantes no están de acuerdo con el uso de la tecnología pues manifiestan que no funciona del todo, que vuelve dependientes a quienes la utilizan y que no siempre se cuenta con las herramientas necesarias. Es importante destacar que el uso que se le da a la tecnología en la Unidad Didáctica no sustituye los contenidos procedimentales de los temas abarcados, ya que el papel que cumple es el de herramienta de apoyo en la visualización de los problemas planteados.

4.7. Datos recabados en la guía de observación de los profesores colaboradores

Durante el desarrollo de la lección, los docentes colaboradores concuerdan con que los materiales y recursos empleados son excelentes. en relación a los problemas ejecutados durante la aplicación se evidencia que los discentes comprenden lo que se les plantea y además encuentran distintas maneras de obtener la solución. Los problemas son acordes con lo que establece el Ministerio de Educación Pública y con el nivel cognitivo de los estudiantes, además utilizan la tecnología como herramienta de apoyo en la solución.

Se evidencia una concordancia en que el uso de la tecnología da la oportunidad de visualizar los conceptos. lo que genera una mejor comprensión de la materia, logrando que los estudiantes por sí mismos construyan el conocimiento, dando así un aprendizaje por descubrimiento más significativo.

El parecer de los docentes en cuanto a la actitud de los estudiantes ante la metodología de resolución de problemas utilizando tecnología. sugiere que los discentes se muestran interesados, motivados y quizá un poco confundidos, participan y contribuyen con ideas para llegar a la solución de los problemas planteados. Es decir el aplicar la metodología de resolución de problemas empleando tecnología contribuye a la participación constante de los educandos en el desarrollo de la lección.

En general en los resultados obtenidos en la guía de observación se muestra que la metodología empleada en la Unidad Didáctica es aceptada favorablemente tanto por el docente como por el discente, ayuda al desarrollo de la clase de una manera participativa y genera aprendizaje por descubrimiento.

Capítulo 5

Conclusiones, recomendaciones y limitaciones

5.1. Conclusiones

Al desarrollar el trabajo se cumplieron satisfactoriamente los objetivos propuestos, en las siguientes conclusiones se sintetizan los resultados obtenidos al realizar la investigación.

1. El uso del Software educativo en este caso GeoGebra favorece la compresión de los contenidos, los estudiantes pueden manipular las figuras geométricas y al mismo tiempo ver el cambio en su representación algebraica, con lo que se puede no solo entender, sino que crear el conocimiento a partir de los conocimientos previos.

2. La Geometría Analítica es un tema versátil, pues con los contenidos que abarca permite plantear diferentes situaciones, en la vida cotidiana la circunferencia es utilizada para innumerables fines y debido a esto se logró formular una serie de problemas que involucran el contexto real de los estudiantes y que fueron de interés para ellos en el desarrollo de los temas.

3. Relacionar la Matemática con temas cotidianos para los estudiantes tuvo un buen resultado, pues se logró que la teoría estuviera siempre presente como una herramienta para dar solución a los problemas, y no como suelen pensar los dicentes que los conceptos matemáticos no tienen utilidad alguna, en las practicas reales.

4. Al ser una unidad dirigida al docente su papel es clave, pues es quien debe llevar el control, tanto de los tiempos como de las ideas que se presentan en el proceso, los estudiantes resuelven los problemas de diferentes formas y pueden existir variedad de ideas, es responsabilidad del aplicador filtrar las opiniones para construir el conocimiento en conjunto.

5. En la aplicación que se llevó acabo se concluyó que el tiempo que se tiene en el aula para abarcar los contenidos es suficiente, pero se debe aprovechar de la mejor manera posible, si el docente deja que sus estudiantes trabajen sin una guía la solución de una actividad puede comprender la clase completa. se debe siempre escuchar las soluciones y concluir en determinado tiempo.

6. Con respecto a los libros de texto se puede concluir que algunos libros, a pesar de indicar en el título que se trabajan con la resolución de problemas como metodología principal, la metodología empleada en el fondo es la tradicional pues, aunque se incluyan problemas dentro de los ejercicios, el libro no logra cambiar la manera de razonar de los estudiantes.

7. Con respecto al uso de la tecnología en los libros de texto estos proponen diferentes softwares para trabajar, pero en la mayoría de los casos es solo una herramienta para revisar o complementar lo estudiado, la tecnología no cumple un papel importante en el desarrollo de la lección que el libro plantea. Además, carecen de una guía para utilizar el software propuesto, entonces si el profesor o los estudiantes no han trabajado de esta forma la aplicación no será la mejor.

5.2. Recomendaciones

1. El docente debe involucrar al estudiante en todo momento del desarrollo de la lección, tiene la responsabilidad de facilitar al educando las herramientas teóricas necesarias para que él mismo construya el conocimiento.

2. El docente puede elegir los problemas por aplicar dependiendo de las características de cada grupo, la forma de trabajar de los estudiantes varía mucho y por esto el docente debe elegir la mejor manera de llevar acabo el desarrollo de la lección, por lo que no es necesario abarcar todos los ejemplos presentes en la Unidad.

3. Los temas de Geometría Analítica no son los únicos temas nuevos incluidos en los programas de estudio del Ministerio de Educación Pública, por lo que la elaboración de más Unidades Didácticas resulta provechoso para los docentes de secundaria que no tienen todos los materiales para impartir los nuevos temas.

5.3. Limitaciones

Durante la presente investigación surgió la limitación de que los temas de Geometría Analítica en la educación diversificada costarricense corresponden al inicio del plan de estudio para décimo año, y debido a que la presente investigación se llevó a cabo durante el primer semestre del año 2017 la Unidad Didáctica estuvo lista hasta el mes de junio, por lo que al aplicarla los estudiantes ya habían estudiado el tema y hasta había sido evaluado, aun así, de la aplicación se obtuvieron los resultados importantes y se logró evaluar el funcionamiento.

Capítulo 6

Bibliografía

- Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación. el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 4(3). 203-218.
- Álvarez, C. C. (2014). Mediación pedagógica en el área de la geometría en sétimo año: estudio en Costa Rica. Revista electrónica de las sedes regionales de la Universidad de Costa Rica volumen XV, #32, 177-193.
- Arcavi A., Hadas N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 5, 25-45. Traducción propia
- Arias Gallegos, Walter L.; Oblitas Huerta, Adriana; (2014). Aprendizaje por descubrimiento vs. Aprendizaje significativo: Un experimento en el curso de historia de la psicología. Boletim Academia Paulista de Psicologia, Julio-Diciembre, 455-471.
- Arias, R., Guillén, C., & Ortíz, L. (26-30 de Junio de 2011). GeoGebra, una herramienta para la Enseñanza de la Matemática. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática , 1-12.

- Ayestarán (2005). Guía para el trabajo en equipo. recuperado el 13 de 05 de 2017, de: http://www.ehu.eus/documents/1904000/1916168/19+gu%c3%ada+trabajo+equipos.pdf

- Ballestero, E., y Gamboa, R. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. Revista Electrónica Educare , XIV (2), 125-142.

- Ballestero E y Gamboa R (2009) "Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría". Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Universidad Nacional Número 4. p 113- 136.

- Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 40, 1-11.

- Barrantes H (2013) El papel de la geometría en el currículo de Enseñanza primaria y media. I Congreso de Educación Matemática De América Latina. Santo Domingo. Republica Dominicana.

- Barrantes R (2014) Investigación: Un camino al conocimiento un enfoque cualitativo. cuantitativo y mixto. Universidad Estatal a Distancia. San José , Costa Rica.

- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

- Briseño, González y Lugo (s.f.). estrategia de innovación educativa y uso de las tic para el aprendizaje (eticã). obtenido de: http://www.computadoresparaeducar.gov.co/paginaweb/phocadownload/estrategia%20pedagogica%20de%20cpe%20etica.pdf

- Callejo, M, & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48), 64-88. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

- Campos, H. B. (2010). Competencias matemáticas en la enseñanza media. San José, Costa Rica: Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.

- Cerdas, D.(13 de noviembre de 2016). Tecnología en las aulas del MEP sin uso y provecho claros. La Nación. Recuperado de http://www.nacion.com/nacional/educacion/Tecnologia-aulas-MEP-provecho-claros_0_1597240298.html

- Conejo, L; Ortega, T; (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. Educación Matemática. 25() 129-158. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40529854006

- Cubillo, A. Garita, T. Mena, M. Morera, J. Rodríguez, G. Vargas, M. (2014). Unidad didáctica para abordar el tema de transformaciones geométricas en el plano en educación secundaria desde el enfoque de resolución de problemas. (Tesis de Licenciatura). Universidad de Costa Rica. San Ramón.

- De Faria Campos, E. (2007). Tecnología digital y resolución de problemas. cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Número 3, 119-131.

- De Luca, S. L. (2000). El docente y las inteligencias múltiples. Revista Iberoamericana de la educación, 11.

- Díaz, F., & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista, 2.

- Elcizaldc, M., Parra, N., Palomino, C., Reyna, A., & Trujillo, I. (2010). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. Revista de investigación, (71), 271-290.
- Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV, Lleida: SEIEM, 69-85.
- Falk de Losada, M. Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. Boletín de Matemáticas; Vol. 1, núm. 1 (1994); 39-59 Boletín de Matemáticas; Vol. 1, núm. 1 (1994); 39-59 2357-6529 0120-0380.
- Fernández, C., Milton. J., Sileoni, A., Bossio. D., & Gvirtz, S. (2015). Matemática y TIC: Orientaciones para la enseñanza. Buenos Aires, Argentina: ANSES.
- Figueroa, Piedra, López y Santamaría (2014). Estrategias didácticas apoyadas en medios digitales:experiencias docentes en la universidad de costa rica. san josé, costa rica. departamento de docencia universitaria -escuela de formación docente - universidad de costa rica.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A.
- Gamboa, R., & Ballestero. E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática , 4 (5), 113-136.
- Garagorri, X. (2007). Currículo basado en competencias: aproximación al estado de la cuestión. Las competencias en la educación escolar. Innovación Educativa, 47-55.
- García, L. (2009). Las Unidades didácticas I. Editorial del BENED. Mexico

- González M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. Revista Sigma, 30, 205-236.
- González M. (2003). Los orígenes de la geometría analítica (Vol. 6). Fundación Canaria Orotava.
- González, M. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. En P. Gómez, & L. Rico, Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática homenaje al profesor Mauricio Castro (p. 277-291). Granada. España: Universidad de Granada.
- Gonzales, P. (2007) Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. Revista Sigma. 30, 205-236.
- Gutiérrez, S., & López, E. (20010). Enseñanza de la geometría en segundo año de educación secundaria Bajo el enfoque de competencias. Una propuesta metodológica basada en competecias para la enseñanza de la geometría. Ciencia e Interculturalidad , 110-119.
- Hernández, R. Fernández, C. Baptista, P. (2007). Metodología de la Investigación. (4 ed.) Editorial: McGraw-Hill. Distrito Federal, México.
- Iturbe A. (2013). Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en carreras de Diseño. Revista do instituto GeoGebra de Sao Pablo. Brazil.
- Juanena, J. M. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría. (Tesis de doctorado). España, Madrid.
- Latorre, M., & Seco del Pozo, C. (2013). Metodología. Estrategias y técnicas metodológicas. Facultad de Educación de la Universidad Marcelino Champagnat. Lima-Perú.

- Llinares, S. (S.f). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. Investigación apoyada por la DGCYT del Ministerio de Educación y Ciencia (Madrid), a través del proyecto PS94-0099.

- Lobo, N. (2004). Aplicación del modelo propuesto en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. Multiciencias , 4 (1), 1-10.

- López, B. G., Rodríguez, J. M. S., Cerveró, G. A., Pérez, C. P., & Mateo, P. M. S. (2012). Estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios. Su evolución durante los dos primeros cursos. Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI), 1(1).

- Luengo. (2001). Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica una experiencia constructista. Núcleo Rafael Rangel: Universidad de los Andes.

- Lozzada J, R. C. (2011). Estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y división en alumnos de 1er año.Trujillo.

- Ministerio De Educación Pública (2013). Programas De Estudio De Matemática. San José. Costa Rica

- Morales, Yuri (2009). La tecnología como herramienta educativa: insumos para una posible reforma curricular en la carrera de enseñanza de la matemática de la universidad nacional. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 5, 95-111.

- Morales, Y., Poveda, R., & Ugalde, A. (2009). La tecnología como herramienta educativa: Insumos para una posible reforma curricular en la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática (5), 95-111.

- Muñoz. M., & Nicaragua, R. (2014). Un acercamiento a la brecha digital en Costa Rica desde el punto de vista del acceso, la conectividad y la alfabetización digital. e-Ciencias de la Información, 4(1), 1-29. doi:http://dx.doi.org/10.15517/eci.v4i1.12866

- Muñoz. D y Ramírez, E (18 de agosto de 2005). Estudio de la UCR Desastre en promoción de matemática y cálculo. Semanario Universidad. Recuperado de https://semanariouniversidad.com/universitarias/estudio-de-la-ucr-desastre-en-promocin-de-matemtica-y-clculo/

- Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish KOM project. Extraído el 10 de mayo de 2017 desde: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs /KOMkompetenser.pdf

- Ortíz, A., & Arias, R. (7-9 de Junio de 2012). GeoGebra como herramienta para la Enseñanza de la Matemática: Resultados de un curso de capacitación. VIII Festival internacional de matemática, 1-6.

- Pareja .F, A. (S.f). Modelos globalizadores y técnicas didácticas interdisciplinares. Granada: Universidad de Granada.

- Pastor, J. R., y Babini, J. (1985). Historia de la Matemática, vol. 2. Barcelona: Gedisa.

- Peña. A. (2010). Enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria. (Tesis de doctorado). Universidad Nacional de Educación a Distancia. España Madrid.

- Polya, G. (1945): How to solve it? Princeton University Press, Princeton N.J.

- Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. La Matematica e la sua didattica, Anno 20, n. 4. 535-556.

- Rioseco, M; Romero, R M; (1999). La dimensión afectiva,como base para la contextualización de la enseñanza de la física. Estudios Pedagógicos, () 51-70. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=173513845003

- Roegiers, X. (2007). Pedagogía de la integración. Competencias e integración de los conocimientos en la enseñanza. San José, Costa Rica: Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana y AECI. Colección IDER (Investigación y desarrollo educativo regional), 328 p. ISBN: 978-9968-818-36-0

- Ruiz, B. J. (2014). Geometría analítica. México: Larousse - Grupo Editorial Patria. Retrieved from http://www.ebrary.com

- Santos T. (2007). La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Querétaro. México.

- Sordo, J. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría dinámica (Doctoral dissertation, Disertación doctoral). Colección Digital Complutense).

- Scaglia, S., y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias , 3 (1), 35-50.

- Sosa, Landy (2008). Diseño de actividades de matemáticas con el uso de tecnología. Acta latinoamericana de matemática educativa. 1036-1046.

- Valero, C. C., Redondo, M. R., & Palacín, A. S. (2012). Tendencias actuales en el uso de dispositivos móviles en educación. La educación digital magazine, 147, 1-21.

- Vence Pájaro(s.f.). uso pedagógico de las tic para el fortalecimiento de estrategias didácticas del programa todos a aprender. recuperado el 13 de 05 de 2017, de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-336355_archivo_pdf.pdf

- Verschaffel, Lieven, Koen Luwel, Joke Torbeyns and Wim Van Dooren. Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. Source: European Journal of Psychology of Education, Vol. 24, No. 3 (September 2009), pp.335-359

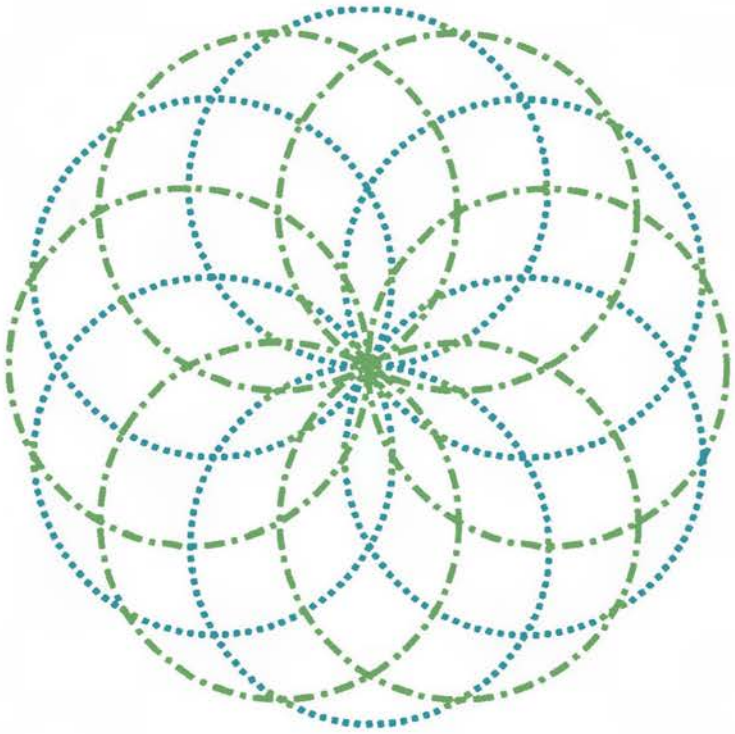
Capítulo 7

Anexos

7.1. Unidad Didáctica

Unidad Didáctica para el abordaje del tema:

Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada costarricense, aplicando Resolución de Problemas y Tecnología.



Responsables:

Araya Benavides Wendy

Jiménez Moscoso Jéssica

Moya Fernández Adrián

ÍNDICE GENERAL

1 INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA — PÁGINA 99

1.1 Vistas Múltiples 99

1.2 Personalizar Vista Gráfica 103

1.3 Herramientas de Construcción 103

Herramientas de Puntos 104 • Herramientas de Segmentos 104 • Polígonos 105 • Recta y sus Herramientas 105 • Secciones Cónicas 106 • Números y Ángulos 107 • Transformaciones Geométricas 108 • Texto 109

2 GEOMETRÍA ANALÍTICA — PÁGINA 110

2.1 Circunferencia 110

2.2 Traslación de una circunferencia 124

2.3 Punto Exterior e Interior a una circunferencia 131

2.4 Recta exterior, secante y tangente a una circunferencia 146

2.5 Rectas Paralelas y Perpendiculares 165

2.6 Relación entre radio y recta tangente a una circunferencia 186

2.7 Elipse 197

3 ANEXOS — PÁGINA 205

3.1 Construcciones en GeoGebra 205

Construcción 1 205 • Construcción 2 210 • Construccion 3 215 • Construcción 4 219 • Texto dinámico 222 • Construcción 5 224

3.2 Ejercicios de Geométria Pruebas Nacionales 227

Primera Convocatoria Bachillerato por Madurez 2016 227 • Segunda Convocatoria Bachillerato por Madurez 2016 230 • Prueba Ordinaria Bachillerato Noviembre 2016 235 • Prueba Bachillerato Educación Diversificada a Distancia Convocatoria 00 - 2017 241

1 Introducción a GeoGebra

GeoGebra es un software interactivo de Matemática que reúne dinámicamente Geometría, Álgebra y Cálculo. Lo ha elaborado Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores, para la enseñanza de Matemática escolar.

1.1 Vistas Múltiples

El programa cuenta con ventanas que ofrecen tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: Vista Algebraica, Vista Gráfica, Vista Gráfica 2, Vista Gráfica 3D. (Ver figura 1.1)

Figura 1.1:
Fuente: Elaboración propia

- **Vista Algebraica:** Desde la *Barra de Entrada* de GeoGebra pueden ingresarse directamente expresiones algebraicas, lo ingresado aparece en la *Vista Algebraica* y, automáticamente, su representación gráfica en la *Vista Gráfica*.

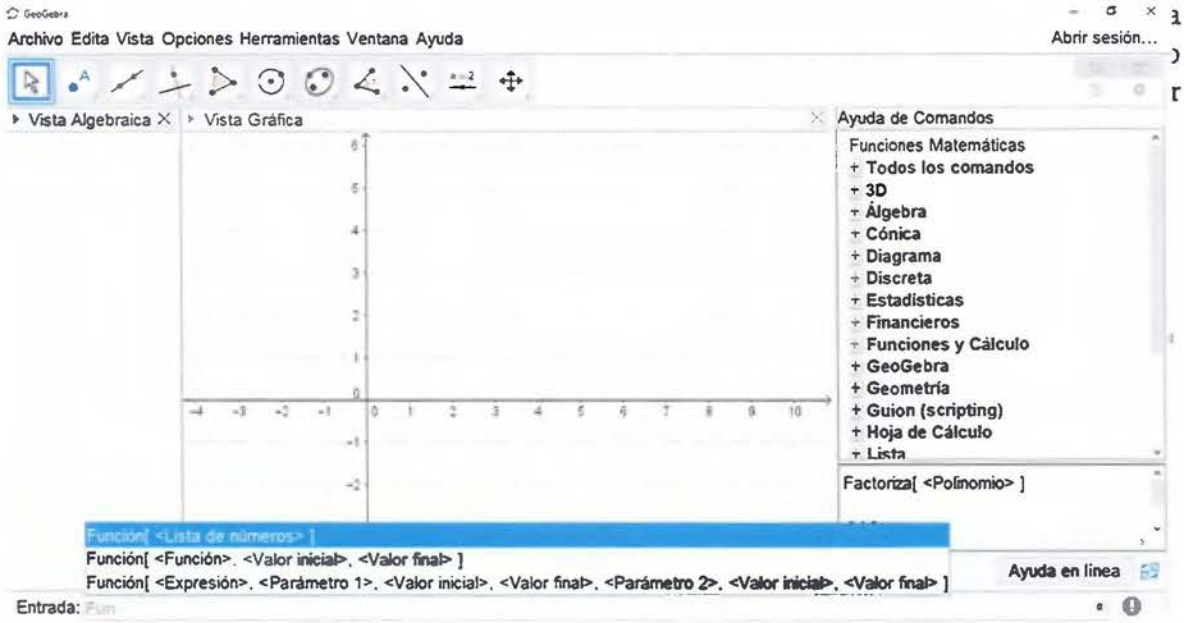


Figura 1.2:
Fuente: Elaboración propia

Además, si se anota el nombre del comando directamente en la Barra de Entrada, aparece la información sobre su sintaxis y ayuda sobre los datos necesarios para aplicarlo.
Desde la vista algebraica se puede accender a las opciones de cada objeto, dando click derecho sobre el mismo. (Ver figura 1.3)

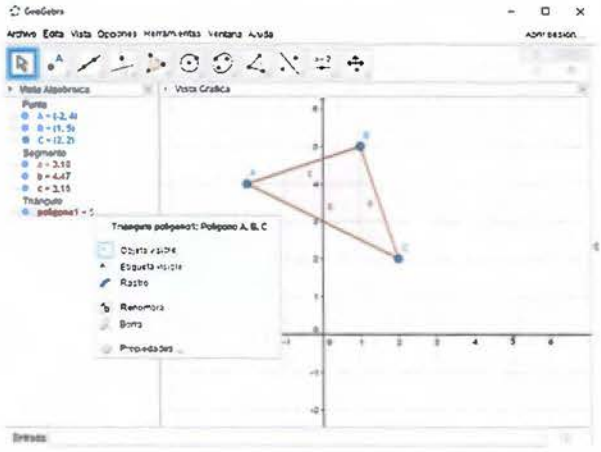


Figura 1.3:
Fuente: Elaboración propia

En las propiedades del objeto se puede modificar color, estilo de línea, el grosor de la línea, nombre del objeto, entre otros. (Ver figura 1.4)

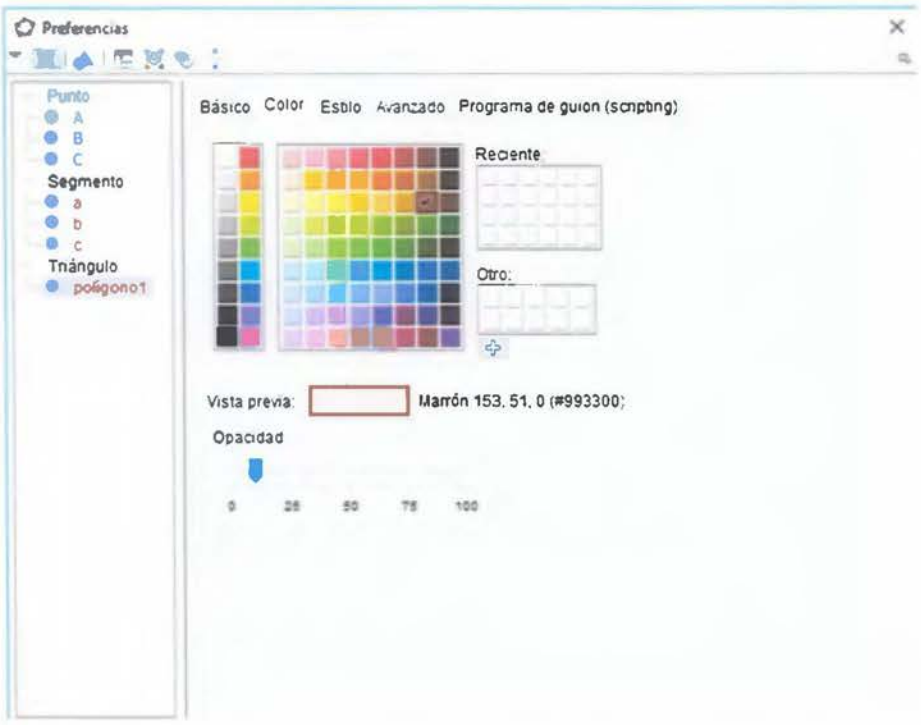


Figura 1.4:
Fuente: Elaboración propia

- **Vista Gráfica:** Con el mouse y empleando las herramientas de construcción disponibles en la Barra de Herramientas, pueden realizarse construcciones geométricas en la Vista Gráfica.

Todo objeto creado en la Vista Gráfica, tiene también su correspondiente representación en la Vista Algebraica, al modificar algún elemento en la vista gráfica este se actualiza en la Vista Algebráica.

Cada ícono de la Barra de Herramientas, representa una caja de útiles similares, que se despliegan con un clic sobre la flechita. (Ver figura 1.5)

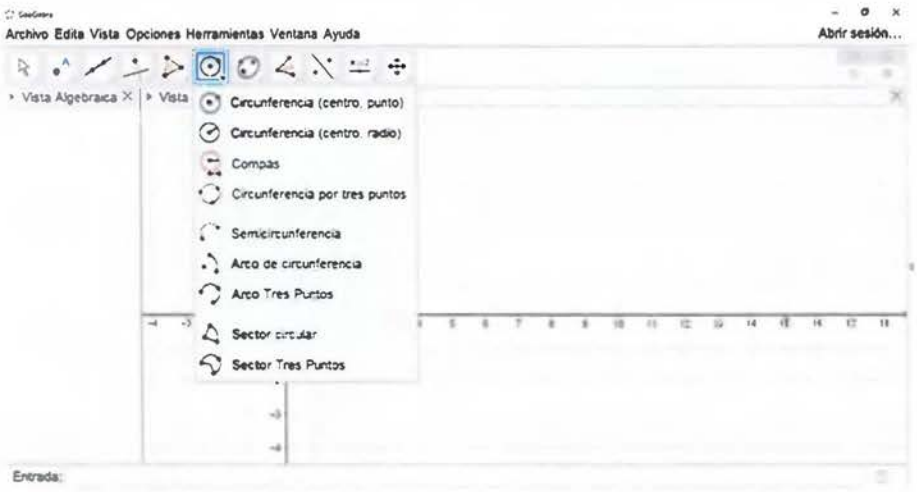


Figura 1.5:
Fuente: Elaboración propia

- **Vista Gráfica 2:** Permite, entre otras cosas, vincular y presentar con dos registros o perspectivas diferentes, a un par de construcciones.

  Así, en la Segunda Vista Gráfica puede aparecer la curva de una función ilustrativa de relaciones que se verifican en una situación geométrica construida en la primera. (Ver figura 1.6)

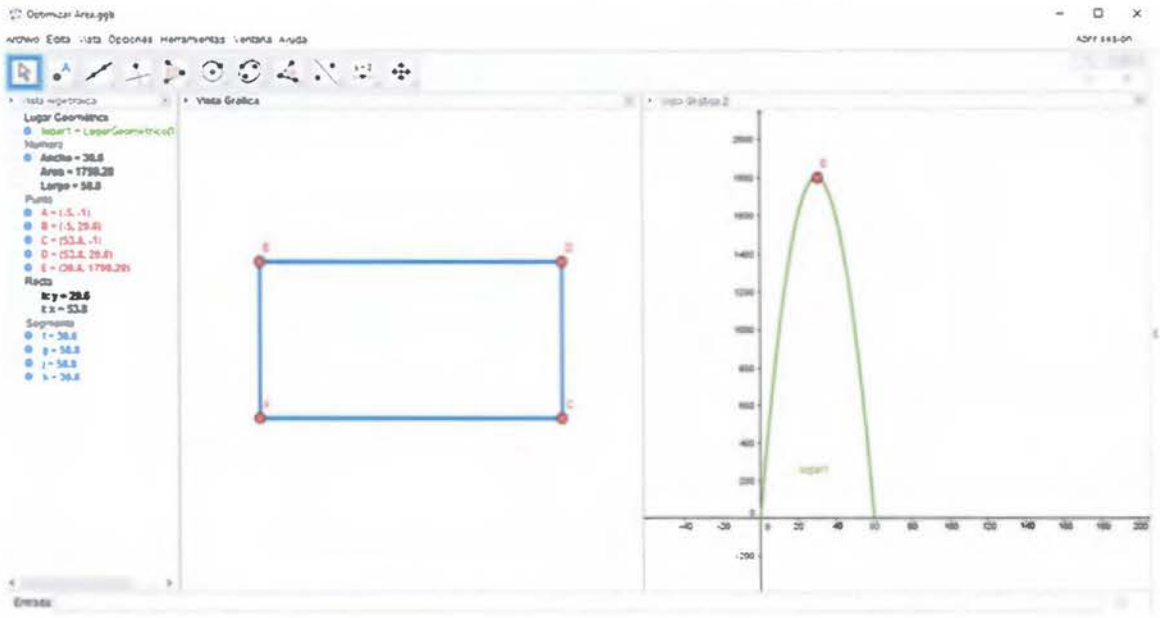


Figura 1.6:
Fuente: Elaboración propia

- **Vista 3D:** Para operar en esta vista se cuenta con un repertorio de herramientas específicas, organizadas en la barra (Ver figura 1.7):

Figura 1.7:
Fuente: Elaboración propia

Mediante estas herramientas se pueden construir solidos en 3 dimensiones como: Esferas, Conos, Pirámide, Planos, entre otros.

1.2 Personalizar Vista Gráfica

Para ajustar la parte visible de la Vista Gráfica, su fondo puede desplazarse con la herramienta , además, se puede acercar o alejar el punto de mira mediante la rueda del mouse ó con la herramienta

Al dar click derecho sobre la Vista Gráfica se puede escoger opciones sobre los ejes y la cuadrícula. (Ver figura 1.8)

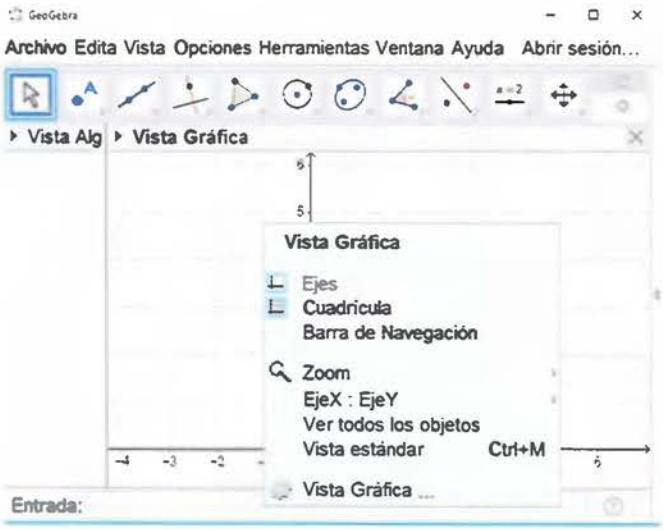


Figura 1.8:
Fuente: Elaboración propia

1.3 Herramientas de Construcción

Las siguientes herramientas de construcción, pueden activarse con un clic sobre los botones de la Barra de Herramientas.

1.3.1 Herramientas de Puntos

- **Punto:**

Con un clic sobre la Vista Gráfica se crea un nuevo punto. Sus coordenadas quedan establecidas según el lugar donde marcó el punto.

También con un clic sobre un segmento, recta, polígono, sección cónica, función o curva, se crea un punto sobre el objeto en cuestión.

- **Intersección de dos objetos:**

Los puntos de intersección de los dos objetos pueden producirse de dos maneras:

- Seleccionando dos objetos, se crean todos los puntos de intersección si los hay.
- Con clic directo sobre la intersección de los dos objetos se crea este único punto.

- **Punto medio o Centro:**

Un clic sobre:

- Dos puntos o un segmento, permite obtener su punto medio.
- Una circunferencia o sección cónica (circunferencia o elipse) se obtiene su punto centro.

1.3.2 Herramientas de Segmentos

- **Recta por dos puntos:**

Al seleccionar dos puntos la herramienta recta crea la recta que pasa por los puntos señalados.

- **Segmento entre Dos Puntos:**

Al seleccionar dos puntos A y B, se establece un segmento entre A y B, en la Vista Algebraica, podrá verse la longitud de dicho segmento.

- **Segmento dados Punto Extremo y Longitud:**

Segmento de longitud dada

Con un clic sobre un punto A para fijarlo como uno de los extremos del segmento y anotar la longitud a deseada en la ventana que se despliega a continuación, se crea el segmento.

1.3.3 Polígonos

- **Polígono:**

Polígono

Para trazar un polígono se debe marcar al menos tres puntos que constituirán sus vértices y con un clic reiterado sobre el primero de ellos, cerrarlo.
En la Vista Algebraica, se expone el área del polígono.

- **Polígono Regular:**

Polígono regular

Al marcar dos puntos, A y B y anotar un número n en la caja de diálogo emergente, se traza un polígono regular con n vértices, incluyendo A y B.

1.3.4 Recta y sus Herramientas

- **Bisectriz:**

Bisectriz

La bisectriz de un ángulo, puede determinarse de dos maneras:

- Al marcar los tres puntos A, B, C se produce la bisectriz del ángulo determinado por A, B y C, con B como vértice.
- Al marcar dos rectas se producen las bisectrices de los ángulos formados por las rectas.

- **Recta Paralela:**

Paralela

Al seleccionar una recta g y un punto A, queda definida la recta que pasa por A y es paralela a g.

- **Mediatriz:**

Mediatriz

La recta mediatriz de un segmento se traza al seleccionar un segmento s o sus dos puntos extremos A y B.

- **Recta Perpendicular:**

Al seleccionar una recta g y un punto A, queda definida la recta que pasa por A y es perpendicular a g.

- **Tangente:**

Las tangentes a una cónica pueden determinarse de dos maneras:

- Al seleccionar un punto A y una cónica c se producen todas las tangentes a c que pasan por A.
- Al seleccionar una recta g y una cónica c se producen todas las tangentes a c que son paralelas a g.
- Al seleccionar un punto A y la función f, se traza la recta tangente a f por $x = x(A)$.

1.3.5 Secciones Cónicas

- **Circunferencia dados su centro y su radio:**

Tras seleccionar un punto O como centro, se despliega la ventana para ingresar el valor del radio y se crea la circunferencia con centro en O y radio r.

- **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos**

Al seleccionar un punto O y un punto P queda definida una circunferencia con centro en M que pasa por P.

- **Circunferencia dados tres de sus puntos**

Al seleccionar tres puntos A, B y C queda definida una circunferencia que los cruza.

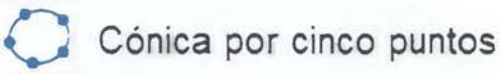
- **Semicircunferencia dados dos puntos**

Al seleccionar dos puntos A y B, se traza una semicircunferencia por encima del segmento AB.

- **Sector Circular dados su Centro y Dos Puntos**

Deben marcarse tres puntos: primero O, que será su centro; luego A, extremo inicial de su arco y finalmente B que determinará la longitud del arco del sector.

- **Cónica dados cinco de sus puntos**



Al seleccionar cinco puntos, queda definida una sección cónica que pasa por ellos.

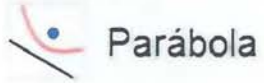
- **Elipse**

La elipse se trazará al seleccionar sus dos focos en primer lugar y luego, uno de sus puntos.

- **Hipérbola**

La hipérbola se trazará al seleccionar sus dos focos en primer lugar y luego, uno de sus puntos.

- **Parábola**



La parábola se trazará al seleccionar un punto que será su foco y su directriz.

1.3.6 Números y Ángulos

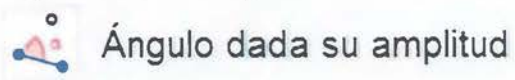
- **Ángulo:**

Esta herramienta crea:

- el ángulo entre tres puntos cuyo vértice es el segundo de ellos
- el ángulo entre dos segmentos
- el ángulo entre dos rectas
- el ángulo entre dos vectores

- todos los ángulos de un polígono

- **Ángulo dada su amplitud:**

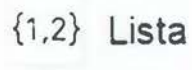


Al marcar dos puntos A y B y la amplitud del ángulo en el campo de texto de la ventana emergente la herramienta produce un punto C y un ángulo ? correspondiente a $\angle ABC$.

- **Distancia o Longitud:**

Esta herramienta mide la distancia entre dos puntos, dos rectas o un punto y una recta y la expone como texto dinámico en la Vista Gráfica. También opera con la longitud de un segmento, la de una circunferencia o la del perímetro de un polígono.

- **Lista:**



Usando llaves pueden crearse listas de varios objetos (como puntos, segmentos, circunferencias).

- **Deslizador:**

Un clic en cualquier espacio libre de la *Vista Gráfica* crea un deslizador para ajustar el valor de un número o un ángulo. La ventana de diálogo emergente permite especificar el Nombre, Intervalo $[mín, máx]$, e Incremento del valor correspondiente.

1.3.7 Transformaciones Geométricas

- **Refleja Objeto en Recta**

Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser reflejado. Luego, basta un clic sobre la recta (semirrecta o segmento) para que quede establecido el eje de simetría a través del que se operará la reflexión.

- **Refleja Punto en Circunferencia**

Esta herramienta permite reflejar un punto por una circunferencia, seleccionando el punto a invertir y luego la circunferencia para la reflexión.

1.3.8 Texto

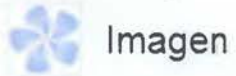
- **Inserta Texto:**

  Con esta herramienta, pueden crearse fórmulas de LaTeXo textos(estáticos o dinámicos), en la Vista Gráfica. El texto tiene opciones de estilo y colores, así como especificar la posición en la que se desea.

- **Texto dinámico:** Es el que contiene valores de objetos y se modifica y adapta automáticamente frente a sus cambios.

- **Texto mixto:** Es una combinación de texto estático y dinámico. Para crear un texto mixto, debe anotarse el sector estático usando el teclado (por ejemplo: Punto A =) y añadir la sección dinámica con un clic sobre el objeto cuyo valor se desea exponer (el punto *A*, en el caso de este ejemplo).

- **Insertar imagen:**

  Esta herramienta permite insertar una imagen en la Vista Gráfica.
  En primer lugar, se debe especificar el lugar donde ubicarla, de una de las siguientes maneras:

  - Un clic en Vista Gráfica fija la esquina inferior izquierda de la imagen.
  - Un clic sobre un punto se lo establece como su esquina inferior izquierda.

  Luego, en la caja de diálogo que se abre, se puede seleccionar una imagen de entre los archivos de formato gráfico que aparecen listados, almacenados en los directorios o carpetas que se examinan a tal efecto.

2 Geometría Analítica

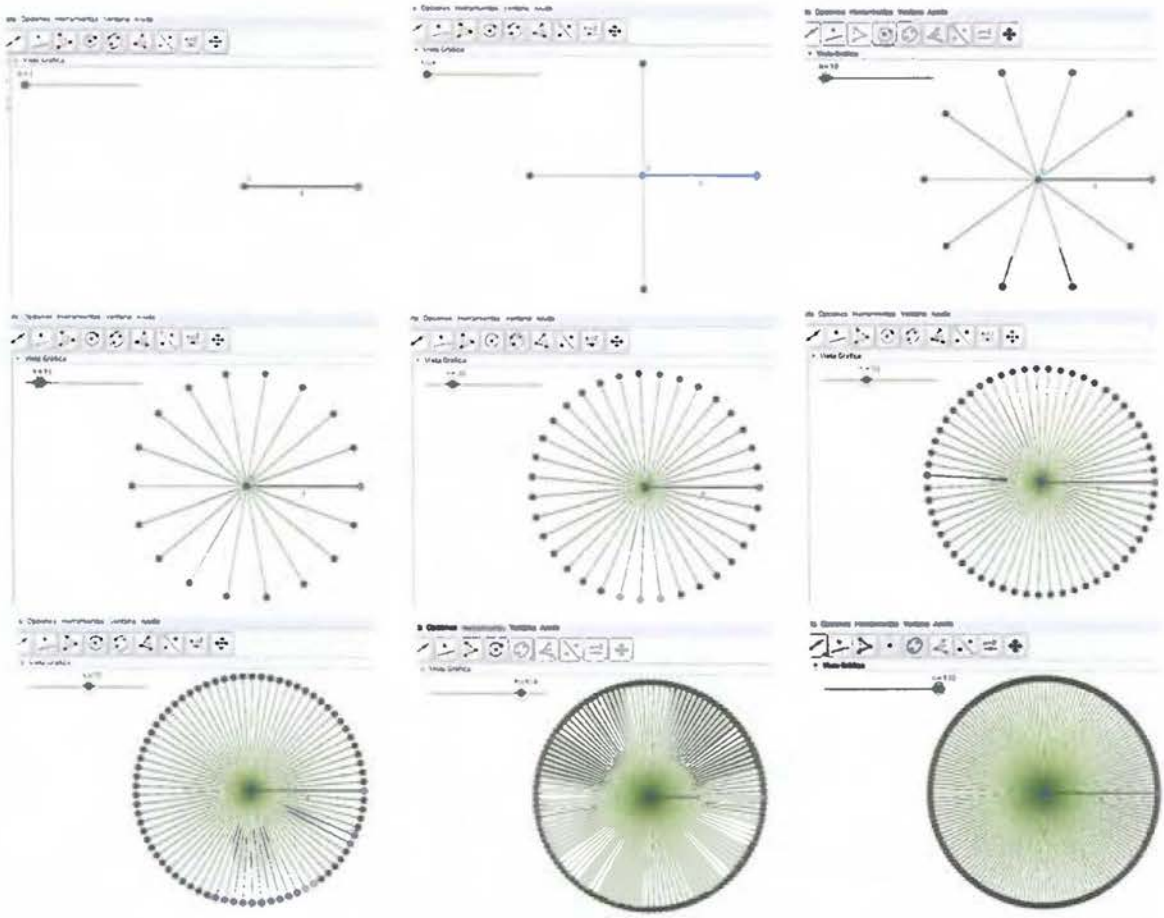
2.1 Circunferencia

Imagen tomada de: Fotograma del documental "Redescubriendo Guayabo" de Paulo Cavaria

Definición

Se llama circunferencia al conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado ***centro***.

Para visualizar la definición se recurre a la Construcción 1, (Ver construcción 1).



Construcción 1:

Definición (Circunferencia en un plano coordenadas cartesianas)

Si se toma cualquier par ordenado (x, y) de la circunferencia centrada en el origen como se aprecia en la figura, (Ver figura 2.1)

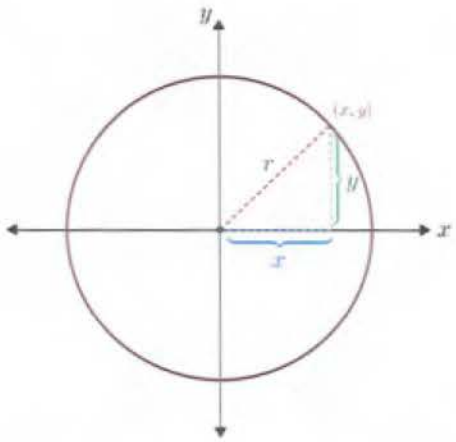


Figura 2.1:
Fuente: Elaboración propia

Se tiene $x^2 + y^2 = r^2$, es decir todos los puntos que pertenecen a la circunferencia satisfacen la ecuación anterior. ¿Qué sucede con las circunferencias centras en cualquier punto distinto al origen? Veamos (Ver figura 2.2)

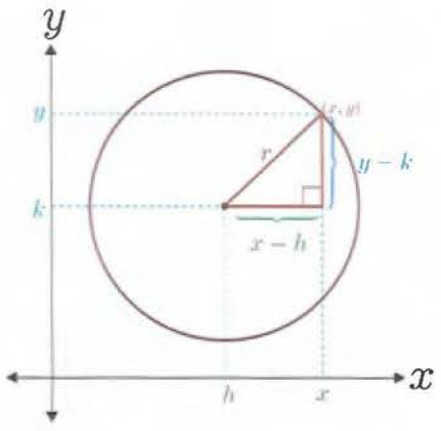


Figura 2.2:
Fuente: Elaboración propia

Las medidas del triángulo corresponden a $x-h$, $y-k$ y r, se sabe por medio del teorema de Pitágoras que se cumple la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$, es decir está ecuación satisface la ecuación de la circunferencia para cualquier par ordenado (x, y) que pertenezca a la circunferencia centrada en (h, k).

En resumen, la circunferencia con centro en el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación.

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

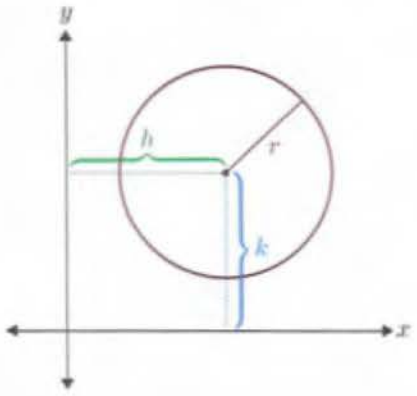


Figura 2.3:
Fuente: Elaboración propia

Considere el siguiente gráfico (Ver figura 2.4) correspondiente a la circunferencia $\zeta : x^2 + y^2 = 4$.

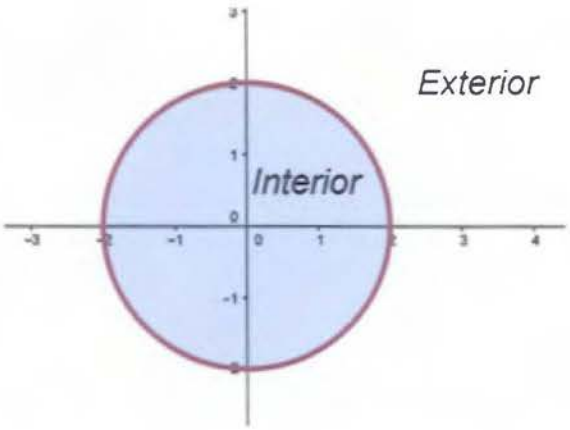


Figura 2.4:
Fuente: Elaboración propia

Note que la circunferencia ζ divide el plano en dos regiones llamadas, **interior de la circunferencia** y **exterior de la circunferencia.**

Ejemplo

El logo de los Juegos Olímpicos está conformado por cinco circunferencias que representan cada uno de los continentes.

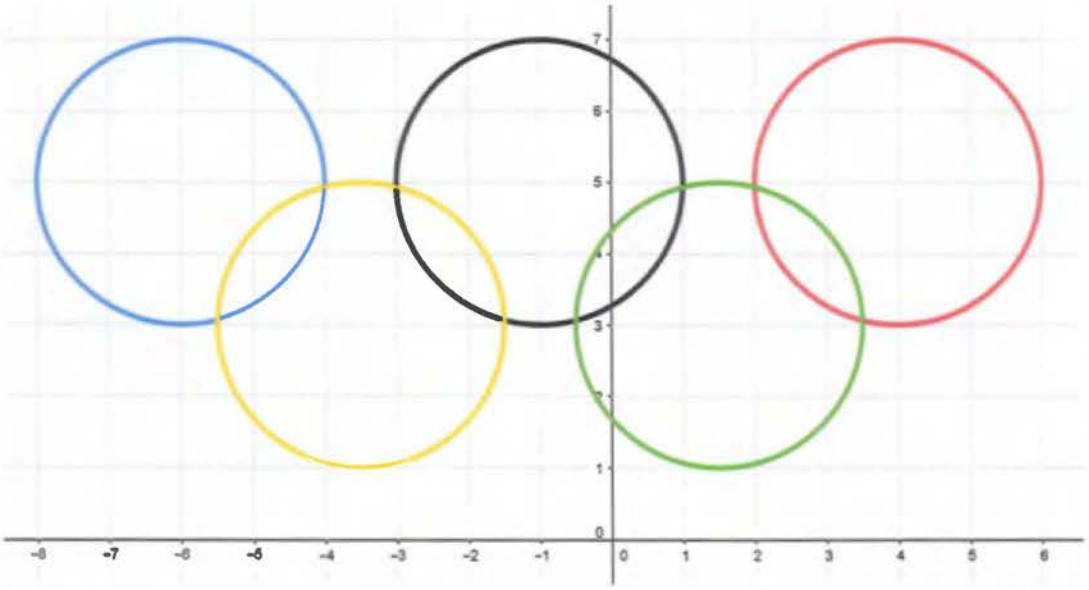


Figura 2.5:
Fuente: Elaboración propia

1. Apartir del sistema coordenado determine la ecuación de cada una de las circunferencias que componen el logo.
2. Utilice GeoGebra para construir el logo de los Juegos Olímpicos en su teléfono.

Guía de Solución

Se pueden identificar cinco circunferencias en el logo:

Circunferencia Azul	Circunferencia Amarilla	Circunferencia Negra
Centro	Centro	Centro
$O_1 : (-6, 5)$	$O_2 : (-\frac{7}{2}, 3)$	$O_3 : (-1, 5)$
Radio	Radio	Radio
$r_1 = 2$	$r_2 = 2$	$r_3 = 2$
Ecuación	Ecuación	**Ecuación**
$\zeta_1 : (x+6)^2 + (y-5)^2 = 4$	$\zeta_2 : (x+\frac{7}{2})^2 + (y-3)^2 = 4$	$\zeta_3 (x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$

Circunferencia Verde	Circunferencia Rojo
Centro	Centro
$O_4 : (\frac{3}{2}, 3)$	$O_5 : (4, 5)$
Radio	Radio
$r_4 = 2$	$r_5 = 2$
Ecuación	**Ecuación**
$\zeta_4 : (x-\frac{3}{2})^2 + (y-3)^2 = 4$	$\zeta_5 : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$

Ingresando las cinco ecuaciones encontradas se dibuja en GeoGebra el Logo de los juegos olímpicos.

Lista de Ejercicios

- Se desea construir una piscina de forma circular con perímetro 10π, el centro de la piscina debe estar ubicado 4 m al Oeste y 3 m al Sur de un poste de iluminación. Determine:

  a) ¿Cuál debería ser la ecuación de la circunferencia que representa la piscina?

  b) ¿Qué distancia habrá entre el faro y el centro de la piscina?

- Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(0, 0)$ y su radio es 13, si su centro está ubicado en el punto -12 respecto al eje x.

- Un campesino tiene un manantial dentro de sus tierras. Éste se encuentra 5 km hacia el este y 3 km hacia el norte del cruce de dos caminos perpendiculares. Desea construir una cerca circular cuyo centro sea el manantial y que la distancia máxima sea hasta la casa, la cual se ubica 1 km hacia el este y 2 km hacia el sur de dicho cruce. Obtén la ecuación que representa a la cerca circular.

Ejercicio tomado del libro **UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA COLEGIO NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA COORDINACIÓN ACADÉMICA.** Matemática Décimo Año Contenidos de los nuevos programas. 2015.

IMPORTANTE

Considere un trinomio de la forma

$$ax^2+bx+c,\ \ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

se dice que el trinomio es un cuadrado perfecto si se puede escribir de la forma $(x+k)^2$ para algún $k\in\mathbb{R}$.
Se utiliza el método de completar el cuadrado para que se cumpla la ecuación

$$ax^2+bx+c=(x+k)^2+r\quad k,r\in\mathbb{R}$$

Método de completar el cuadrado
Considere el trinomio

$$-2x^2+8x-3$$

1. Se extrae el coeficiente principal del término cuadrático.

$$-2\left(x^2-4x+\frac{3}{4}\right)$$

2. Se calcula el resultado de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en el trinomio resultante.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$$

3. Suma y resta este nuevo término a la expresión dada.

$$-2\left(x^2-4x\underbrace{+4-4}+\frac{3}{4}\right)$$

4. A los tres primeros términos se le completa cuadrado (Fómula Notable), en los dos últimos se realizan las operaciones.

$$-2\left((x-2)^2-\frac{13}{4}\right)$$

Esta es la forma en la que se quiere trabajar el trinomio.

Ejemplo

Complete el cuadrado en los trinomios:

1. $-3x^2-8x+3$
2. x^2+4x+5
3. $5x^2-25+35x$

Guía de Solución

1.

$$\begin{aligned}
-3x^2-8x+3 &= -3\left(x^2+\frac{8}{3}x-1\right) && \text{Se debe calcular: } \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2=\frac{16}{9}\\
&= -3\left(x^2+\frac{8}{3}x+\underbrace{\frac{16}{9}-\frac{16}{9}}-1\right) && \text{Se suma y se resta } \frac{16}{9}\\
&= -3(\underbrace{x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}}_{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2}-\frac{25}{9})\\
&= -3\left(\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right)\\
&= -3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\tfrac{25}{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x^2+4x+5 &= && \text{Se debe calcular: } \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\tfrac{4}{2}\right)^2=4\\
&= x^2+4x+\underbrace{4-4}+5 && \text{Sumar y restar 4}\\
&= \underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}+1\\
&= (x+2)^2+1
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} 5x^2-25+35x &= 5x^2+35x-25 \\ &= 5(x^2+7x-5) && \text{Se calcula: } \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\tfrac{7}{2}\right)^2=\tfrac{49}{4} \\ &= 5(x^2+7x+\underbrace{\tfrac{49}{4}-\tfrac{49}{4}}-5) && \text{Sumar y restar } \tfrac{49}{4} \\ &= 5\left(\left(x+\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{69}{4}\right) \\ &= 5\left(x+\tfrac{7}{2}\right)^2-\tfrac{345}{4} \end{aligned}$$

Observación

Considere la expresión cuadrática

$$ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$$

Al completar el cuadrado se busca obtener la forma

$$a(x+h)^2-k,\ \text{donde}$$

$$h=\tfrac{b}{2a}\quad \Delta=b^2-4ac\quad k=\tfrac{\Delta}{4a}$$

Ejemplo

Complete el cuadrado de la siguiente expresión utilizando el procedimiento que establece la observación anterior

$$5x^2-4x+10$$

Guía de Solución

1. Se extrae el coeficiente del término cuadrático.

$$5\left(x^2-\frac{4x}{5}+2\right)$$

2

Se calcula el valor para h	Se calcula el valor para Δ	Se calcula el valor para k
$h = \frac{b}{2a}$	$\Delta = b^2 - 4ac$	$k = \frac{\Delta}{4a}$
$= -\frac{\frac{4}{5}}{2}$	$= \frac{16}{25} - 8$	$= -\frac{\frac{184}{25}}{4}$
$= -\frac{4}{10}$	$= \frac{16-200}{25}$	$= -\frac{184}{100}$
$= -\frac{2}{5}$	$= -\frac{184}{25}$	$= -\frac{92}{50}$

Se construye la expresión en la forma

$$a(x+h)^2 - k$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x + 10 &= 5\left(\left(x - \tfrac{2}{5}\right)^2 + \tfrac{92}{50}\right) \\ &= 5\left(x - \tfrac{2}{5}\right)^2 + \tfrac{92}{10} \end{aligned}$$

emplo

Considere la ecuación

$$-2x^2 + 8x - 3 - 2(y+1)^2 = 0$$

Verifique utilizando GeoGebra que esta ecuación representa una circunferencia.

Utilice el método de completar cuadrados para escribir la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.

Guía de Solución

1. Al ingresar la ecuación $-2x^2+8x-3-2(y+1)^2=0$ en GeoGebra se obtiene: (Ver figura 2.6)

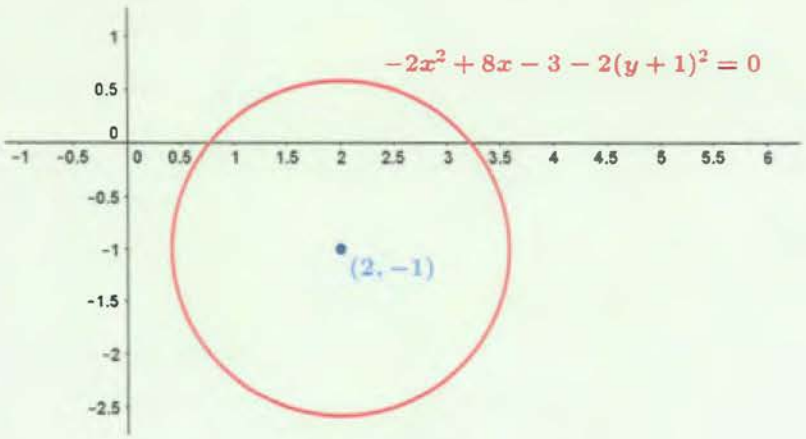


Figura 2.6:
Fuente: Elaboración propia

2. Se debe reacomodar la ecuación

$$-2x^2+8x-3-2(y+1)^2=0$$

para escribirla de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

$$\begin{aligned}
-2x^2+8x-3-2(y+1)^2 &= 0 && \text{Se debe completar el cuadrado en la primera expresión.}\\
-2\left(x^2-4x+\tfrac{3}{2}\right)-2(y+1)^2 &= 0 &&\\
-2\left(x^2-4x+4-4+\tfrac{3}{2}\right)-2(y+1)^2 &= 0 && \text{Al calcular } \left(\tfrac{b}{2}\right)^2=\left(\tfrac{4}{2}\right)^2=4\\
-2\left((x-2)^2-\tfrac{5}{2}\right)-2(y+1)^2 &= 0 &&\\
-2(x-2)^2+2\cdot\tfrac{5}{2}-2(y+1)^2 &= 0 &&\\
-2(x-2)^2+5-2(y+1)^2 &= 0 &&\\
-2(x-2)^2-2(y+1)^2 &= -5 &&\\
-2[(x-2)^2+(y+1)^2] &= -5 &&\\
(x-2)^2+(y+1)^2 &= \tfrac{5}{2} &&
\end{aligned}$$

Ejemplo

Obtenga la forma ordinaria de la circunferencia

$$x^2+y^2-8x+9y-74=0$$

Guía de Solución

El objetivo es escribir la ecuación

$$x^2+y^2-8x+9y-74=0$$

de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-8x+9y-74 &= 0 \\ \underbrace{x^2-8x}+\underbrace{y^2+9y} &= 74 \end{aligned}$$

Al calcular $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en la 1^{er} expresión

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2=\frac{16}{4}=4$

Al calcular $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en la 2^{da} expresión

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$

$$\underbrace{x^2-8x+16}_{(x-4)^2}-16+\underbrace{y^2+9y+\frac{81}{4}}_{(y+\frac{9}{2})^2}-\frac{81}{4} = 74$$

$$(x-4)^2+\left(y+\tfrac{9}{2}\right)^2 = 74+16+\tfrac{81}{4}$$

$$(x-4)^2+\left(y+\tfrac{9}{2}\right)^2 = \tfrac{441}{4}$$

Lista de Ejercicios

1. Determina las coordenadas del centro y del radio de las siguientes circunferencias, utilizando la técnica de completar el cuadrado:

   a) $4x^2+4y^2-4x-8y-11=0$

   b) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

   c) $4x^2+4y^2-4x+12y-6=0$

   d) $x^2+y^2+3x+y+10=0$

2. Determine el valor de k para que los siguientes trinomios, correspondan a un trinomio cuadrado perfecto:

   a) $x^2-18x+k$

   b) $x^2-12x+k$

   c) x^2-6x+k

   d) x^2+8x+k

2.2 Traslación de una circunferencia

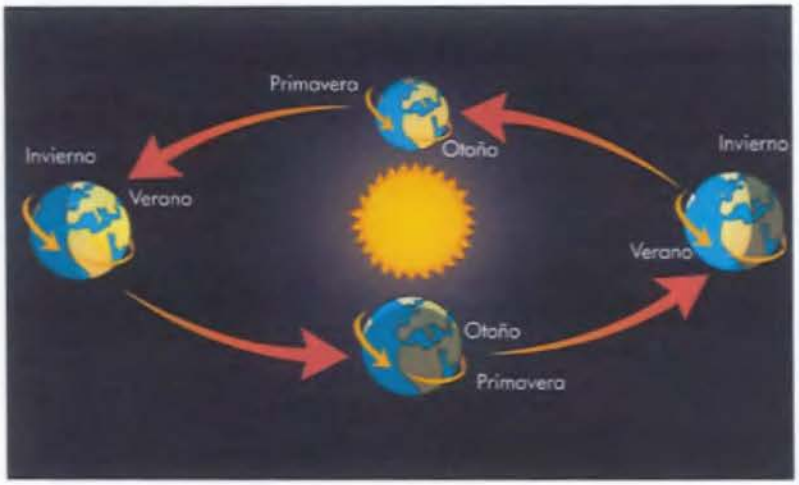
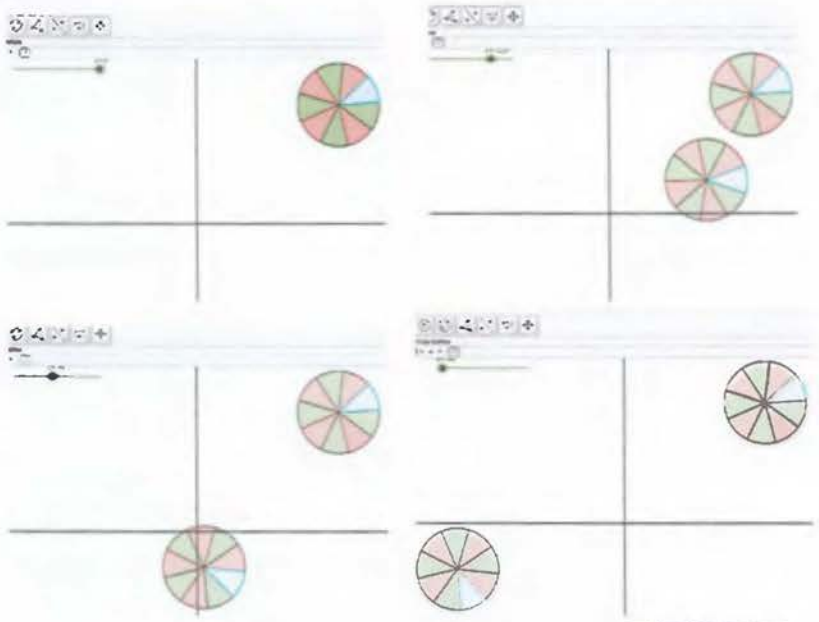


Imagen tomada de: http://1.bp.blogspot.com/-LCq7vd5hew4/VHykSiFXwCI/AAAAAAAAWSo/-YvvFih2aBw/s1600/tra1.png

Problema

Un circo tiene las coordenadas del centro de su carpa ubicadas en el punto (6,5), y se desean desplazar para otra ciudad como se observa en la siguiente figura. Si para trasladar la carpa deben tomar 7 millas sur y 13 millas oeste.¿Cuál es la coordenada de la carpa en está nueva ciudad?



Construcción 2:

Guía de Solución

Observe que al trasladarse el circo hacia el sur el centro (6,5) se ve afectado en la coordenada y, es decir, el centro del circo corresponde (6,5−7), ahora al desplazarse hacia el oeste el centro se ve afectado en la coordenada x, es decir, (6−13,5). En resumen el centro del circo en la nueva ciudad corresponde a (−7,−2) (Ver construcción 2)

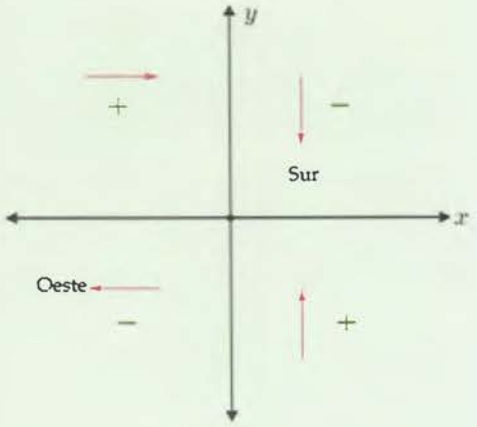


Figura 2.7:
Fuente: Elaboración propia

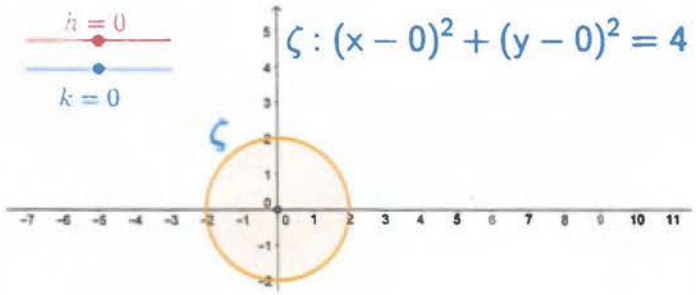
Actividad:
Utilice GeoGebra para graficar la circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=4$$

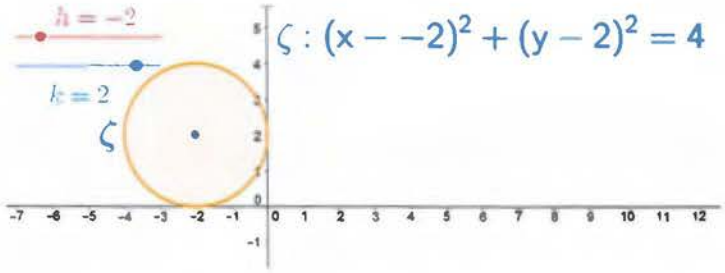
Describa el comportamiento de la circunferencia:

- A dejar ambos deslizadores en 0 _____
- Al mover el deslizador h: _____
- Al mover el deslizador k: _____

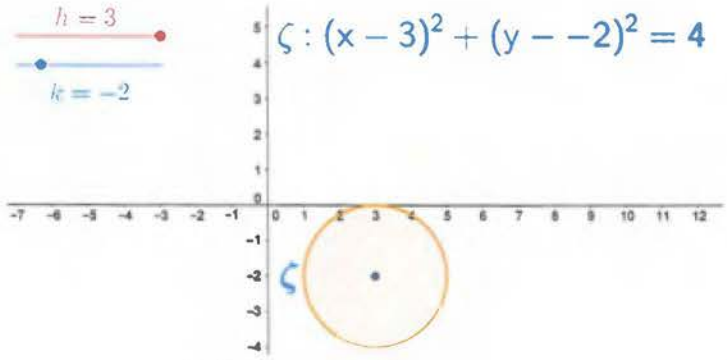
A continuación se muestran algunas circunferencias resultantes de mover los deslizadores:



(a) Círcuncerencia de centro (0,0)



(b) Círcuncerencia de centro (−2,2)



(c) Círcuncerencia de centro (3,−2)

Figura 2.8:
Fuente: Elaboración Propia

Observación

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ determina una circunferencia con centro (h,k) y radio r, si esta circunferencia se traslada a un punto (h_1,k_1) la ecuación de la circunferencia correspondiente es $(x-h_1)^2+(y-k_1)^2=r^2$.

Ejemplo

A partir del sistema coordenado de la figura 2.9, si el centro de la circunferencia ζ es trasladado al punto Q, ¿Cuál es la ecuación de la nueva circunferencia?

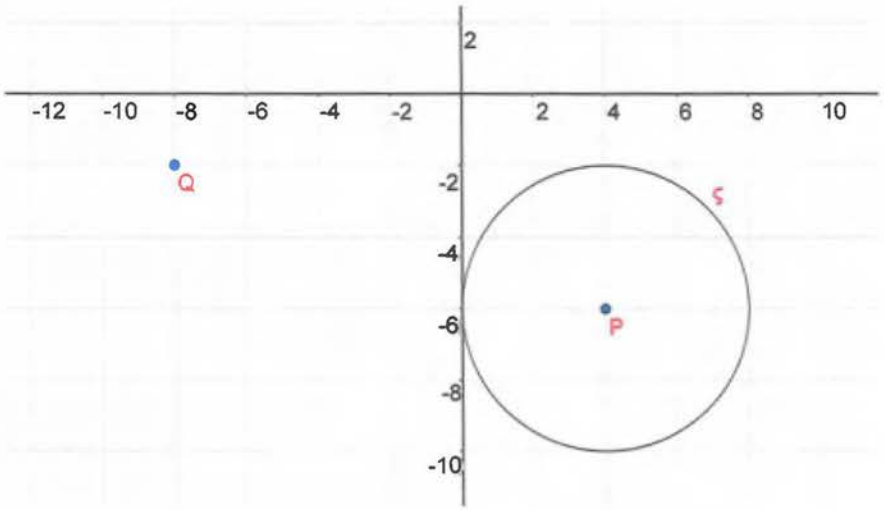


Figura 2.9:
Fuente: Elaboración propia

Guía de Solución

La circunferencia ζ tiene centro $P(4,-6)$ y $r=4$, entonces la ecuación de la circunferencia está dada por

$$\zeta:(x-4)^2+(y+6)^2=16$$

Si el centro de la circunferencia se traslada al punto $Q(-8,-2)$ y el radio se mantiene, la ecuación de la nueva circunferencia ζ_1 está dada por

$$\zeta_1:(x+8)^2+(y+2)^2=16$$

IMPORTANTE

Si se tiene una circunferencia de ecuación

$$(x-k)^2+(y-k)^2=r^2$$

el resultado de trasladar la circunferencia en dirección (a,b) es la circunferencia con ecuación

$$(x-k-a)^2+(y-h-b)^2=r^2$$

Ejemplo

Considere la circunferencia

$$\zeta:(x-4)^2+(y-10)^2=16$$

determine la ecuación de la circunferencia ζ_1 correspondiente a trasladar ζ, en dirección al punto $(7,-9)$

Guía de Solución

Tenemos que

$$\zeta:(x-4)^2+(y-10)^2=16$$

como se traslada en dirección al punto $(7,-9)$ la ecuación de ζ_1 está dada por:

$$\zeta_1:(x-4-7)^2+(y-10--9)^2=16$$

Entonces:

$$\zeta_1:(x-11)^2+(y-1)^2=16$$

Ejemplo

Considere la circunferencia ζ_0 de centro O y radio r, dada por la ecuación:

$$\zeta_0:x^2+y^2-4y+4x=10$$

1. Determine el centro O y radio r de ζ_0.
2. Si el centro O se traslada 5 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo, ¿cuáles son las coordenadas del nuevo punto O_1?
3. Determine la ecuación de la circunferencia ζ_1 de centro O_1 y radio r.
4. Utilice GeoGebra para obtener la gráficas de ζ_0 y ζ_1, ¿qué se puede concluir?

Guía de Solución

1. Tenemos

$$\zeta_0 : x^2 + y^2 - 4y + 4x = 10$$

Se debe utilizar el método de completar cuadrados para lograr la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y + 4x &= 10 \\ x^2 + 4x + y^2 - 4y &= 10 \\ x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 10 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 - 8 &= 10 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 &= 18 \end{aligned}$$

Entonces se puede identificar que para ζ_0: $O(-2,2)$ y $r = 3\sqrt{2}$.

2. Se debe determinar la coordenada del punto O_1, sabiendo que este punto está 5 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo de O. Así

$$\begin{aligned} O_1 &= (-2+5, 2-3) \\ &= (3,-1) \end{aligned}$$

3. La ecuación de ζ_1 está dada por

$$\zeta_1 : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 18$$

4. Al graficar ambas circunferencias se obtiene: (Ver figura 2.10)

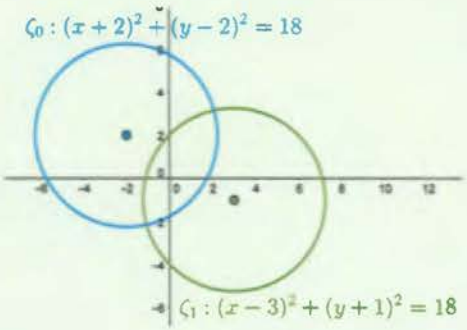


Figura 2.10:
Fuente: Elaboración propia

Se puede ver que las circunferencias se cortan en dos puntos.

Lista de Ejercicios

1. Escriba la ecuación de la circunferencia dado su centro, y en cada caso traslade dicha circunferencia al nuevo centro:

   a) Circunferencia de centro $(3,0)$ al centro $(-3,4)$.

   b) Circunferencia de centro $(-1,1)$ al centro $(0,0)$.

   c) Circunferencia de centro $(3,2)$ al centro $(-2,-2)$.

   d) Circunferencia de centro $(4,5)$ al centro $(-1,-2)$.

2. Determine la Ecuación General

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

   al trasladar cada una de las siguientes circunferencias al nuevo centro dado:

   a) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, si se traslada su centro al punto $(-1,2)$

   b) $(x-8)^2+(y+10)^2=36$, si se traslada su centro al punto $(-3,3)$

   c) $(x-3)^2+(y+1)^2=1$, si se traslada su centro al punto $(4,3)$

   d) $(x+4)^2+(y+6)^2=16$, si se traslada su centro al punto $(0,0)$

3. La circunferencia $\zeta_1 : x^2+y^2=36$ representa la región que ilumina una lámpara ubicada en el techo de un salón, si las mesas del salón son circulares y de radio 2, utilice geogebra para determinar cuántas mesas se pueden ubicar de forma que sean iluminadas por la lámpara ζ_1.

2.3 Punto Exterior e Interior a una circunferencia

Imagen tomada de: http://www.serienjunkies.de/news/under-dome-simpsons-already-did-49152.html

Actividad:
Recuerde que un punto que no pertenece a una circunferencia, puede ser interior o exterior a esta.

- ¿Para clasificar si un punto es interior o exterior a una circunferencia, qué se debe analizar?
- Utilice la construcción 3 para formular una respuesta.

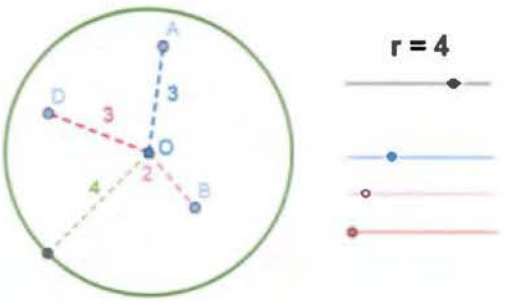


Figura 2.11:
Fuente: Elaboración propia

Construcción 3:

Definición (Punto interior a una circunferencia)

Un punto se llama Punto Interior a una circunferencia si y solo si pertenece al interior de la circunferencia.

Es decir, sea $C(O, r)$ una circunferencia de centro O y radio r y P un punto sobre el mismo plano.

$$P \text{ es interior a } C(O, r) \Leftrightarrow D(P, O) < r$$

emplo

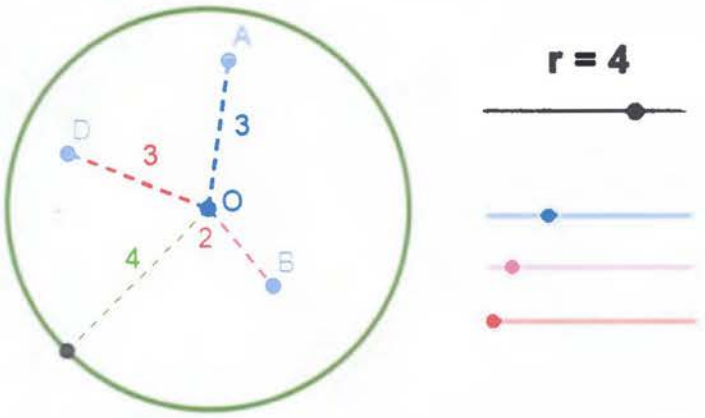


Figura 2.12:
Fuente: Elaboración propia

En la figura 2.12 los puntos A, B, C son interiores a la circunferencia, pues su distancia con respecto a su centro es menor que el radio de la circunferencia.

Definición (Punto Exterior)

Un punto se llama Punto Exterior a una circunferencia si y solo si pertenece al exterior de la circunferencia.

Es decir, sea $C(O, r)$ una circunferencia de centro O y radio r y P un punto.

$$P \text{ es exterior a } C(O,r) \Leftrightarrow D(P,O) > r$$

Ejemplo

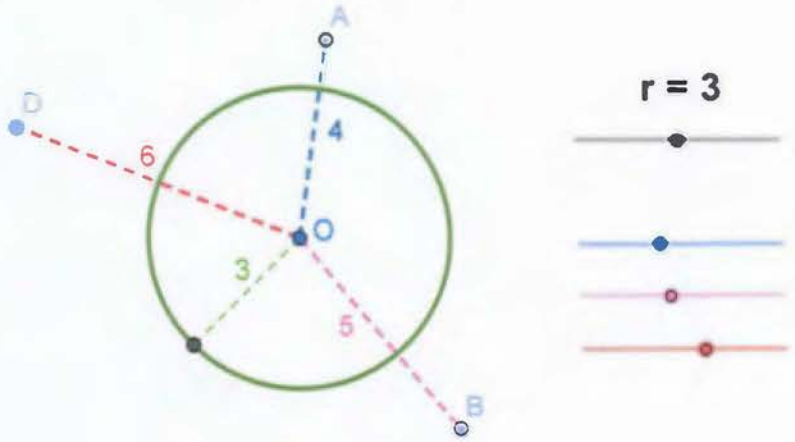


Figura 2.13:
Fuente: Elaboración propia

En la figura 2.13 los puntos A, B, C son exteriores a la circunferencia, pues su distancia con respecto a su centro es mayor que el radio.

Ejemplo

Considere la circunferencia

$$C : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Utilice GeoGebra para representar la circunferencia C y clasifique los siguientes puntos en exteriores o interiores a C.

a) $A =$ $(-4,5)$ _____
b) $B =$ $(0,5)$ _____
c) $C =$ $(3,6)$ _____
d) $D =$ $\left(-4, \frac{3}{4}\right)$ _____

2. Determine la distancia de los puntos A, B, C, D al centro de la circunferencia O utilizando la fórmula de distancia entre puntos, verifique los resultados utilizando GeoGebra.

   a) Distancia entre A y O: _____

   b) Distancia entre B y O: _____

   c) Distancia entre C y O: _____

   d) Distancia entre D y O: _____

Guía de Solución

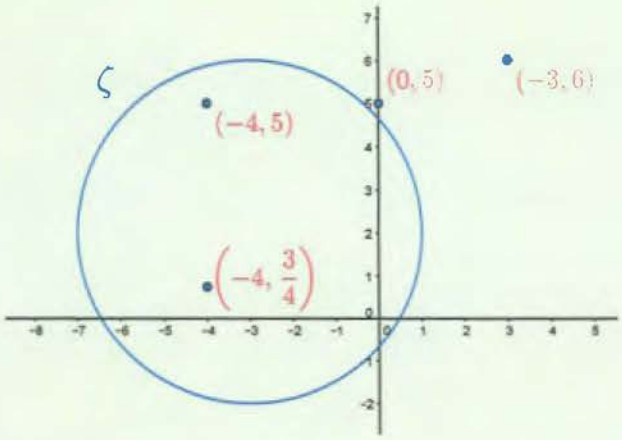


Figura 2.14:
Fuente: Elaboración propia

1. a) $A =$ $(-4,5)$ Punto Interior
   b) $B =$ $(0,5)$ Punto Exterior
   c) $C =$ $(3,6)$ Punto Exterior
   d) $D =$ $\left(-4, \frac{3}{4}\right)$ Punto Interior

2. Determine la distancia de los puntos A, B, C, D al centro de la circunferencia O utilizando la fórmula de distancia entre puntos, verifique los resultados utilizando GeoGebra.

   a) Distancia entre A y O:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-4+3)^2+(5-2)^2} &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \\ &\approx 3{,}16 \end{aligned}$$

b) Distancia entre B y O:

$$\begin{aligned}\sqrt{(0+3)^2+(5-2)^2} &= \sqrt{9+9}\\ &= \sqrt{18}\\ &\approx 4{,}24\end{aligned}$$

c) Distancia entre C y O:

$$\begin{aligned}\sqrt{(3+3)^2+(6-2)^2} &= \sqrt{36+16}\\ &= \sqrt{52}\\ &\approx 7{,}21\end{aligned}$$

d) Distancia entre D y O:

$$\begin{aligned}\sqrt{(-4+3)^2+(\tfrac{3}{4}-2)^2} &= \sqrt{1+\tfrac{25}{16}}\\ &= \sqrt{\tfrac{41}{16}}\\ &\approx 1{,}6\end{aligned}$$

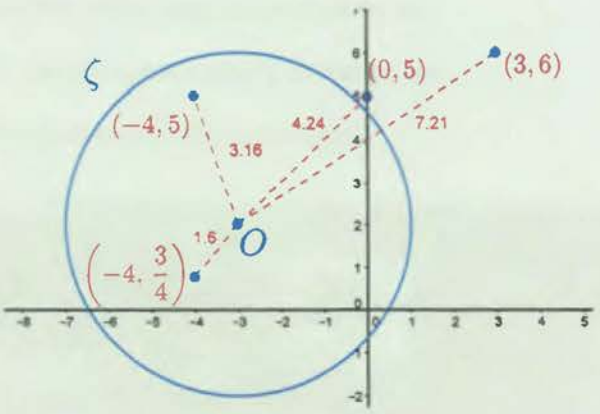


Figura 2.15:
Fuente: Elaboración propia

Teorema

Sea $\zeta : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ una circunferencia de centro (a,b) y radio r, $P = (p,q)$ un punto en el mismo plano. Entonces:

a Si $\sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} > r$ el punto P es exterior a ζ

b Si $\sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} < r$ el punto P es interior a ζ

c Si $\sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = r$ el punto P pertenece a ζ

Problema

La municipalidad de San Ramón cuenta con servicio de wifi gratuito para los pobladores que se encuentran cerca del parque, se sabe que el router inalámbrico tiene 125 metros de alcance, asimismo se conocen algunas direcciones:

- La Heladería Jervados se ubica 50 metros oeste y 100 sur
- El Kiosco de parque se ubica 5 metros este y 95 metro sur
- La pops se ubica 50 metros oeste y 120 metros sur
- El templo parroquial 65 metros este y 70 metro sur
- CoopeAnde 55 metros este y 120 metro al sur

Figura 2.16:
Fuente: Google Maps

a) ¿En cuáles de estos sitios se puede disfrutar de la señal WiFi?

b) ¿Cuál de estos sitios asegura una mejor señal?

Guía de Solución

Se debe calcular la distancia entre de cada uno de los lugares mencionados y la municipalidad (**Origen del eje de corrdenadas**), para determinar cuales de estos establecimientos reciben la señal, es decir son interiores a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 125^2$$

Al tener el router $125m$ de alcance los puntos con distancias menores a esta cifra estarán dentro de la zona WiFi.

Lugar	Coordenadas	Distancia	Posición
Heladería Jervados	$(-50,-100)$	$\sqrt{(-50)^2+(-100)^2} = \sqrt{12500} \approx 111,8m$	Interior
Quiosco de parque	$(5,-95)$	$\sqrt{(5)^2+(-95)^2} = \sqrt{9050} \approx 95,1m$	Interior
Pop's	$(-50,-120)$	$\sqrt{(-50)^2+(-120)^2} = \sqrt{16900} \approx 130m$	Exterior
Templo Parroquial	$(65,-70)$	$\sqrt{(65)^2+(-70)^2} = \sqrt{9125} \approx 95,5$	Interior
CoopeAnde	$(55,-120)$	$\sqrt{(55)^2+(-120)^2} = \sqrt{17425} \approx 132m$	Exterior

Por último en el Kiosco del parque se recibe mejor señal que en los restantes cuatro lugares, pues es el que está a menor distancia con respecto a la Municipalidad.

Ejemplo

Considere el punto $A(-2,-4)$ y la circunferencia de ecuación

$$\zeta : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

1. Clasifique la posición del punto A en exterior o interior con respecto a ζ.
2. Utilice GeoGebra para representar la situación y determine un centro O_1 para que el punto A esté sobre la circunferencia de radio 2.
3. a) ¿Es posible encontrar más puntos para los cuales se cumpla el inciso b?
   b) Si es así, ¿cuáles son? ***Sugerencia:*** Construya varias circunferencias de radio 2, y posicionelas de forma adecuada, analice el resultado.

Guía de Solución

1. Tenemos $\zeta : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ y $A(-2,-4)$

$$\begin{aligned}(-2-1)^2 + (-4+1)^2 &= (-3)^2 + (-3)^2 \\ &= 9+9 \\ &= 18\end{aligned}$$

Como $18 > 4$ el punto A es exterior a ζ.

2. Utilizando GeoGebra se construye la figura 2.17:

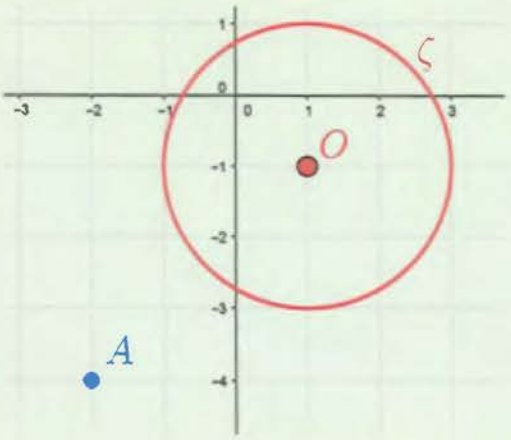


Figura 2.17:
Fuente: Elaboración propia

Ahora un posible centro O_1 para que A esté sobre ζ es $O_1(-2,-2)$, pues:

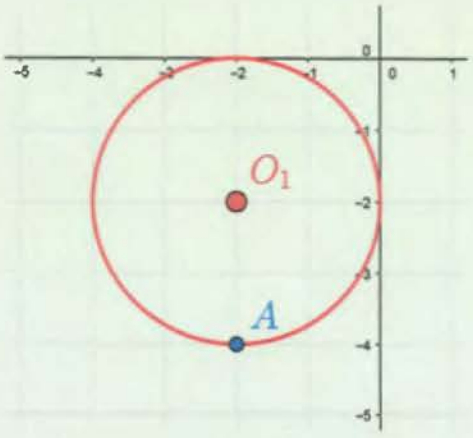


Figura 2.18:
Fuente: Elaboración propia

5. Todos los puntos sobre la circunferencia de centro A y radio 2 cumplen el inciso anterior. (Ver figura 2.19)

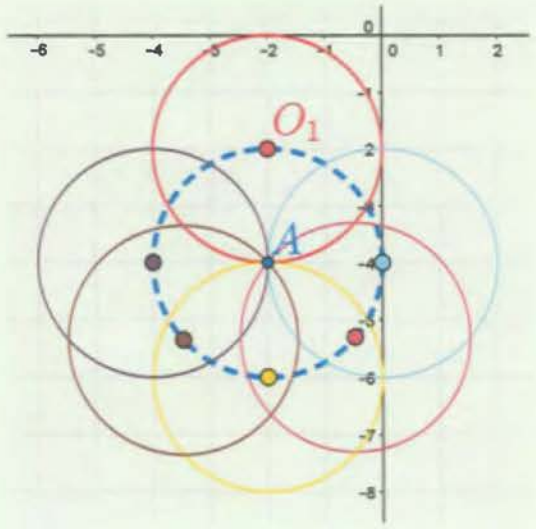


Figura 2.19:
Fuente: Elaboración propia

Problema

En la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente se inició el proyecto de instalar estaciones solares, en las cuales se pueden recargar los teléfonos celulares.
Si una de las zonas verdes tiene forma rectangular, cuyas dimensiones son $12m$ de ancho y $18m$ de largo y se encuentran instalados 6 aspersores de riego con un radio de $3m$, ubicados de forma en que se riegue la mayor cantidad de zona verde.

Figura 2.20:
Imagen Ilustrativa

1. Utilice Geogebra para modelar la situación.

2. ¿En cuál lugar se puede colocar la estación sin que sea afectada por el agua en los momentos de riego?

Guía de Solución

1. Los aspersores están representados por seis circunferencias tangentes entre sí ubicadas sobre el rectangulo de 12 por 18 metros. De esta manera riegan la mayor cantidad de zona verde, debido a que las circunferencias no se intersecan entre sí, (Ver figura 2.21)

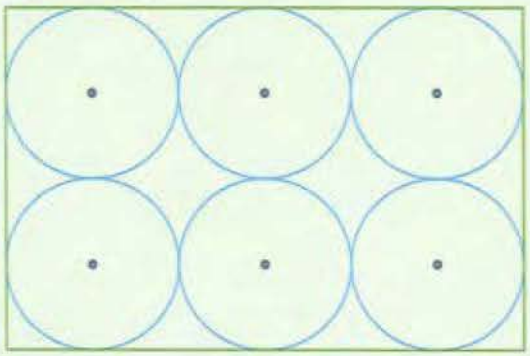


Figura 2.21:
Fuente: Elaboración propia

2. Al analizar la imagen podemos identificar 4 posibles lugares donde se pueden colocar las estaciones solares, sin que se vean afectadas por los rosiadores de agua: (Ver figura 2.22)

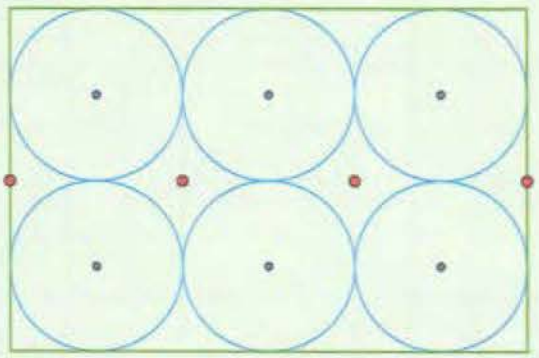


Figura 2.22:
Fuente: Elaboración propia

Problema

El radar del dragón tiene un radio máximo de búsqueda de **5 mil** kilómetros.
Si los personajes están en búsqueda de las Esferas del Dragón y con respecto a la Corporación Capsule se encuentran en las siguientes posiciones:

- Goku a 10.000 km este y 6.000 Km Norte
- Goten a 12.000 km este y 4.000 Km Sur
- Krilin a 5.000 Km Oeste y 3.000 Km Norte
- Trunks está en la Compañía.

Figura 2.23:

Fuente: http://2.bp.blogspot.com/-vYxTJJemOZg/UATW7hBxJTI/AAAAAAAAHbQ/HEqURAZIgvQ/s1600/Dragonball_world_map_by_0some_weirdguy0-d4qonuq.jpg

Teniendo en cuenta la figura 2.23 (las medidas están en miles de Kilometros):

1. Determine las ecuaciones que representan el rango del radar de cada uno de los personajes.
2. Represente la situación en GeoGebra y determine ¿cuántas esferas se reflejan en los radares de cada uno de los personajes?
3. ¿En que lugar se debe posicionar Trunks para que se reflejen la mayor cantidad de esferas en su radar'

Guía de Solución

1

Personaje	Ubicación	Ecuación
Goku	$(10,6)$	$\zeta_1 : (x-10)^2 + (x-6)^2 = 25$
Goten	$(12,-4)$	$\zeta_2 : (x-12)^2 + (x+4)^2 = 25$
Krilin	$(-5,3)$	$\zeta_3 : (x+5)^2 + (x-3)^2 = 25$
Trunks	$(0,0)$	$\zeta_4 : x^2 + y^2 = 25$

2

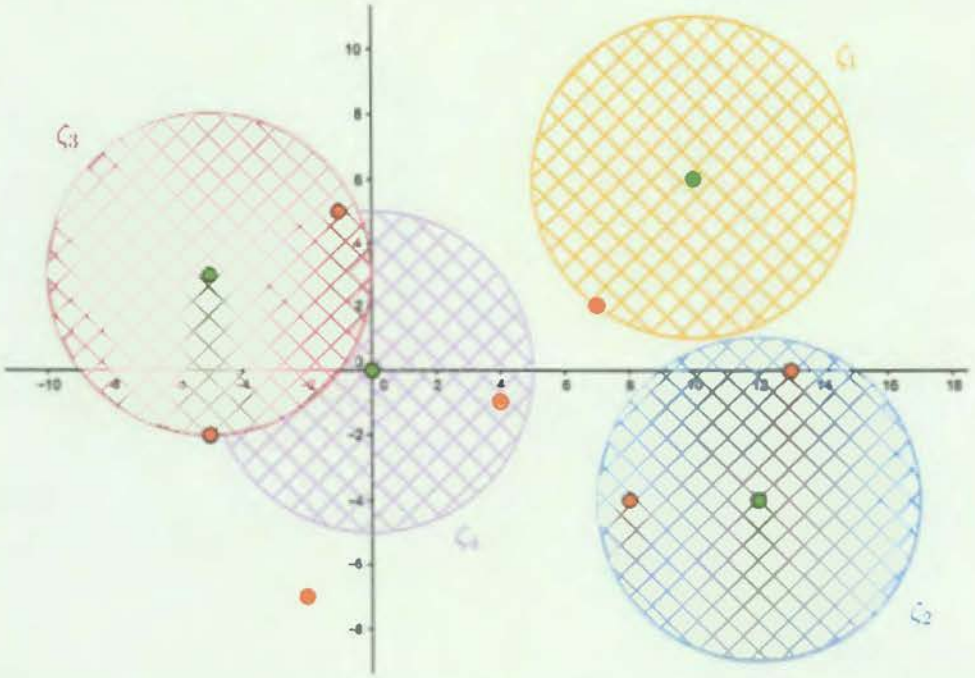


Figura 2.24:
Fuente: Elaboración propia

Personaje	Cantidad de enferas en su radar
Goku	1
Goten	2
Krilin	2
Trunks	1

Si trunks se posiciona $8000km$ al este de la corporación se reflejarán 4 esfereras del dragón en su radar.

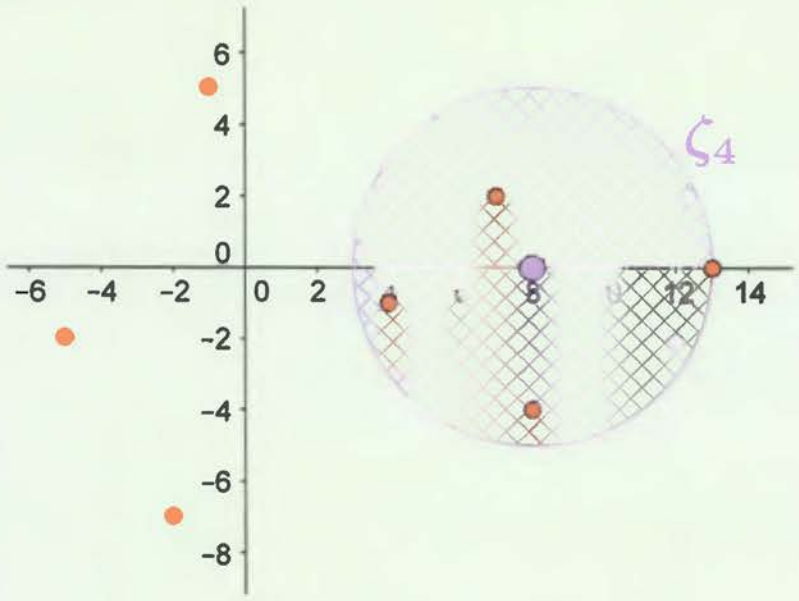


Figura 2.25:
Fuente: Elaboración propia

Lista de Ejercicios

- Un submarino se ubica en el mar con coordenadas $S\ (3,-6)$, en cierto momento detecta un barco sobre la superficie ubicado en la coordenada $B\ (11,0)$ respecto al sistema de ejes cartesianos. Determine la distancia que hay del submarino al barco.

- Una cadena de restaurantes tiene servicio a domicilio en dos locales cuyos centros se pueden representar en un plano cartesiano por los puntos $O\ (0,0)$ y $I\ (10,0)$. En la primera cubren 9 Km y en la segunda 3 Km a la redonda. Una zona industrial en forma de cuadrado, tiene sus cuatro vértices en el I cuadrante. Con respecto a uno de sus lados $\overline{PQ}$ se sabe que $P\left(\frac{27}{5},\frac{36}{5}\right)$ está en el límite de la cobertura del primer local y que $Q\ (a,b)$ está en el límite de cobertura del segundo local.

  a) Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que describen la cobertura de los locales.

  b) Justifique que existe una región donde se puede atender con cualquier de los dos locales.

  c) Determine cuál de las siguientes casas, representadas por puntos, se pueden atender con el primer local, con el segundo, con ambos o con ninguno:

  a) $(5,5)$ **e)** $(0,10)$
  b) $(1,1)$ **f)** $(8,-1)$
  c) $(11,1)$ **g)** $(12,-2)$
  d) $\left(\frac{15}{2},\frac{1}{2}\right)$ **h)** $(15,1)$

  d) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P tangente a la circunferencia que describe la cobertura del primer local.

  e) Muestre que esa misma recta es tangente a la circunferencia que describe la cobertura del segundo local.

  f) Encuentre las coordenadas del punto Q.

  g) Encuentre la medida del lado de la zona industrial.

  h) Encuentre las coordenadas de los otros dos vértices de la zona industrial.

- Un movimiento sísmico es un movimiento vibratorio producido por la pérdida de estabilidad de masas de la corteza. Cuando el movimiento llega a la superficie y se propaga por ésta se le llama terremoto.

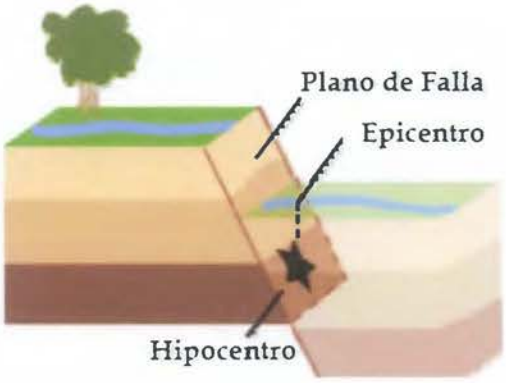


Figura 2.26:
Fuente: MEP 2012

El movimiento sísmico se propaga concéntricamente y de forma tridimensional a partir de un punto de la Litósfera al hipocentro. Cuando las ondas procedentes del hipocentro llegan a la superficie terrestre se convierten en bidimensionales y se propagan de forma concéntrica a partir del primer punto de contacto con ella. Este punto se llama epicentro.

(http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/4ESO/MedioNatural2/contenido2.htm)

Ocurre un sismo y en tres estaciones se reportaron ondas secundarias de similar intensidad. Tomando como punto de referencia la estación central sismológica, las tres estaciones se ubican así:

A: 24 millas al norte y 15 millas al este.

B: 30 millas al norte y 6 millas al este.

C: 15 millas al sur y 10 millas al este.

Con base a la información anterior, analice:

a) ¿Cuál es la ubicación del epicentro con respecto a la estación central?

b) ¿Cuál fue el radio de alcance de la onda sísmica?

c) ¿Cómo se podría representar el comportamiento sísmico mediante una ecuación?

ejercicios 3 y 4 tomados del libro: UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA COLEGIO NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA COORDINACIÓN ACADÉMICA.

Matemática Décimo Año Contenidos de los nuevos programas, 2015.

2.4 Recta exterior, secante y tangente a una circunferencia

Imagen tomada de: http://www.arqhys.com/contenidos/puentes-construccion.html

Problema

Los piñones de una bicicleta están a una distancia de $40cm$, de la siguiente manera (Ver figura 2.27),

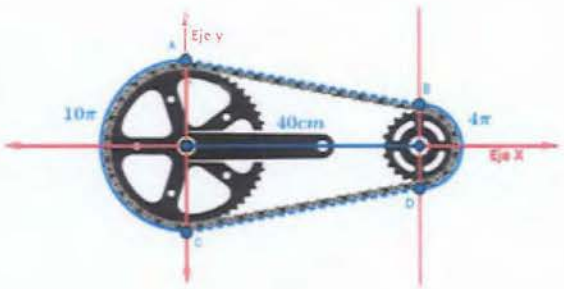


Figura 2.27:
Fuente: Elaboración propia

Si sabemos que la parte de la cadena que se encuentra enrollada sobre el plato mayor mide $10\pi cm$ y para el plato menor mide $4\pi cm$.

1. Determine las ecuaciones de las circunferencias de ambos platos de distribución.
2. Si la cadena se llegara a reventar debemos buscar una nueva. ¿Cuál debería ser la longitud de la nueva cadena?

Guía de Solución

1. Para determinar las ecuaciones de las circunferencias en ambos platos, es necesario recordar la fórmula para determinar el perímetro de la circunferencia

$$P = 2\pi r$$

En este caso sólo se cuenta con la mitad de la circunferencia, pues como se indica en la figura la cadena recubre la mitad de cada plato, por lo que la fórmula que debemos utilizar es

$$P = \pi r$$

Plato Mayor	Plato Menor
$P = \pi r$	$P = \pi r$
$10\pi = \pi r$	$4\pi = \pi r$
$10 = r$	$4 = r$

Una vez determinado el valor del radio para cada circunferencia, procedemos a identificar las coordenadas del centro de cada una de éstas y brindamos la ecuación de cada una

Circunferencia Mayor	Circunferencia Menor
Centro: $(0,0)$	**Centro:** $(40,0)$
Ecuación:	**Ecuación:**
$x^2 + y^2 = 10^2$	$(x-40)^2 + y^2 = 4^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 100$	$\Rightarrow (x-40)^2 + y^2 = 16$

2. Para determinar la longitud de la cadena es necesario averiguar la distancia entre el punto A y el punto B.

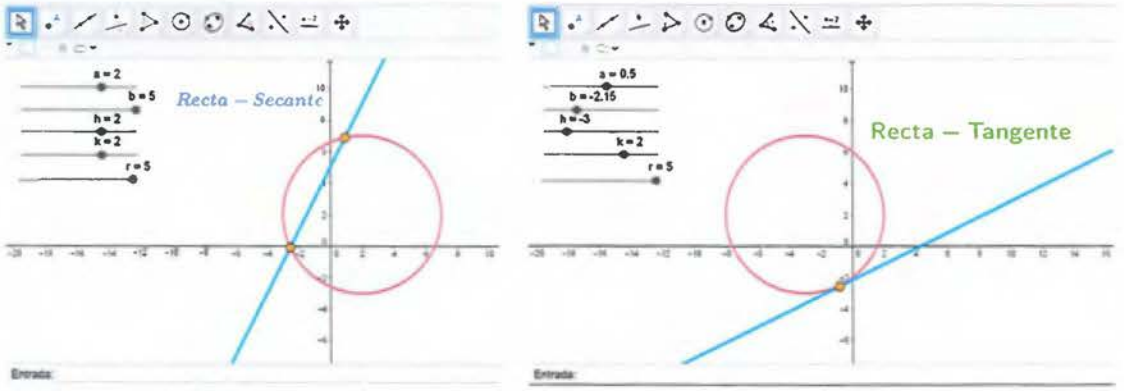
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(40-0)^2 + (4-10)^2} \\ &= \sqrt{(40)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{1600 + 36} \\ &= 2\sqrt{409} \\ &\approx 40,44 \end{aligned}$$

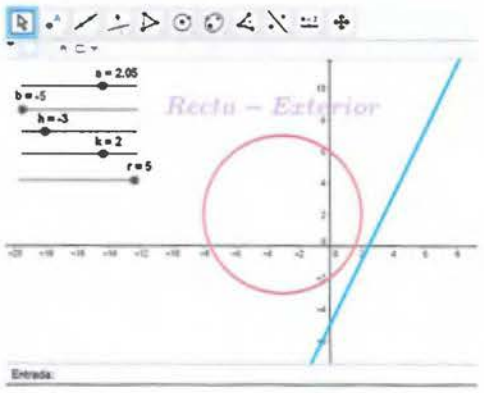
Por teorema de Thales la distancia de A a B es la misma de C a D, entonces se multiplica el valor obtenido por dos, es decir,

$$\begin{aligned} 2 \cdot d &= 2 \cdot 2\sqrt{409} \\ &= 2 \cdot 40,44 \\ &\approx 80,89 \end{aligned}$$

Por lo tanto la nueva cadena debe tener una longitud de
$80,89 + 10\pi + 4\pi = (80,89 + 14\pi)cm$ ó aproximadamente $124,87cm$

Actividad:
Los estudiantes analizan la construcción 4:





Construcción 4:

1. Con respecto a la construcción anterior utilice GeoGebra para crear una construcción similar y describa:

   a) ¿Qué sucede al dejar fijo a y mover el deslizador b?

   b) ¿Qué sucede al dejar fijo b y mover el deslizador a?

2. Una vez observados los cambios que ocurren al mover una de las dos variables pertenecientes a la recta, use la construcción para responder las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué sucede si se fijan h y r al mover el deslizador k?

   b) ¿Qué sucede si se fijan k y r al mover el deslizador h?

   c) ¿Qué sucede si se fijan h y k al mover el deslizador r?

Guía de Solución

1. *a*) Al mover el deslizador b, la recta se traslada de derecha a izquierda y viceversa pasando de ser una recta exterior a una tangente o una secante.

   b) Al mover el deslizador a, la recta gira 360^0 sobre la circunferencia.

2 *a)* Se obtiene una traslación vertical hacia arriba o hacia abajo, de la circunferencia respecto a la recta de k unidades.

b) Se obtiene una traslación horizontal hacia la izquierda o derecha, de la circunferencia respecto a la recta de h unidades.

c) Se visualiza el cambio de tamaño de la circunferencia según el radio r.

Definición (Recta exterior a una circunferencia)

Si una recta y una circunferencia no se intersecan entre sí, se dice que la recta es exterior a la circunferencia.

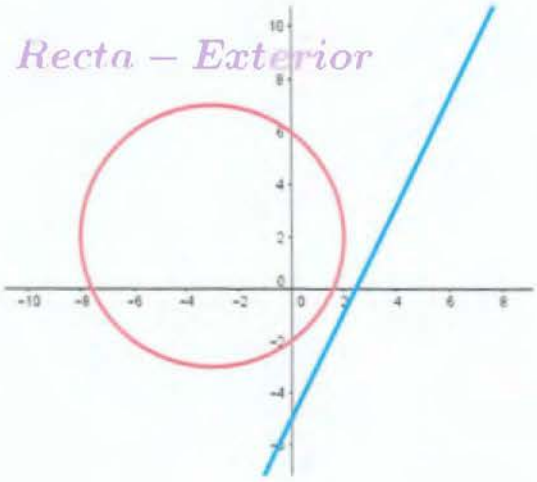


Figura 2.28:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Considere la ecuación de la circunferencia

$$(x-3)^2+(y-5)^2=4$$

Verifique que la recta que contiene los puntos $A=(8,3)$ y $B=\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$ es exterior a la circunferencia.

Guía de Solución

1. Calculamos el valor de la pendiente m.

$$m = \frac{\frac{13}{2}-3}{\frac{9}{2}-8}$$

$$= -\frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}}$$

$$= -1$$

2. Determinaremos el valor de b.

$$\begin{aligned} b &= 3-(-1\cdot 8) \\ &= 3--8 \\ &= 11 \end{aligned}$$

3. Se define la ecuación de la recta.

$$y = -x+11$$

4. Reemplazamos el valor de y en la ecuación de la circunferencia.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-5)^2=4 &= (x-3)^2+(-x+11-5)^2=4 \\ &= (x-3)^2+(-x+6)^2=4 \\ &= x^2-6x+9+x^2-12x+36=4 \\ &= 2x^2-18x+41=0 \end{aligned}$$

5. Finalmente calculamos el valor del discriminante Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-18)^2-4\cdot 2\cdot 41 \\ &= 324-328 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Esto significa que no hay puntos de intersección entre la recta y el círculo y por consiguiente, la recta es exterior a la circunferencia.

Definición (Recta secante a una circunferencia)

Si una recta y una circunferencia se intersecan en dos puntos, se dice que la recta es secante a la circunferencia.

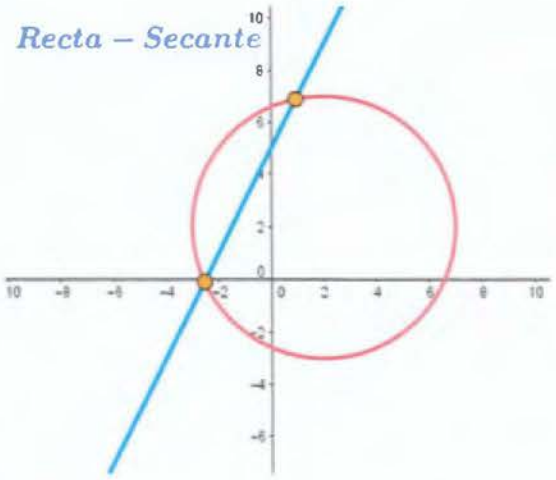


Figura 2.29:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Considere la ecuación de la circunferencia

$$(x-3)^2+(y-5)^2=4$$

Verifique que la recta que contiene los puntos $A=(3,7)$ y $B=(1,5)$ es secante a la circunferencia.

Guía de Solución

1. Calculamos el valor de la pendiente m.

$$\begin{aligned} m &= \frac{5-7}{1-3} \\ &= \frac{-2}{-2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Determinaremos el valor de b.

$$\begin{aligned} b &= 5-(1\cdot 1) \\ &= 5-1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. Se define la ecuación de la recta.

$$y = x+4$$

4. Reemplazamos el valor de y en la ecuación de la circunferencia.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-5)^2=4 &= (x-3)^2+(x+4-5)^2=4 \\ &= (x-3)^2+(x-1)^2=4 \\ &= x^2-6x+9+x^2-2x+1=4 \\ &= 2x^2-8x+6=0 \end{aligned}$$

5. Finalmente calculamos el valor del discriminante Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-8)^2-4\cdot 2\cdot 6 \\ &= 64-48 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Como el discriminante es positivo la ecuación tiene dos soluciones, es decir la recta y el círculo tienen dos puntos de intersección, por lo tanto la recta es secante a la circunferencia.
Calculamos los puntos:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\cdot 2}$ $= \frac{8+4}{4}$ $= \frac{12}{4}$ $= 3$	$x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\cdot 2}$ $= \frac{8-4}{4}$ $= \frac{4}{4}$ $= 1$

Problema

El redondel de Zapote tiene un radio aproximado de $72m$. Se tiene una piscina de agua ubicada $25m$ al Este y $15m$ al Norte respecto al centro del redondel y se desea llevar a un toro que se encuentra en la coordenada (0,y) respecto al centro de la arena. Si la distancia entre ambos es $25\sqrt{2}m$. ¿Cuál es el valor de y?

Defina la ecuación de la recta que pasa por esos puntos y que representa una recta secante a la circunferencia.

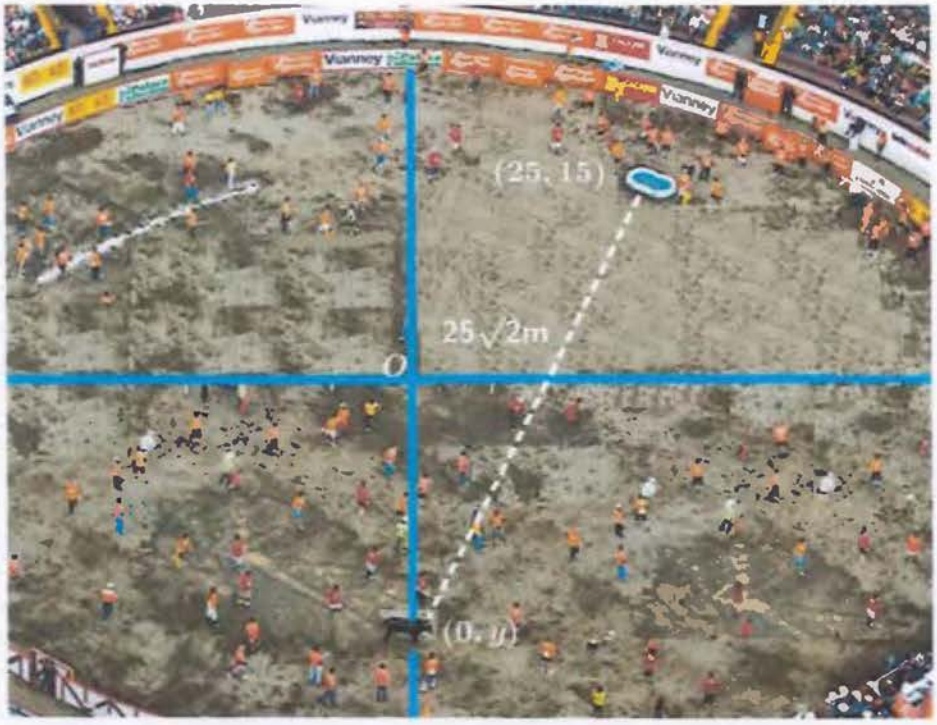


Figura 2.30:
Fuente: http://www.craerea.com/galeria.html

Guía de Solución

Bosquejo de la situación a resolver (Ver figura 2.31):

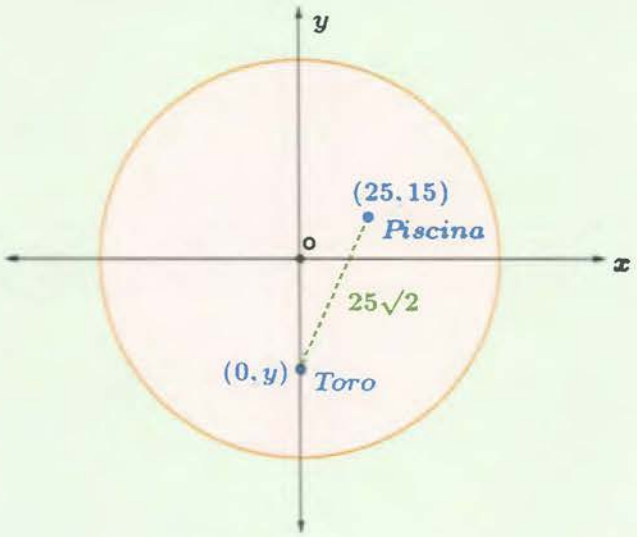


Figura 2.31:
Fuente: Elaboración propia

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
\Rightarrow 25\sqrt{2} &= \sqrt{(25-0)^2+(15-y)^2} \\
\left(25\sqrt{2}\right)^2 &= (25)^2+(15-y)2 \\
1250-625 &= (15-y)^2 \\
625 &= (15-y)^2 \\
\pm\sqrt{625} &= 15-y \\
\pm 25-15 &= -y
\end{aligned}
$$

$$-10 = y \text{ o } 35 = y$$

Teniendo en cuenta la situación planteada en la imagen, el valor de y debe ser -10

Definición (Recta tangente a una circunferencia)

Si una recta y una circunferencia se intersecan en sólo punto, se dice que la recta es tangente a la circunferencia.

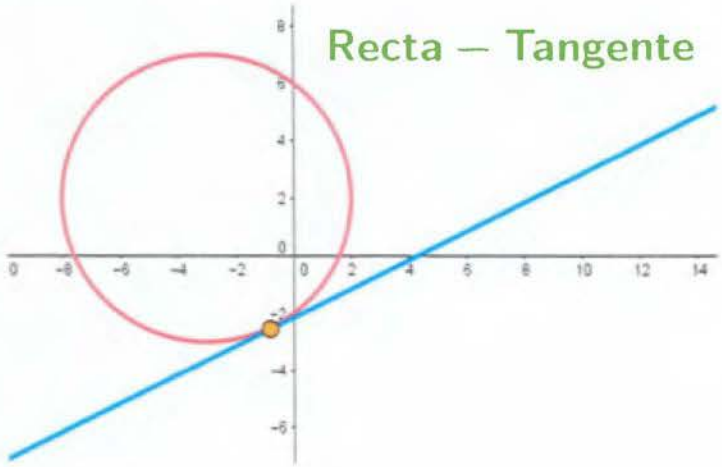


Figura 2.32:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Considere la ecuación de la circunferencia

$$(x-3)^2+(y-5)^2=4$$

Verifique que la recta que contiene los puntos $A=(3,3)$ y $B=(8,3)$ es tangente a la circunferencia.

Guía de Solución

1. Calculamos el valor de la pendiente m.

$$\begin{aligned} m &= \frac{3-3}{8-3} \\ &= \frac{0}{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Determinaremos el valor de b.

$$\begin{aligned} b &= 3-(3\cdot 0) \\ &= 3-0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

3. Se define la ecuación de la recta.

$$y=3$$

4. Reemplazamos el valor de y en la ecuación de la circunferencia.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-5)^2=4 &= (x-3)^2+(3-5)^2=4 \\ &= (x-3)^2+(-2)^2=4 \\ &= x^2-6x+9+4=4 \\ &= x^2-6x+9=0 \end{aligned}$$

5. Finalmente calculamos el valor del discriminante Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6)^2-4\cdot 1\cdot 9 \\ &= 36-36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que solo hay un punto de intersección entre la recta y el círculo y por consiguiente la recta es tangente a la circunferencia.

Ejemplo

Se desea combatir en un gimnasio Pokémon que está ubicado en una propiedad privada. Si para combatir en dicho gimnasio es necesario acercarse mínimo 5 metros y si se tiene que la ecuación de la **calle #1**(Recta anaranjada) es $3x + 4y = 25$ y para la **calle #2**(Recta Azul) es $-4x + 3y = 26$.

¿En qué punto del gimnasio se debe ubicar para poder combatir sin invadir la propiedad privada?

Figura 2.33:
Fuente:
http://says.com/my/fun/here-s-how-you-can-become-a-pokemon-go-gym-leader

Guía de Solución

Para resolver el problema se necesita únicamente la ecuación de la calle #1, pues ésta se encuentra tangente a la circunferencia del gimnasio, mientras que la calle #2 es exterior a la circunferencia del gimnasio

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 25 \\ y &= \tfrac{25-3x}{4} \end{aligned}$$

El radio del círculo donde está ubicado el gimnasio pokémon es 5 y el centro es $(0,0)$, por lo tanto la ecuación de la circunferencia es

$$x^2+y^2=5^2$$

Sustituyendo la ecuación de la calle #1 en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \\ x^2+\left(\tfrac{25-3x}{4}\right)^2 &= 25 \\ 16x^2+(25)^2-2\cdot 25\cdot 3x+(3x)^2 &= 25\cdot 16 \\ 16x^2+625-150x+9x^2 &= 400 \\ 25x^2-150x+225 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Para determinar el valor de y, sustituimos en la ecuación de la calle #1, es decir,

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{25-3x}{4} \\ y &= \tfrac{25-3\cdot 3}{4} \\ y &= \tfrac{25-9}{4} \\ y &= \tfrac{16}{4} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto donde se debe ubicar para combatir en el gimnasio Pokémon sin invadir la propiedad privada es $(3,4)$.

Observación

Si se tiene la ecuación de una circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

se puede establecer la posición de una recta cuya ecuación es

$$y=mx+b$$

al sustituir ésta ecuación en la de la circunferencia

$$(x-h)^2+(mx+b-k)^2=r^2$$

✓Si $\Delta > 0$ la recta interseca a la circunferencia en dos puntos, entonces la recta es secante.
✓Si $\Delta = 0$ la recta interseca a la circunferencia en un único punto, entonces recta es tangente.
✓Si $\Delta < 0$ la recta no interseca a la circunferencia, entonces la recta es exterior.

Ejemplo

1. Para los siguientes pares ordenados, determine los posibles valores que puede tomar la variable faltante si la distancia entre ambos puntos está dada.

   a) La distancia entre $(x,2)$ y $(-3,-2)$ es $4\sqrt{5}m$ entonces $x=$_____

   b) La distancia entre $(-5,6)$ y $(2,y)$ es $7\sqrt{2}m$ entonces $y=$_____

   c) La distancia entre $(8,-3)$ y $(-4,y)$ es $4\sqrt{13}m$ entonces $y=$_____

   d) La distancia entre $(x,-2)$ y $(3,3)$ es $5\sqrt{5}m$ entonces $x=$_____

2. Con base en el ejercicio anterior defina la ecuación de la recta que contiene ambos puntos.

   a) $(x,2)$ y $(-3,-2)$_____

   b) $(-5,6)$ y $(2,y)$_____

   c) $(8,-3)$ y $(-4,y)$_____

   d) $(x,-2)$ y $(3,3)$ _____

Guía de Solución

1 Para los siguientes pares ordenados, determine la variable faltante si la distancia entre ambos puntos está dada.

a) La distancia entre $(x,2)$ y $(-3,-2)$ es $4\sqrt{5}m$ entonces $x_1 = -11$ y $x_2 = 5$

$$\begin{aligned}
4\sqrt{5} &= \sqrt{(-3-x)^2+(-2-2)^2} \\
\left(4\sqrt{5}\right)^2 &= (-3-x)^2+(-4)^2 \\
80 &= (-3-x)^2+16 \\
80-16 &= (-3-x)^2 \\
64 &= (-3-x)^2 \\
64 &= (-3)^2+2\cdot 3\cdot x+(x)^2 \\
64 &= 9+6x+x^2 \\
0 &= x^2+6x-55
\end{aligned}$$

R/ $x_1 = -11$ y $x_2 = 5$

b) La distancia entre $(-5,6)$ y $(2,y)$ es $7\sqrt{2}m$ entonces $y_1 = 13$ y $y_2 = -1$

$$\begin{aligned}
7\sqrt{2} &= \sqrt{(2--5)^2+(y-6)^2} \\
\left(7\sqrt{2}\right)^2 &= (7)^2+(y-6)^2 \\
98 &= 49+(y-6)^2 \\
98-49 &= (y-6)^2 \\
49 = (y-6)^2 & \\
49 &= (y)^2-2\cdot y\cdot 6+(6)^2 \\
49 &= y^2-12y+36 \\
0 &= y^2-12y-13
\end{aligned}$$

R/ $y_1 = 13$ y $y_2 = -1$

c) La distancia entre $(8,-3)$ y $(-4,y)$ es $4\sqrt{13}m$ entonces $y_1 = -11$ y $y_2 = 5$

$$
\begin{aligned}
4\sqrt{13} &= \sqrt{(-4-8)^2+(y--3)^2} \\
\left(4\sqrt{13}\right)^2 &= (-12)^2+(y+3)^2 \\
208 &= 144+(y+3)^2 \\
208-144 &= (y+3)^2 \\
64 &= (y+3)^2 \\
64 &= (y)^2+2\cdot y\cdot 3+(3)^2 \\
64 &= y^2+6y+9 \\
0 &= y^2+6y-55
\end{aligned}
$$

R/ $y_1=-11$ y $y_2=5$

d) La distancia entre $(x,-2)$ y $(3,3)$ es $5\sqrt{5}m$ entonces $x=-7$

$$
\begin{aligned}
5\sqrt{5} &= \sqrt{(3-x)^2+(3--2)^2} \\
\left(5\sqrt{5}\right)^2 &= (3-x)^2+(5)^2 \\
125 &= (3-x)^2+25 \\
125-25 &= (3-x)^2 \\
100 &= (3-x)^2 \\
100 &= (3)^2-2\cdot 3\cdot x+(x)^2 \\
100 &= 9-6x+x^2 \\
0 &= x^2-6x+91
\end{aligned}
$$

R/ $x_1=-7$ y $x_2=13$

Con base en el ejercicio anterior defina la ecuación de la recta que contiene ambos puntos.

a) Tomemos $x=-11$, los pares ordenados serían $(-11,2)$ y $(-3,-2)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$b=y-mx$	$y=mx+b$
$m=\frac{-2-2}{-3--11}$	$b=-2-\left(-\frac{1}{2}\cdot -3\right)$	$y=-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$
$m=-\frac{4}{8}$	$b=-2-\frac{3}{2}$	$y=\frac{-x-7}{2}$
$m=-\frac{1}{2}$	$b=\frac{-4-3}{2}$	
	$b=-\frac{7}{2}$	

b) Tomemos $y = 13$, los pares ordenados serían $(-5, 6)$ y $(2, 13)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{13-6}{2--5}$	$b = 6 - (-5 \cdot 1)$	$y = x + 11$
$m = \frac{7}{7}$	$b = 6 + 5$	
$m = 1$	$b = 11$	

c) Tomemos $y = 5$, los pares ordenados serían $(8, -3)$ y $(-4, 5)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{5--3}{-4-8}$	$b = 5 - \left(-4 \cdot -\frac{2}{3}\right)$	$y = -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$
$m = -\frac{8}{12}$	$b = 5 - \frac{8}{3}$	$y = \frac{-2x+7}{3}$
$m = -\frac{2}{3}$	$b = \frac{15-8}{3}$	
	$b = \frac{7}{3}$	

d) Tomemos $x = -7$, los pares ordenados serían $(-7, -2)$ y $(3, 3)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{3--2}{3--7}$	$b = 3 - \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)$	$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
$m = \frac{5}{10}$	$b = 3 - \frac{3}{2}$	$y = \frac{x+3}{2}$
$m = \frac{1}{2}$	$b = \frac{6-3}{2}$	
	$b = \frac{3}{2}$	

Lista de Ejercicios

1. Mediante un sistema de navegación por radio, una embarcación turística se mueve de una isla ubicada en la coordenada $(-10,-6)$ a la costa que se ubica en la coordenada $(x,8)$, conservando una trayectoria perpendicular a dos faros situados en los puntos de coordenadas $A\,(-8,6)$ y $B\,(6,-10)$.

   a) ¿Cuál es el valor de la variable x que determina la ubicación de la costa en el sistema de coordenadas?

   b) ¿Cuál es la longitud de dicha trayectoria?

2. Determine, la posición relativa de la recta m, respecto a la circunferencia C en cada caso:

   a) $m: 2x+8y-16=0$ Si $C: x^2+y^2+2y-5=0$
   b) $m: 2x+y-7=0$ Si $C: x^2+y^2+8x-10y+16=0$
   c) $m: 3x-4y-18=0$ Si $C: x^2+y^2-6x-8y=0$
   d) $m: x-2y+1=0$ Si $C: x^2+y^2+2x-6y+9=0$

3. Determine la posición relativa de la recta cuya ecuación es $x-y=4$ respecto de las circunferencias dadas:

   a) $x^2+y^2-14x-2y+48=0$
   b) $x^2+y^2-14x-6y+50=0$
   c) $x^2+y^2-12x+6y+40=0$

4. Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-10x-2y+18=0$ y la recta l con ecuación $x+y+r=0$. Determine el valor de r para que l sea tangente a la circunferencia.

2.5 Rectas Paralelas y Perpendiculares

Imagen tomada de:
https://www.alltravels.com/costa-rica/san-jose/carazo/photos/current-photo-82161450

Actividad.
Los estudiantes crean las rectas utilizando la aplicación Geogebra

$$l_1 : y = mx + b$$

$$l_2 : y = cx + d$$

y se les pide que manipulen los deslizadores para analizar la respuesta de las interrogantes:

1. ¿Dos rectas se pueden intersecar mas de una vez?

2. ¿En cuáles casos dos rectas se intersecan únicamente una vez? ¿Importa el valor de b y d?

3. ¿Pueden dos rectas nunca intersecarse?

4. Las rectas que nunca se intersecan se les llama paralelas. Construya una definición formal para este concepto en relación con los valores de m y c?

Guía de Solución

1. ¿Dos rectas se pueden intersecar mas de una vez?
Dos rectas no se pueden intersecar más de una vez

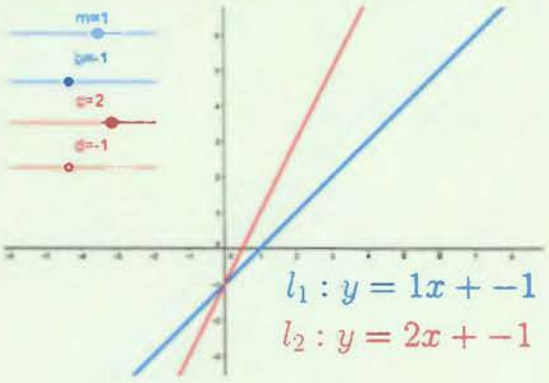
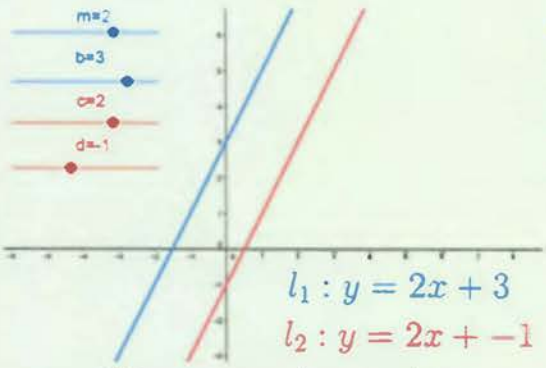
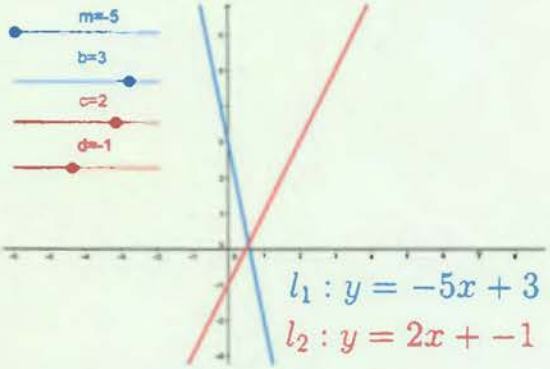


Figura 2.34:
Fuente: Elaboración propia

2. ¿En cuáles casos dos rectas se intersecan? ¿Importa el valor de b y d?
Dos rectas se intersecan cuando los valores de sus pendientes son distintos, los valores de b y d no afectan



(a) Rectas con pendientes iguales



(b) Rectas con pendientes diferentes

Figura 2.35:
Fuente: Elaboración propia

3. ¿Pueden dos rectas nunca intersecarse?
   Si los valores de las pendientes de las dos rectas son iguales, las rectas no se intersecan (Ver figura 2.35)

4. Las rectas que nunca se intersecan se les llama paralelas.
   Construya una definición formal para este concepto en relación con los valores de m y c?
   Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales

Definición

Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2 son paralelas si $m_1 = m_2$.
Es decir dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.
Se utiliza la simbología $l_1 \parallel l_2$ para denotar que l_1 y l_2 son paralelas.

Ejemplo

Considere las rectas

$$l_1 : 5x - 3y = 6$$

$$l_2 : y = 7x + 4$$

$$l_3 : kx - 5y = 7$$

1. Determine el valor de las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3
2. ¿Son las rectas l_1 y l_2 paralelas?
3. Determine el valor de k para el cual las rectas l_1 y l_3 son paralelas.
4. Verifique utilizando Geogebra que las rectas l_1 y l_3 son paralelas (utilizando el valor de k adecuado).

Guía de Solución

1.

$$\begin{aligned} l_1: \quad 5x - 3y &= 6 \\ -3y &= 6 - 5x \\ y &= \frac{6-5x}{-3} \\ y &= \frac{5x-6}{3} \\ y &= \frac{5x}{3} - 2 \end{aligned}$$

Tenemos para $l_1 : m_1 = \frac{5}{3}$

$l_2 : y = 7x + 4$ tiene pendiente $m_2 = 7$

$$
\begin{array}{rrcl}
l_3 & kx-5y & = & 7 \\
 & -5y & = & 7-kx \\
 & y & = & \frac{7-kx}{-5} \\
 & y & = & \frac{kx-7}{5} \\
 & y & = & \frac{kx}{5}-\frac{7}{5}
\end{array}
\qquad \text{Tenemos para } l_3 : m_3 = \tfrac{k}{5}
$$

2. Las rectas l_1 y l_2 no son paralelas porque sus pendientes m_1 y m_2 son diferentes.

3. Para que l_1 y l_3 sean paralelas se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_3 \\
\frac{5}{3} &= \frac{k}{5} \\
\frac{5}{3}\cdot 5 &= k \\
\frac{25}{3} &= k
\end{aligned}
$$

Entonces si $k = \dfrac{25}{3}$ las rectas l_1 y l_3 son paralelas.

4.

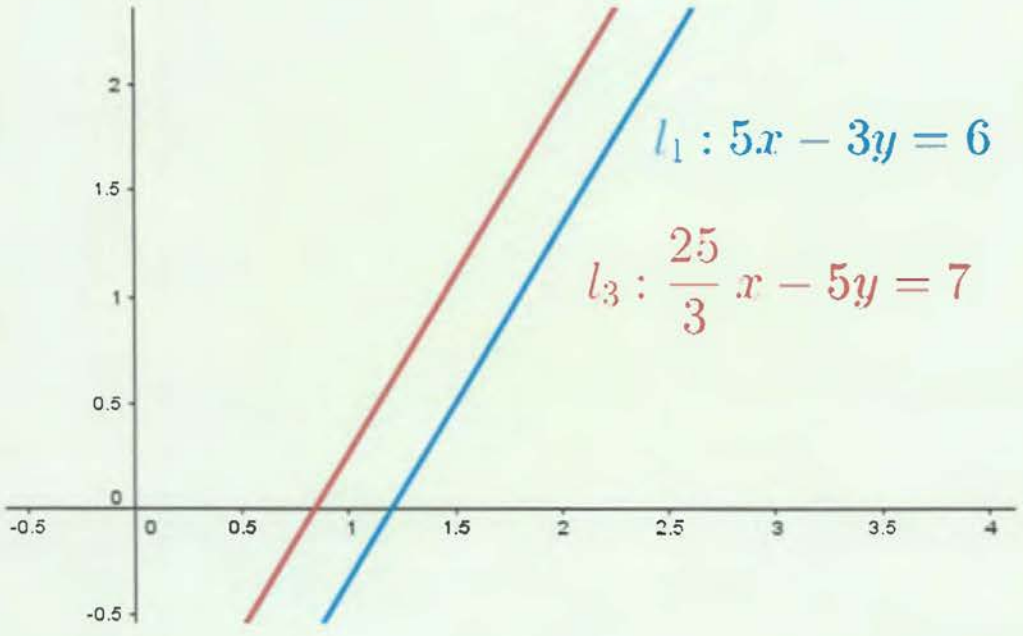


Figura 2.36:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Sea l_1 la recta con ecuación $3y - 5x = 2$, determine dos rectas l_2 y l_3 que pasen por los puntos $(1,2), (-1,-2)$ respectivamente y que sean paralelas a l_1.

Guía de Solución

Las pendientes de las rectas l_2 y l_3 deben ser iguales a la pendiente de l_1, pues se quiere que las rectas sean paralelas.
Se debe determinar la pendiente m_1 de l_1:

$$\begin{aligned} 3y - 5x &= 2 \\ 3y &= 2 + 5x \\ y &= \frac{2+5x}{3} \\ y &= \frac{2}{3} + \frac{5x}{3} \end{aligned}$$

Tenemos que $m_1 = \frac{5}{3}$.

Ahora se debe cumplir $m_2 = m_3 = \frac{5}{3}$ para que las tres rectas sean paralelas entre sí. Entonces:

Recta	Pasa por:	Pendiente	Valor b	Ecuación
l_2:	$(1,2)$	$m_1 = \frac{5}{3}$	$b = y - m \cdot x$ $= 2 - \frac{5}{3} \cdot 1$ $= \frac{1}{5}$	$y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{5}$
l_3:	$(-1,-2)$	$m_3 = \frac{5}{3}$	$b = y - m \cdot x$ $= -2 - \frac{5}{3} \cdot -1$ $= \frac{-1}{5}$	$y = \frac{5}{3}x + \frac{-1}{5}$

Ejemplo

Considere los puntos:

$$A = (-3,5),\ B = (-1,1),\ C = (3,2)$$

1. Utilice Geogebra para encontrar un punto D de tal forma que el cuadrilátero $\square ABCD$ sea un paralelogramo.
2. Pruebe que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Guía de Solución

1. Se construye el paralelogramo utilizando los comandos de recta paralela a otra que pasa por un punto dado.

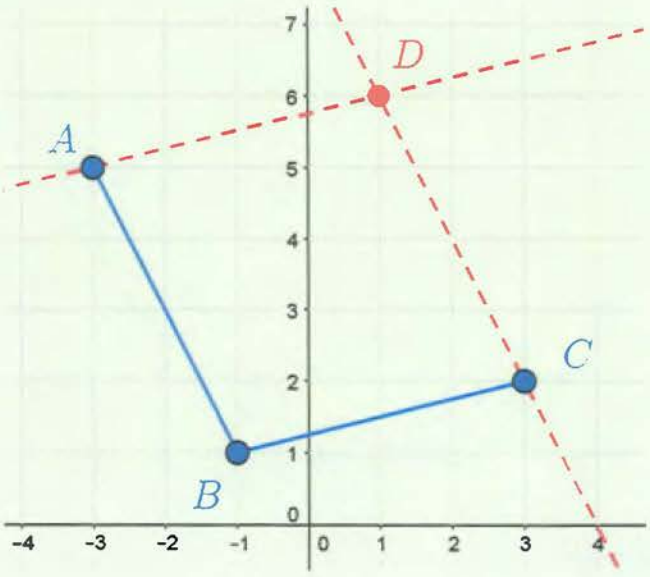


Figura 2.37:
Fuente: Elaboración propia

De la figura se puede determinar que $D(1,6)$

Para determinar si el cuadrilatero corresponde a un paralelogramo debemos demostrar que:

$$l_1 \parallel l_2 \text{ y } l_3 \parallel l_4$$

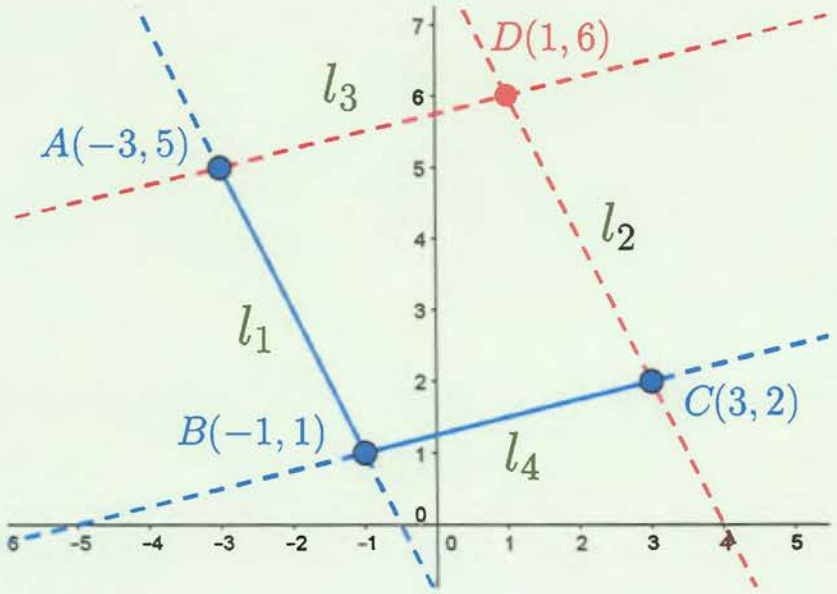


Figura 2.38:
Fuente: Elaboración propia

Primero debemos determinar las ecuaciones de l_1, l_2, l_3 y l_4
Recta l_1:

Pasa por los puntos	Pendiente	Valor de b	Ecuación
$(-1,1)$ y $(-3,5)$	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-1}{-3--1} = \frac{4}{-2} = -2$	$b = y - mx = 1 - -2 \cdot -1 = -1$	$l_1 : y = -2x - 1$

Recta l_2:

Pasa por los puntos	Pendiente	Valor de b	Ecuación
(3,2) y (1,6)	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-2}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2$	$b = y-mx = 2--2\cdot 3 = 8$	$l_1 : y=-2x+8$

Note que $l_1 \parallel l_2$ pues las rectas tienen pendientes iguales.

Recta l_3:

Pasa por los puntos	Pendiente	Valor de b	Ecuación
(−3,5) y (1,6)	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-5}{1--3} = \frac{1}{4}$	$b = y-mx = 5-\frac{1}{4}\cdot -3 = \frac{23}{4}$	$l_1 : y=\frac{1}{4}x+\frac{23}{4}$

Recta l_4 :

Pasa por los puntos	Pendiente	Valor de b	Ecuación
(−1,1) y (3,2)	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-1}{3--1} = \frac{1}{4}$	$b = y-mx = 1-\frac{1}{4}\cdot -1 = \frac{5}{4}$	$l_1 : y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

Note que $l_3 \parallel l_4$ pues las rectas tienen pendientes iguales.

Como los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos, se puede asegurar que es un paralelogramo.

Definición (Rectas perpendiculares)

Dos rectas se llaman perpendiculares si el ángulo de intersección entre ellas mide 90°

Observación

Si dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son perpendiculares,

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Se utiliza la simbología $l_1 \perp l_2$ para denotar que l_1 y l_2 son perpendiculares.

Ejemplo

Considere las rectas:

$$\begin{aligned} l_1 &: \quad 4y + 12 = -5x \\ l_2 &: \quad 5y + 25 = 4x \\ l_3 &: \quad 8y + 8 = x \\ l_4 &: \quad y = -8x + 20 \end{aligned}$$

1. Utilice GeoGebra para graficar dichas rectas.
2. Determine cuáles rectas son perpendiculares entre sí, analizando sus pendientes.
3. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden identificar en la figura?. Resaltelos con diferentes colores.

Guía de Solución

1. Al graficar las rectas en GeoGebra se obtiene:

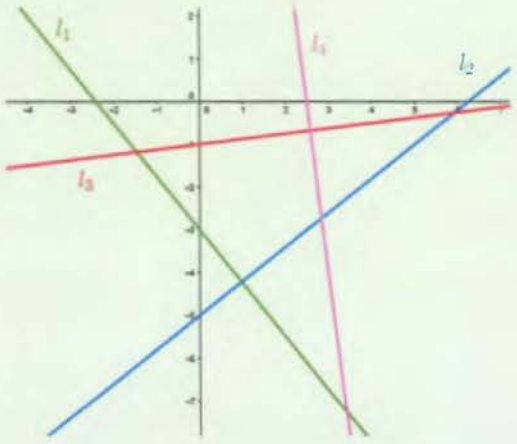


Figura 2.39:
Fuente: Elaboración propia

2. Si dos rectas son perpendiculares, el ángulo entre ellas mide 90° es decir es un ángulo recto. En la gráfica anterior los ángulos que parecen ser rectos son los formados por las rectas l_1 con l_2 y l_3 con l_4, debemos comprobarlo mediante sus pendientes:

l_1	l_2	l_3	l_4
$4y+12 = -5x$ $4y = -5x-12$ $y = \frac{-5x}{4}-3$ $m_1 = \frac{-5}{4}$	$5y+25 = 4x$ $5y = 4x-25$ $y = \frac{4x}{5}-5$ $m_2 = \frac{4}{5}$	$8y+8 = x$ $8y = x-8$ $y = \frac{x}{8}-1$ $m_3 = \frac{1}{8}$	$y = -8x+20$ $m_4 = -8$

Ahora

Producto de las Pendientes	Producto de las Pendientes
$m_1 \cdot m_2 = \frac{-5}{4} \cdot \frac{4}{5}$ $= -\frac{20}{20}$ $= -1$	$m_3 \cdot m_4 = \frac{1}{8} \cdot -8$ $= -\frac{8}{8}$ $= -1$

Entonces podemos concluir que

$$l_1 \perp l_2 \quad \text{y} \quad l_3 \perp l_4$$

3. Se pueden indentificar 4 triángulos rectángulos:

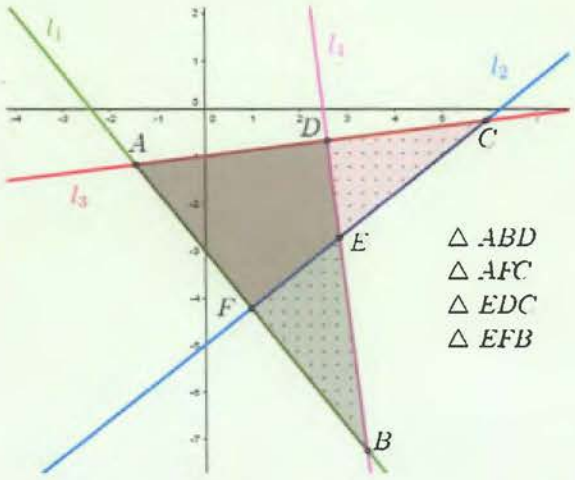


Figura 2.40:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Considere la recta

$$l: 7x-5y+2=0$$

1. Determine la recta l_1 que es perpendicular a l y que pasa por el punto $(-1,-5)$.
2. ¿Cuantas rectas perpenciculares a l existen?
3. Identifique las ecuaciones de tres rectas perpendiculares a l.

Guía de Solución

1. Debemos encontrar la pendiente de la recta l:

$$\begin{aligned} 7x-5y+2 &= 0 \\ 7x+2 &= 5y \\ \tfrac{7x+2}{5} &= y \end{aligned}$$

De aquí tenemos que la pendiente de l es $m=\frac{7}{5}$, buscamos m_1 tal que

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{5}\cdot m_1 &= -1 \\ m_1 &= \frac{-1}{\frac{7}{5}} \\ m_1 &= \frac{-5}{7} \end{aligned}$$

Ahora como l_1 pasa por $(-1,-5)$ y tiene pendiente $m_1=\dfrac{-5}{7}$ entonces:

$$\begin{aligned} b &= y-m\cdot x \\ &= -5-\frac{-5}{7}\cdot -1 \\ &= -5-\frac{5}{7} \\ &= \frac{-40}{7} \end{aligned}$$

Finalmente

$$l_1: y=\frac{-5}{7}x-\frac{40}{7}$$

2. Existen infinitas rectas perpendiculares a l, como se puede ver al mover el deslizador b:

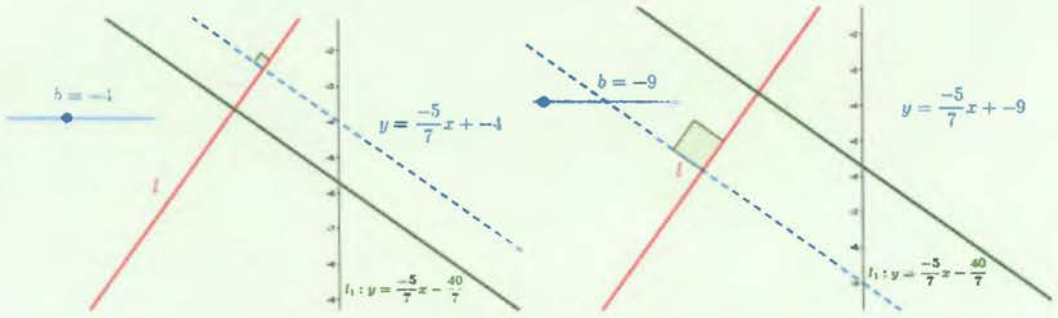


Figura 2.41:
Fuente: Elaboración propia

3. Las rectas:

$$l_2 : y = \frac{-5}{7}x + 2$$

$$l_3 : y = \frac{-5}{7}x + 3$$

$$l_4 : y = \frac{-5}{7}x + 4$$

Son todas perendiculares a l, pues solo depende del valor de m.

Actividad:
Considere la figura 2.42, correspondiente a un campo de fútbol

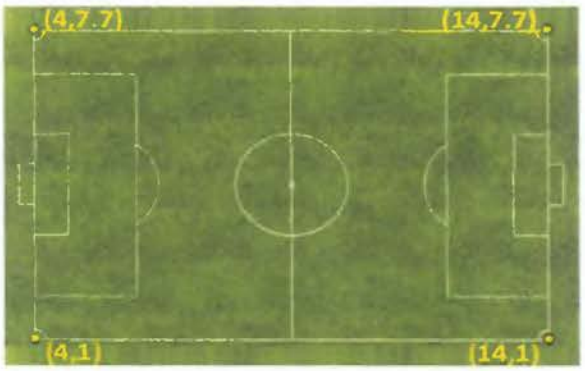


Figura 2.42:
Fuente: Elaboración propia

Si se sabe que los puntos de penal se encuentran a 3,7 unidades de la linea central, utilice GeoGebra para determinar las coordenadas de dichos puntos.

Guía de Solución

Se va a construir la solución siguiendo los siguientes pasos:

1. Debemos construir los segmentos que forman el largo de la cancha de fútbol.

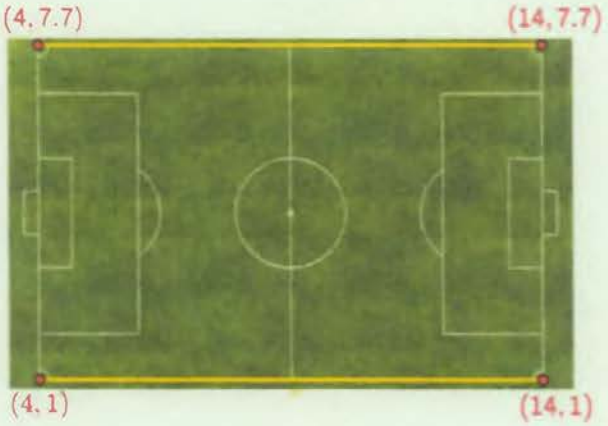


Figura 2.43:
Fuente: Elaboración propia

2. Utilizando la herramienta *Medio o Centro* encontrar el punto medio de cada uno de los segmentos encontrados.

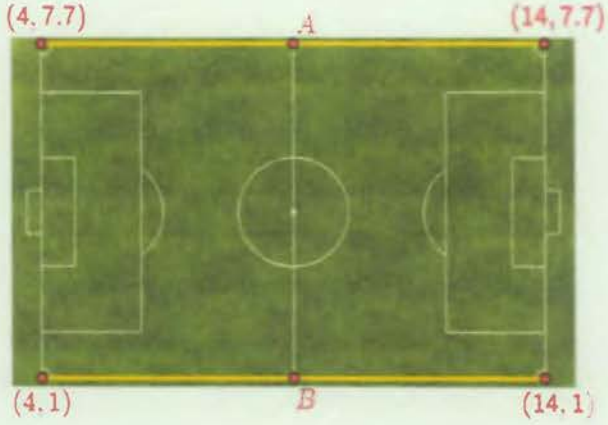


Figura 2.44:
Fuente: Elaboración propia

- De igual forma al aplicar la herramienta *Medio o Centro* a los puntos A y B se puede encontrar el punto O, que representa el punto del saque inicial.

Figura 2.45:
Fuente: Elaboración propia

- Con la herramienta *Segmento de longitud dada*, se construye el segmento con inicio en O y longitud 3,7

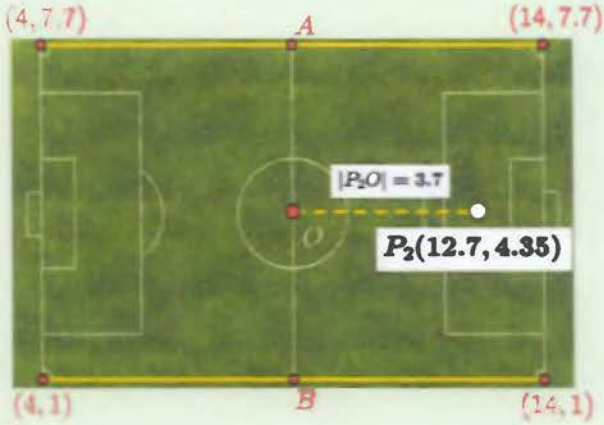


Figura 2.46:
Fuente: Elaboración propia

El extremo de este segmento será el primer punto de penal buscado.

5. Para encontrar el otro punto de penal, construya la recta que pasa por O y por los puntos A y B, está es la línea central del campo de juego.

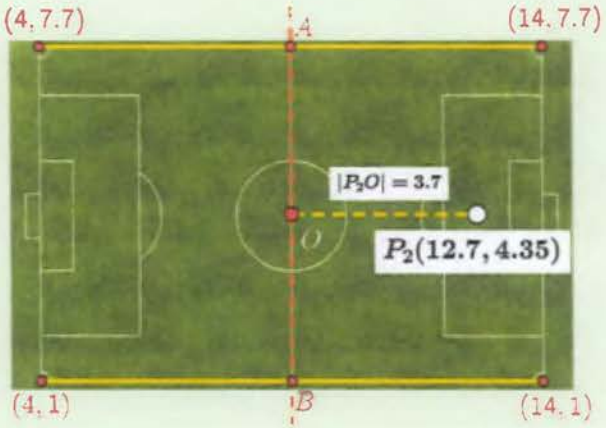


Figura 2.47:
Fuente: Elaboración propia

6. Por último con la herramienta *Simetría Axial*, aplicada al punto P_2 y a la línea central del campo se obtiene el punto penal P_1.

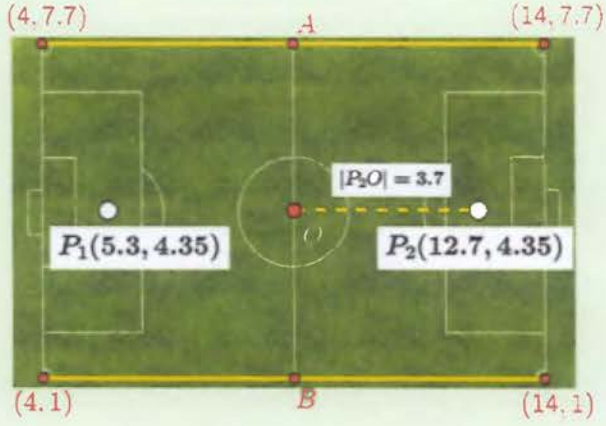


Figura 2.48:
Fuente: Elaboración propia

IMPORTANTE

La distancia entre un punto A y una recta l corresponde a la longitud del segmento perpendicular a l y que contiene a A.

Figura 2.49:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Considere la recta

$$l_1 : 4x - 3y = 7$$

- Determine utilizando Geogebra un punto P que se encuentre a 5 unidades de distancia de l_1
- Determine la ecuación de la recta l_2 paralela a l_1 que contiene el punto P y utilice la aplicación para graficarla.
- Si se toma un punto en la recta l_2 ¿cuál es su distancia con respecto a la recta l_1?

Guía de Solución

1. Para determinar el punto P, se debe graficar la recta l_1 en el prograograma:

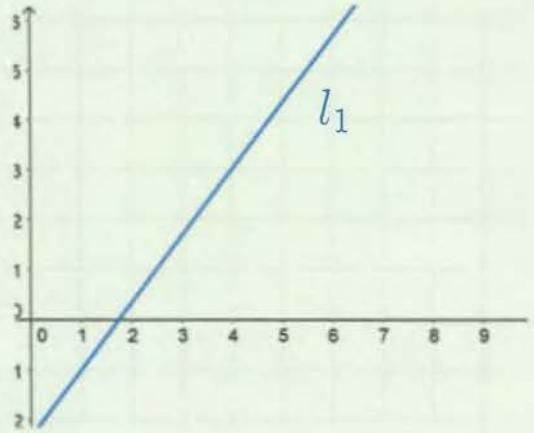


Figura 2.50:
Fuente: Elaboración propia

Utilizando la herramienta *Perpendicular*, se construye una recta perpendicular a l_1 en el punto A.

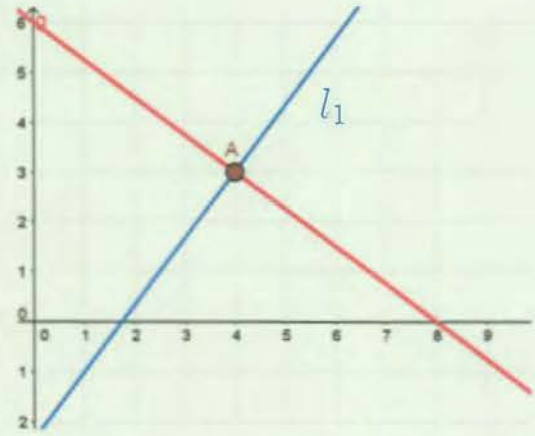


Figura 2.51:
Fuente: Elaboración propia

Como se quiere encontrar un punto P que esté a 5 unidades de l_1, construya el segmento que inicia en A y de longitud 5, con la herramienta *Segmento de longitud dada.*

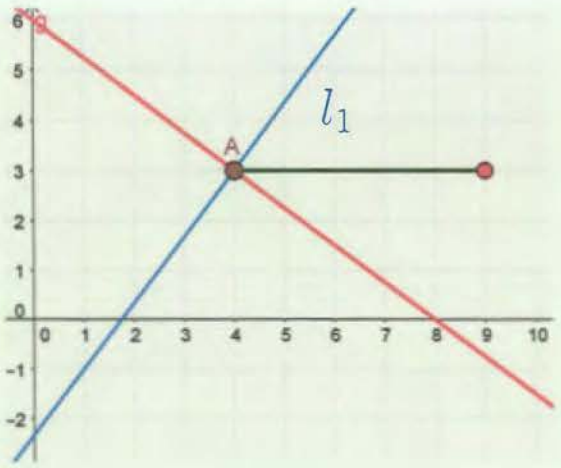


Figura 2.52:
Fuente: Elaboración propia

Y por último rote el segmento creado hasta posicionarlo sobre la recta perpendicular a l_1.

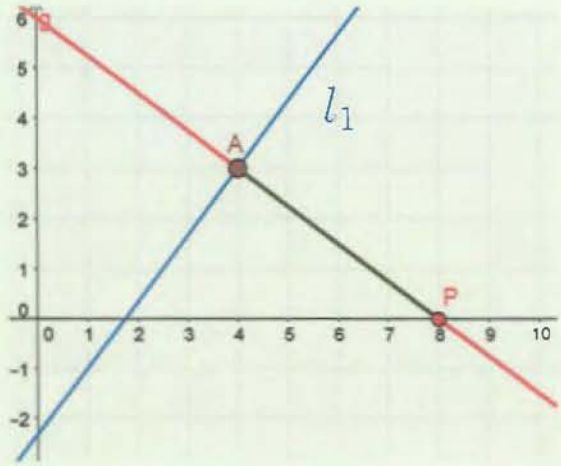


Figura 2.53:
Fuente: Elaboración propia

Así un punto que se encuentra a 5 unidades de la recta l_1 es el punto $P(8,0)$.

2. Como se busca una recta l_2 paralela a l_1, se debe determinar la pendiente m_1 de l_1:

$$\begin{aligned} 4x-3y &= 7 \\ 4x-7 &= 3y \\ \frac{4x-7}{3} &= y \\ \frac{4x}{3}-\frac{7}{3} &= y \end{aligned}$$

De aquí la pendiente de l_1 es $m_1 = \frac{4}{3}$ y como l_2 debe ser paralela a l_1 entonces

$$m_2 = \frac{4}{3}$$

Ahora se busca que l_2 contenga el punto $P(8,0)$, entonces:

$$\begin{aligned} b &= y - m \cdot x \\ &= 0 - \frac{4}{3} \cdot 8 \\ &= -\frac{32}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $l_2 : y = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3}$.

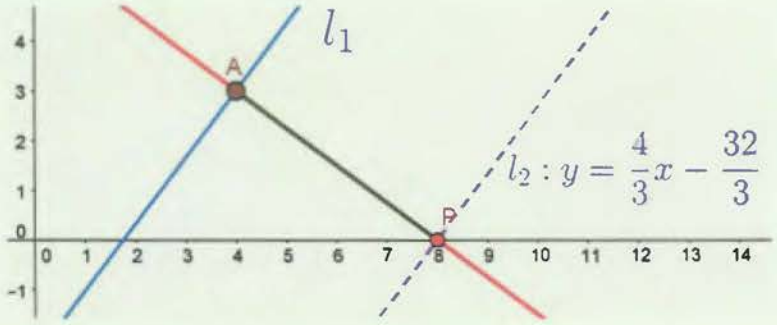


Figura 2.54:
Fuente: Elaboración propia

3. Como las rectas l_1 y l_2 son paralelas, la distancia de cualquier punto de l_2 a l_1 siempre va a ser igual, en este caso esa distancia es 5.

Ejemplo

Considere la recta $l : -x + 2y = 3$ y el punto $A(9,1)$.

1. Con la ayuda de GeoGebra determine el punto de intersección entre la recta l y la recta perpendicular a l que contiene a A.
2. Determine la distancia entre el punto A y la recta l, luego utilice la construcción que realizó en el punto anterior para comprobar su respuesta.

Guía de Solución

1. El punto buscado es $B(7,5)$

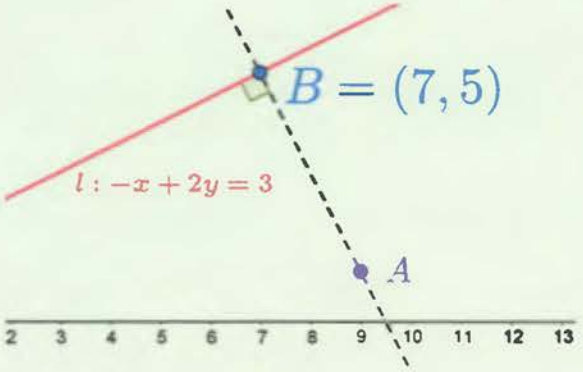


Figura 2.55:
Fuente: Elaboración propia

2. Determinar la distancia entre A y l es equivalente a determinar la distancia entre A y B, pues B es el punto de intersección entre la recta l y la recta perpendicular a l que contiene a A, Tenemos:

$$A(9,1) \text{ y } B(7,5)$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(9-7)^2+(1-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Entonces la distancia entre el punto A y la recta l es $\sqrt{20} \approx 4{,}47$.

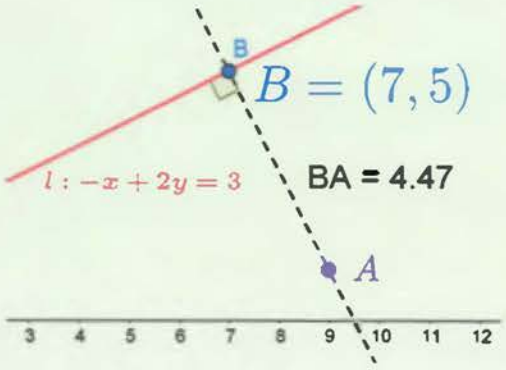


Figura 2.56:
Fuente: Elaboración propia

Lista de Ejercicios

1. Considere la recta

$$l_1 : 12x - 9y = 3$$

   a) Pruebe que el punto $A(-2,-3)$ pertenece a l_1.

   b) Determine la ecuación de la recta l_2 perpendicular a l_1 y que pasa por el punto A.

   c) Utilice GeoGebra para modelar la situación de los incisos anteriores, y determine las ecuaciones de las rectas l_3 y l_4 con las que se forma un cuadrado de lado 4.

2. Pruebe que las rectas:

$$l_1 : 15x - 65y = -80$$

$$l_2 : 3x - 13y = 52$$

   Son paralelas. Determine la recta l_3 que pasa por $P(1,4)$ y que es perpendicular a l_1.

3. Pruebe que la figura formada por los puntos

$$A(3,2), B(5,1), C(6,4), D(8,3)$$

   es un paralelogramo.

4. La siguiente imagen representa el Logo de la Federación Alemana de Futbol

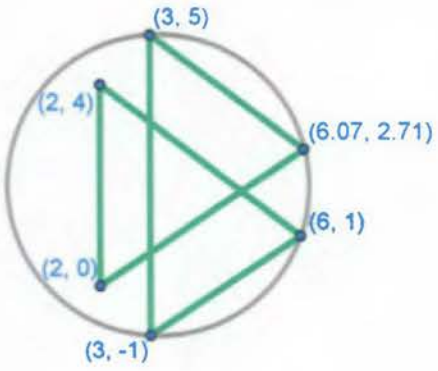


Figura 2.57:
Fuente: Elaboración propia

   Demuestre que el logo esta conformado por tres pares de rectas paralelas, luego grafique el logo en GeoGebra y compárelo con el Logo Oficial.

2.6 Relación entre radio y recta tangente a una circunferencia

Actividad: Analice la animación:

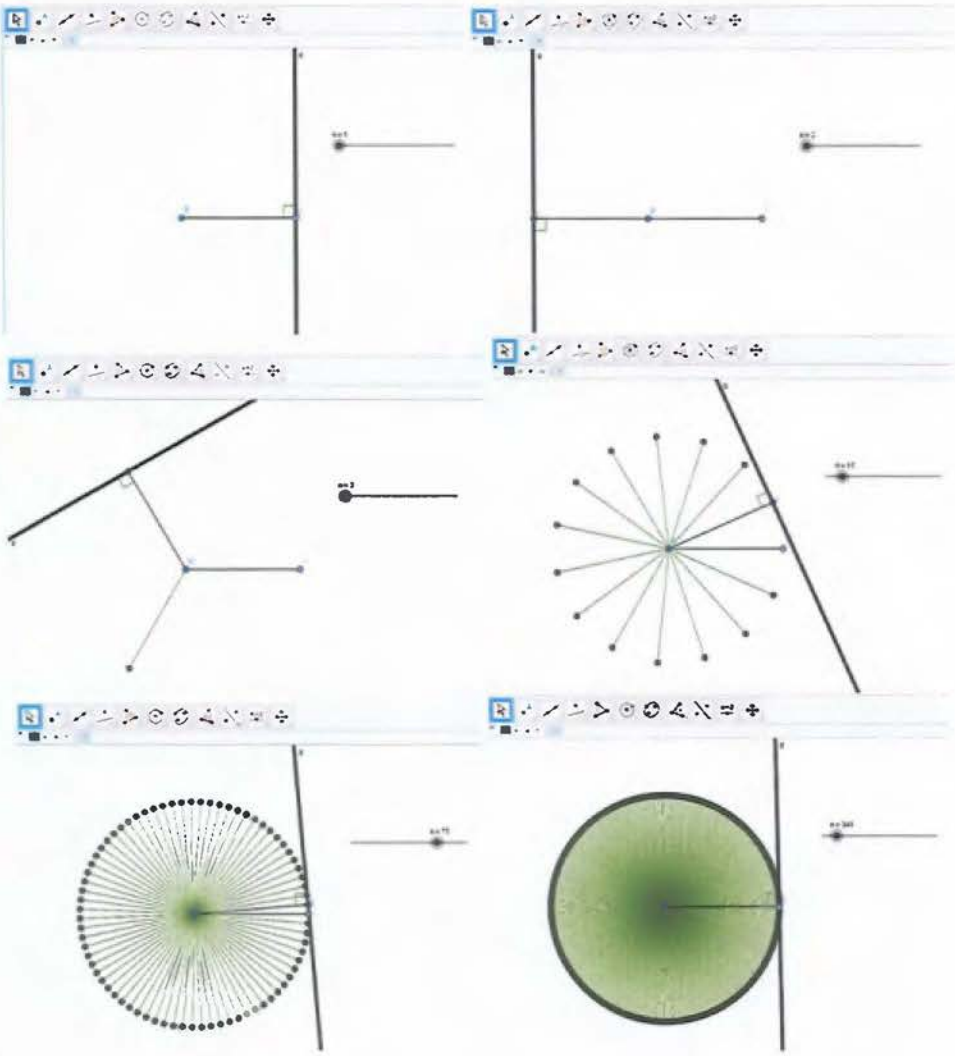


Figura 2.58:
Fuente: Elaboración Propia

¿Qué se puede concluir?

Respuesta esperada: La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la misma.

Ejemplo

Con base a la siguiente imagen, determine:

1. La ecuación de la recta que contiene al centro de la circunferencia O y al punto P.
2. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.
3. La medida del radio de la circunferencia.

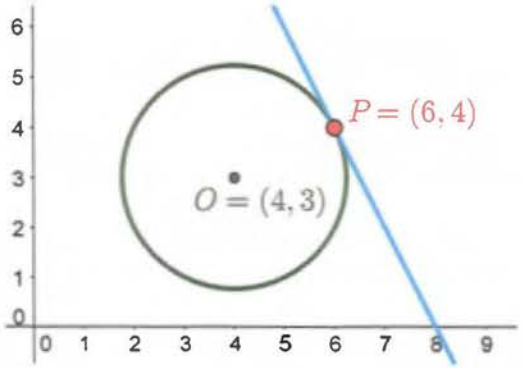


Figura 2.59:
Fuente: Elaboración propia

Guía de Solución

Anteriormente se mostró que toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio de la misma, gráficamente se tiene que

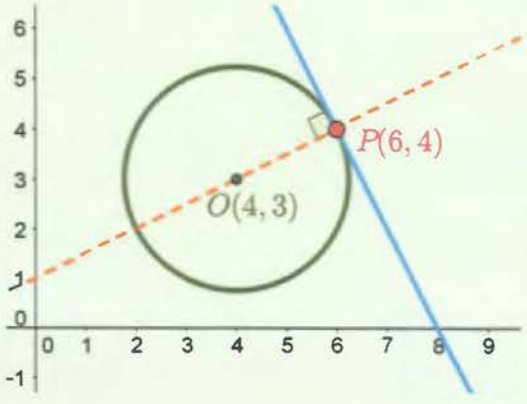


Figura 2.60:
Fuente: Elaboración propia

1. Necesitamos determinar la pendiente de la recta que contiene los puntos O y P

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{4-3}{6-4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta que contiene los puntos O y P es $\frac{1}{2}$.

Para determinar la ecuación, utilizamos cualquier punto, ya sea O o P.

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ 3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 4+b \\ 3-2 &= b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es $y=\frac{1}{2}x+1$

2. Para la recta tangente la pendiente sería -2 y como dicha recta contiene al punto P, es este par ordenado el que utilizamos para determinar la ecuación de la recta tangente,

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ 4 &= -2\cdot 6+b \\ 4+12 &= b \\ 16 &= b \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia es $y=-2x+16$

3. Para determinar la distancia entre los puntos O y P, utilizamos la fórmula para distancia entre puntos

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-4)^2+(4-3)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2+(1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Ejemplo

Con base a la siguiente imagen, determine:

1. Las ecuaciones de las rectas:
   l_1: que contiene a O y P
   l_2: que contiene a O y Q
2. Las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos P y Q.
3. Las coordenadas del punto D.
4. La medida del radio de la circunferencia.

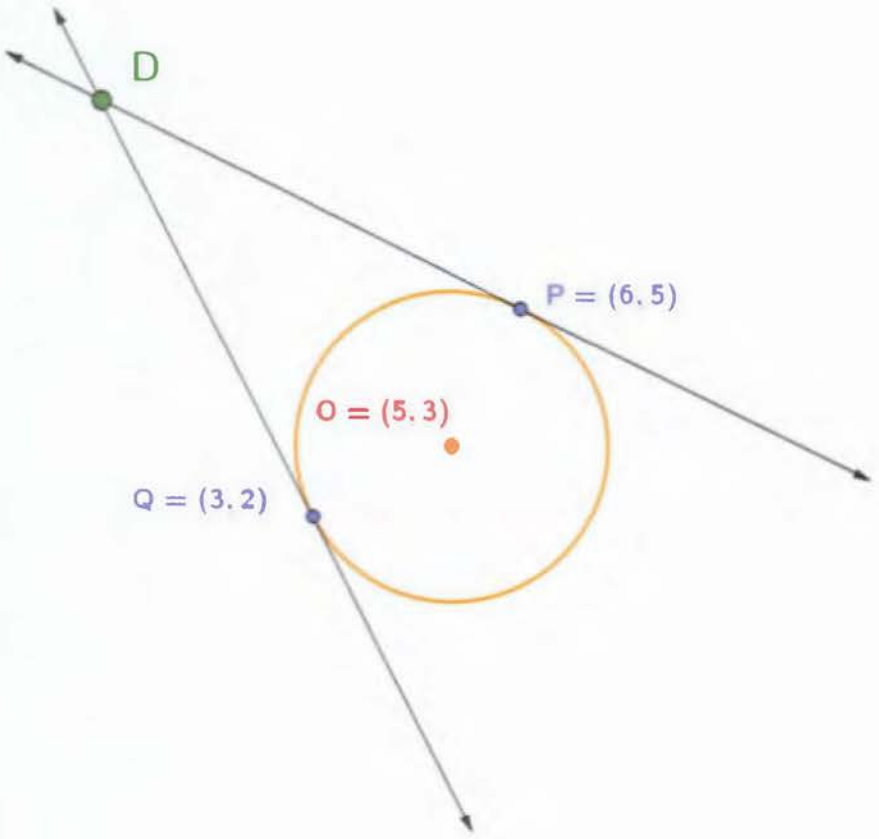


Figura 2.61:
Fuente: Elaboración propia

Guía de Solución

1. Las ecuaciones de las rectas:
   l_1: que contiene a O y P
   l_2: que contiene a O y Q

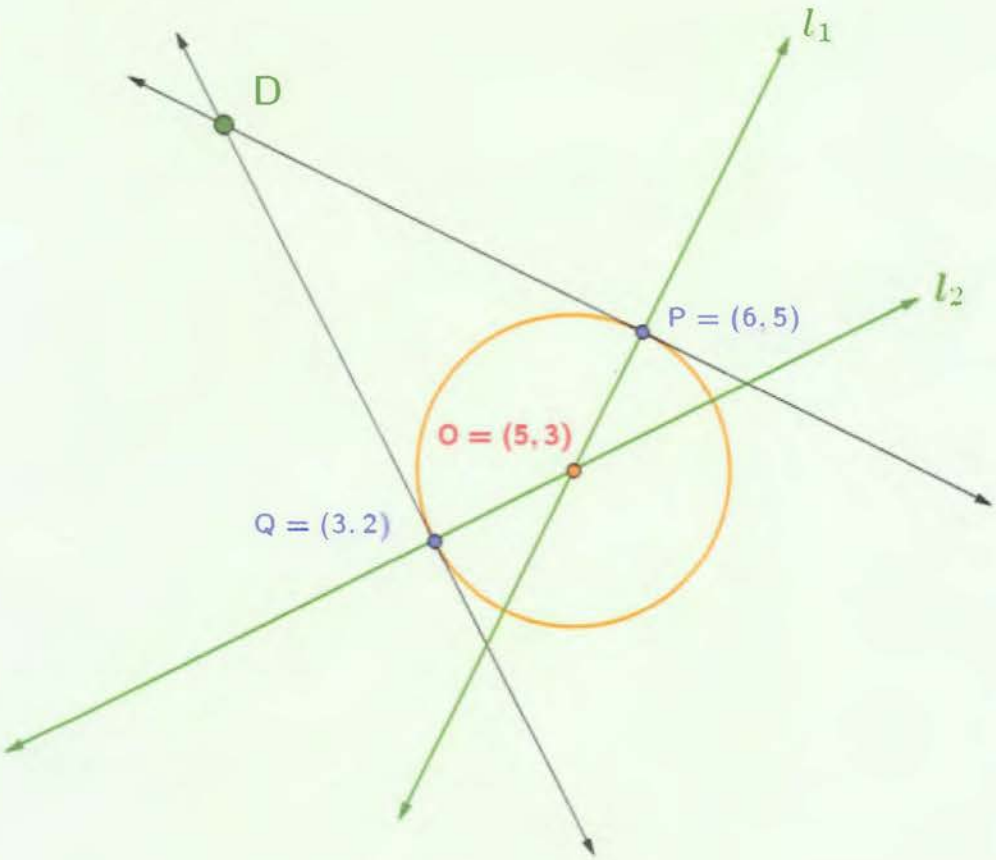


Figura 2.62:
Fuente: Elaboración propia

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{5-3}{6-5}$	$b = 3 - (5 \cdot 2)$	$y = 2x - 7$
$m = \frac{2}{1}$	$b = 3 - 10$	
$m = 2$	$b = -7$	

Por lo tanto la ecuación de la recta l_1 es $y = 2x - 7$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{3-2}{5-3}$	$b = 3 - (5 \cdot \frac{1}{2})$	$y = \frac{x+1}{2}$
$m = \frac{1}{2}$	$b = 3 - \frac{5}{2}$	
	$b = \frac{1}{2}$	

Por lo tanto la ecuación de la recta l_2 es $y = \frac{x+1}{2}$.

- Las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos P y Q.

Como las rectas que son tangentes a la circunferencia en los puntos P y Q, son perpendiculares al radio en esos mismos puntos, utilizamos la propiedad de la pendiente para rectas perpendiculares

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

En el punto P:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = \frac{-1}{2}$	$b = 5 - (\frac{-1}{2} \cdot 6)$	$y = \frac{-x}{2} + 8$
	$b = 5 - \frac{-6}{2}$	
	$b = 8$	

En el punto Q:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$b = y - mx$	$y = mx + b$
$m = -2$	$b = 2 - (-2 \cdot 3)$	$y = -2x + 8$
	$b = 2 - -6$	
	$b = 8$	

3. Las coordenadas del punto D.

Ocurre en la intersección de la recta tangente que contiene a P con la recta tangente que contiene a Q, es decir, donde ambas rectas son iguales

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2}+8 &= -2x+8 \\ \frac{-x}{2}+2x &= 8-8 \\ \frac{-x+4x}{2} &= 0 \\ 3x &= 0\cdot 2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ahora como la ecuación de la recta está dada por

$$y = mx+b$$

hacemos uso de cualquiera de las dos ecuaciones para determinar el valor de y.

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ y &= -2\cdot 0+8 \\ y &= 0+8 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto D son $(0, 8)$.

4. Con la fórmula de distancia entre puntos se puede determinar la medida del radio de la circunferencia.

$$\begin{aligned} \sqrt{(6-5)^2+(5-3)^2} &= r \\ \sqrt{(1)^2+(2)^2} &= r \\ \sqrt{1+4} &= r \\ \sqrt{5} &= r \end{aligned}$$

La medida del radio es $\sqrt{5}$.

Problema

La distancia entre la Tierra y la luna varía mientras ésta gira alrededor de nuestro planeta. En determinado momento la distancia entre el centro de la tierra y el centro de la luna es 227 075 millas, tal y como se muestra en la figura. Asuma que el radio de la tierra es 3 963 millas, para resolver los siguientes problemas:

- La distancia entre el centro de la luna y el punto de tangencia P de la tierra en ese instante.
- El valor de x para la coordenada $(x, -1)$ que ubica al centro de la luna.

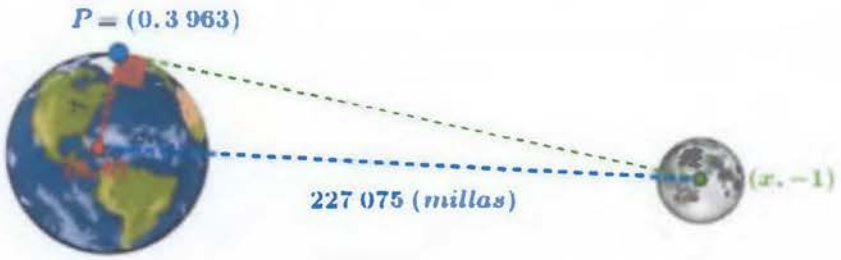


Figura 2.63:
Fuente: Elaboración propia

Guía de Solución

- Con ayuda del Teorema de Pitágoras, podemos determinar la distancia entre el punto P tangente a la circunferencia y el centro de la luna:

$$\begin{aligned} (3\,963)^2 + d^2 &= (227\,075)^2 \\ d^2 &= (227\,075)^2 - (3\,963)^2 \\ d &= \sqrt{(227\,075)^2 - (3\,963)^2} \\ d &= 227\,040,4155 \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia entre el centro de la luna y el punto P de tangencia de la tierra en ese instante es 227 040, 4155 millas.

2. Con ayuda de la fórmula de distancia entre puntos, encontramos el valor de x en la coordenada $(x, -1)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2+(-1-3\,963)^2} &= 227\,040,4155 \\
\sqrt{x^2+(-3\,964)^2} &= 227\,040,4155 \\
x^2 &= (227\,040,4155)^2-(-3\,964)^2 \\
x &= \sqrt{(227\,040,4155)^2-(-3\,964)^2} \\
x &= 227\,005,8082
\end{aligned}$$

El valor de x es 227 005, 8082.

Lista de Ejercicios

1. Un avión se encuentra a una distancia de 5 km del aeropuerto, si se considera el aeropuerto como el centro de una circunferencia.

   a) ¿Cuál es la ecuación que describe la trayectoria?

   b) Si el avión se encuentra a una altura de 3 Km, respecto al aeropuerto, determine el valor de x para la coordenada $P\,(x, 3)$.

   c) Determine la ecuación de la recta que contiene al punto P y es perpendicular al radio.

2. Con base a la siguiente imagen, determine:

   a) La ecuación de la recta que contiene al centro de la circunferencia O y al punto P.

   b) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

   c) La medida del radio de la circunferencia.

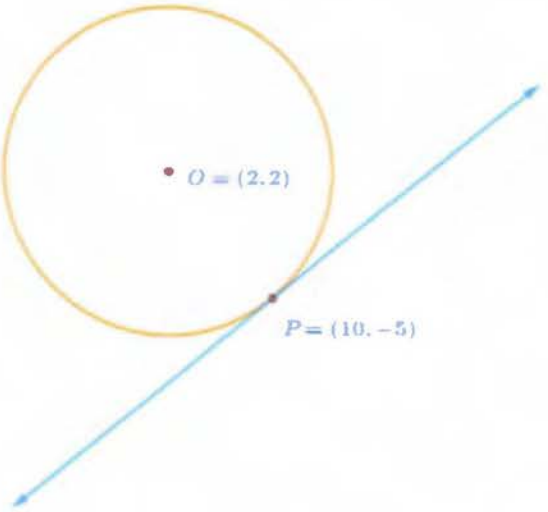


Figura 2.64:
Fuente: Elaboración propia

3. Con base a la siguiente imagen, determine:

   a) La ecuación de la recta que contiene al centro de la circunferencia O y al punto P.

   b) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

   c) La medida del radio de la circunferencia.

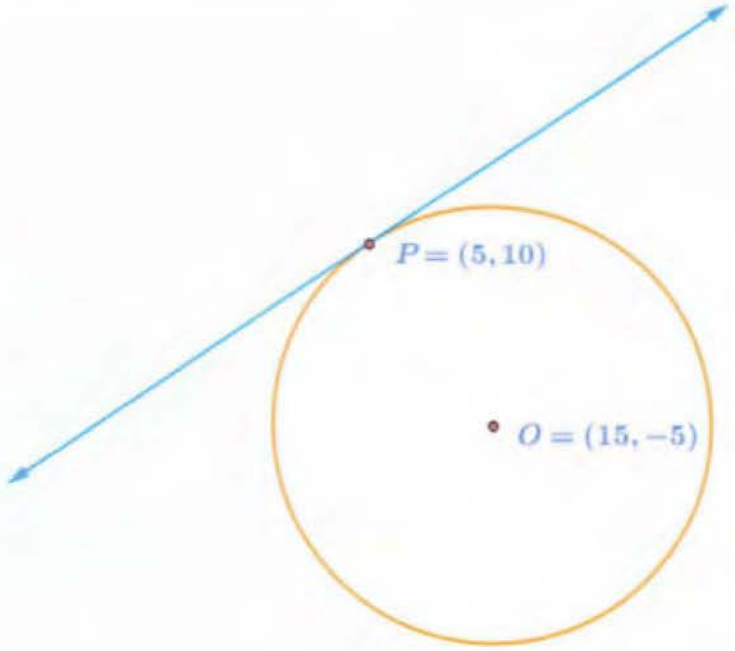


Figura 2.65:
Fuente: Elaboración propia

4. Calcule la ecuación de la circunferencia, cuyo radio es 5 y su centro se ubica en la intersección de las rectas $l_1: x+y+1=0$ y $l_2: x+3y+3=0$.

2.7 Elipse

Carlos sabe que si proyecta en el piso una bola, la figura que se muestra es un círculo, si desea trabajar la ecuación de la circunferencia correspondiente a ésta proyección, la ecuación resultante es de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, sin embargo,

1. Si toma su balón de fútbol americano, ¿qué figura se proyecta en el piso?
2. ¿Puede establecer una ecuación que represente la frontera de su sombra como sucede con el círculo?

Figura 2.66:
Fuente: Elaboración propia

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\ \frac{(x-h)^2}{r^2}+\frac{(y-k)^2}{r^2} &= 1\end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede representar

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (*)$$

Si se trabaja la ecuación $(*)$ centrada en el origen se tiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (**)$$

Si $a=b$ corresponde a una circunferencia, pues es el caso anterior.

Si $a\neq b$ entonces $\begin{cases} a>b \\ a<b \end{cases}$

Vamos a utilizar la construcción en GeoGebra la cual permite observar que sucede con la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y su figura correspondiente.

- Dejando b fijo y manipulando a se tiene el siguiente comportamiento. (Ver figura 2.67)

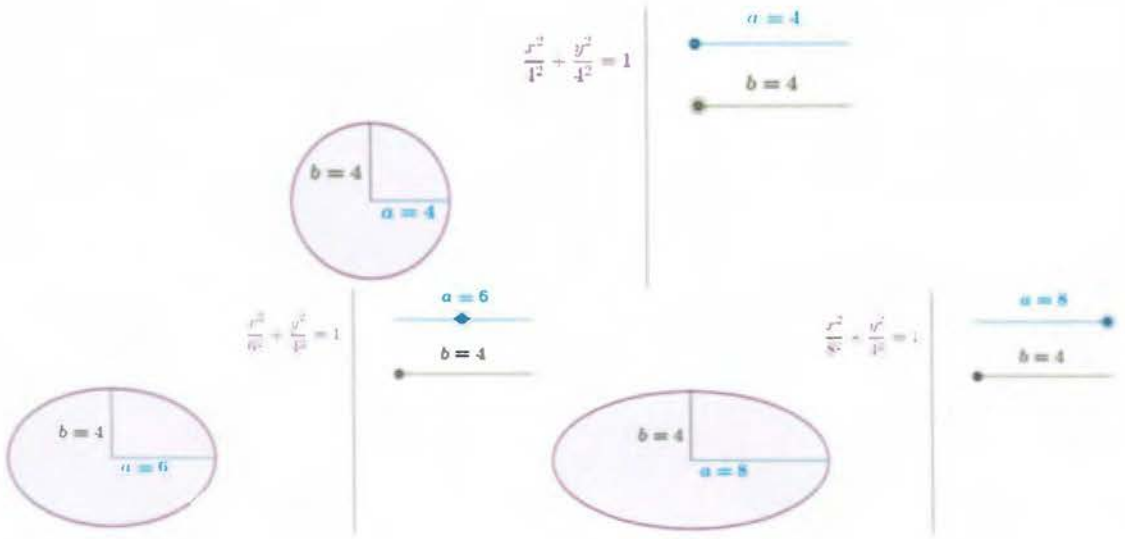


Figura 2.67:
Fuente: Elaboración Propia

Observe que con forme aumenta el valor de a la circunferencia se comprime verticalmente.

- Dejando a fijo y manipulando b se tiene el siguiente comportamiento. (Ver figura 2.68)

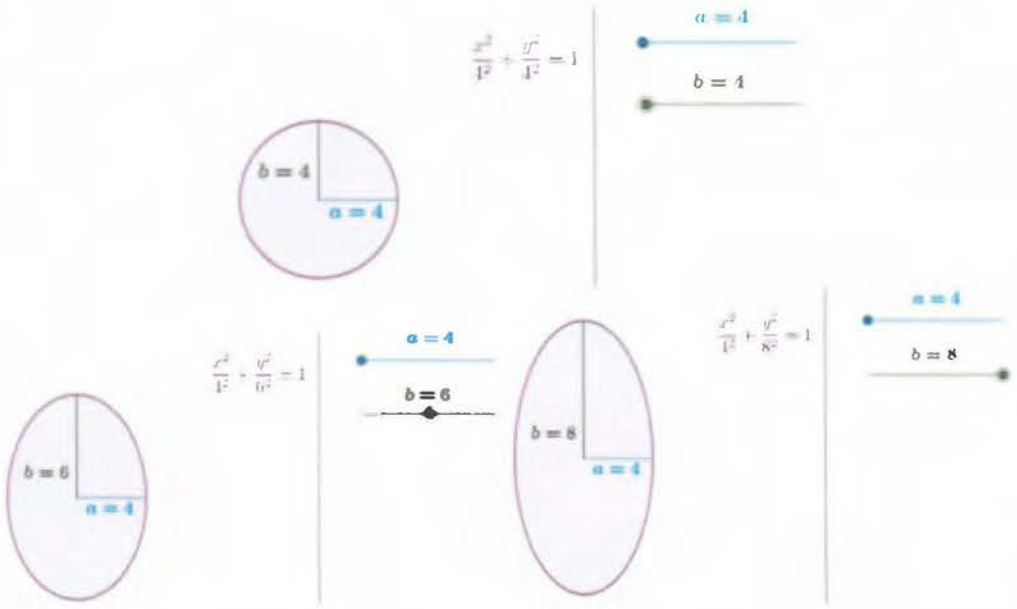


Figura 2.68:
Fuente: Elaboración Propia

Observe que con forme aumenta el valor de b la circunferencia se comprime horizontal-

mente.

En resumen si $a \neq b$ se tiene $\begin{cases} a > b & \text{Elipse Horizontal} \\ a < b & \text{Elipse Vertical} \end{cases}$

Definición (Elipse)

Una Elipse $\mathscr{E}$ corresponde a un conjunto de puntos $P(x, y)$ cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados **Focos** es constante.

Si $P \in \mathscr{E}$ y si los focos son F_1 y F_2, entonces existe una constante $d \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = d$$

En la figura adjunta se puede observar

$$d_1 + d_2 = d$$

donde corresponde a la distancia de los vértices.

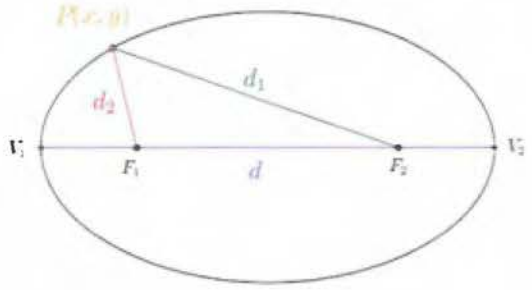
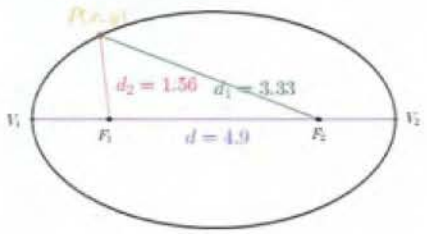
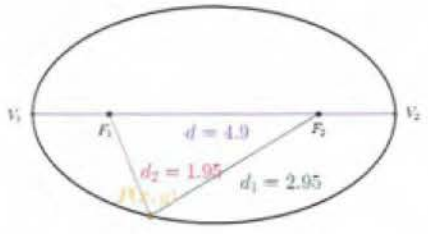


Figura 2.69:
Fuente: Elaboración propia

Además, con la construcción realizada en GeoGebra se puede manipular el punto $P(x, y)$ y verificar que se cumple que $d_1 + d_2 = d$.



$d_1 + d_2 = 3.33 + 1.56 = 4.9$



$d_1 + d_2 = 2.95 + 1.95 = 4.9$

Construcción 5:

Definición (Excentricidad)

La excentricidad e es un escalar que mide "cuanto dista "una elipse $\mathscr{C}$ de "ser una circunferencia"y está dada por

$$\text{Elipse Horizontal} \quad e = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Elipse Vertical} \quad e = \frac{c}{b}.$$

Definición (Elipse Horizontal)

Una elipse $\mathscr{C}$ es llamada elipse horizontal si y solo si los focos, el centro y los vértices están contenidos en una línea horizontal, es decir, si la suma de las distancias de $P(x,y)$ a los focos es $2a$.

Centro $(0,0)$
Semieje mayor a
Semieje menor b
Focos $F_1 = (c,0)$ y $F_2 = (-c,0)$
Vértices $(-a,0)$ y $(a,0)$
Distancia focal $c^2 = |a^2 - b^2|$

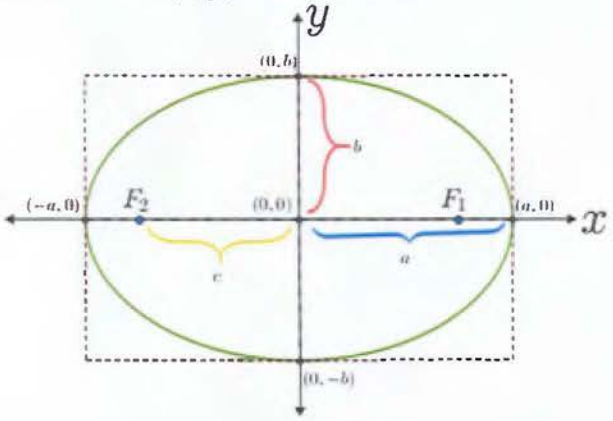


Figura 2.70:
Fuente: Elaboración propia

Definición (Elipse Vertical)

Una elipse $\mathscr{E}$ es llamada elipse vertical si y solo si los focos, el centro y los vértices están contenidos en una línea vertical, es decir, si la suma de las distancias de $P(x, y)$ a los focos es $2b$.

Centro $(0, 0)$
Semieje mayor b
Semieje menor a
Focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$
Vértices $(0, -b)$ y $(0, b)$
Distancia focal $c^2 = |a^2 - b^2|$

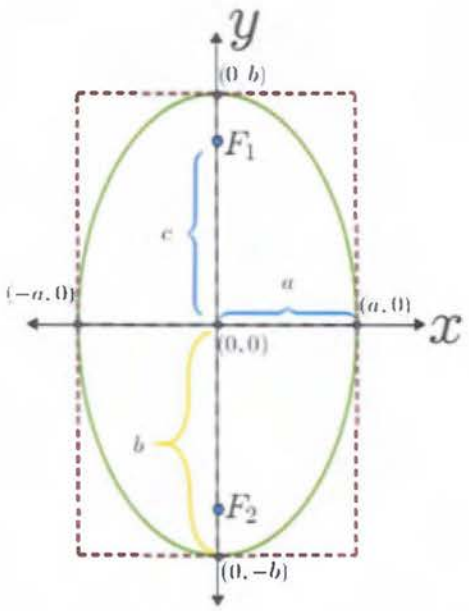


Figura 2.71:
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo

Identifique la elipse que corresponde a la ecuación $2x^2+3(x+y)(x-y)-1=-\frac{28}{9}y^2+\frac{19}{4}x^2$. Diga si es horizontal o vertical y justifique su respuesta.

Guía de Solución

$$\begin{aligned}
2x^2+3(x+y)(x-y)-1 &= -\frac{28}{9}y^2+\frac{19}{4}x^2\\
2x^2+3(x^2-y^2)-1 &= -\frac{28}{9}y^2+\frac{19}{4}x^2\\
2x^2+3x^2-3y^2-1 &= -\frac{28}{9}y^2+\frac{19}{4}x^2\\
5x^2-3y^2+\frac{28}{9}y^2-\frac{19}{4}x^2-1 &= 0\\
5x^2-\frac{19}{4}x^2-3y^2+\frac{28}{9}y^2 &= 1\\
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

La ecuación corresponde a una elipse vertical, pues $a = 2$ y $b = 3$ de donde se tiene que $a < b$.

Ejemplo

Para $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ calcule:

- Las coordenadas de los vértices.
- Las coordenadas de los focos.
- La distancia entre el centro y cualquiera de los vértices.
- La distancia entre el centro y cualquiera de los focos.
- La distancia entre un foco y su vértice.

Guía de Solución

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=\sqrt{6} \text{ y } b=2$$

Como $c=|a^2-b^2|$ se tiene $c^2=|6-4| \Longrightarrow c=\sqrt{2}$.

1. Las coordenadas de los vértices son: $V_1=(-\sqrt{6},0)$ y $V_2=(\sqrt{6},0)$.
2. Las coordenadas de los focos son: $F_1=(-\sqrt{2},0)$ y $F_2=(\sqrt{2},0)$.
3. La distancia entre el centro y cualquiera de los vértices es: $\sqrt{6}$.
4. La distancia entre el centro y cualquiera de los focos es: $\sqrt{2}$.
5. La distancia entre un foco y su vértice es: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Ejemplo

Determine la ecuación de la elipse con focos $(0,-5)$ y $(0,5)$ con un vértice en $(0,-9)$.

Guía de Solución

Observe que los focos corresponde a $(0,-5)$ y $(0,5)$ esto indica que la elipse es vertical y que el valor de $c=5$ como el vértice esta dado por $(0,-9)$ y la elipse es vertical el valor de $b=9$.

Recuerde que $c^2=|a^2-b^2|$

$$\begin{aligned} c^2 &= |a^2-b^2| \quad a<b \\ c^2 &= b^2-a^2 \\ 5^2 &= 9^2-a^2 \\ a^2 &= 9^2-5^2 \\ a^2 &= 81-25 \\ a^2 &= 56 \end{aligned}$$

La ecuación de la elipse cooresponde a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{56}+\frac{y^2}{81}=1$$

Problema

A principios del siglo XVII Johannes Kepler basado en los datos y las observaciones de Tycho Brahe estableció un nuevo modelo en el cual se establece que los planetas tienen orbitas elípticas con el Sol en uno de los focos, sabiendo que el semieje mayor de la elipse mide $1,485 \times 10^8 km$ y que la excentricidad es aproximadamente $\frac{1}{62}$. Hallar las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

Guía de Solución

Figura 2.72:
Fuente: Elaboración propia

El semieje mayor mide $1,485 \times 10^8 km$ y la excentricidad mide

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{62} \Rightarrow c = \frac{1,485 \times 10^8 km}{62} = 2,3952 \times 10^6 \ km$$

De esta forma la distancia máxima de la Tierra al Sol es $a + c = 1,485 \times 10^8 + 2,3952 \times 10^6 = 1,5090 \times 10^8 km$ y la distancia mínima de la Tierra al Sol es $a - c = 1,485 \times 10^8 - 2,3952 \times 10^6 = 1,461 \times 10^8 km$.

3 Anexos

3.1 Construcciones en GeoGebra

3.1.1 Construcción 1

Circunferencia:

1. Crea el punto central de la circunferencia (para que sea visible):

   "O=(5,5)"

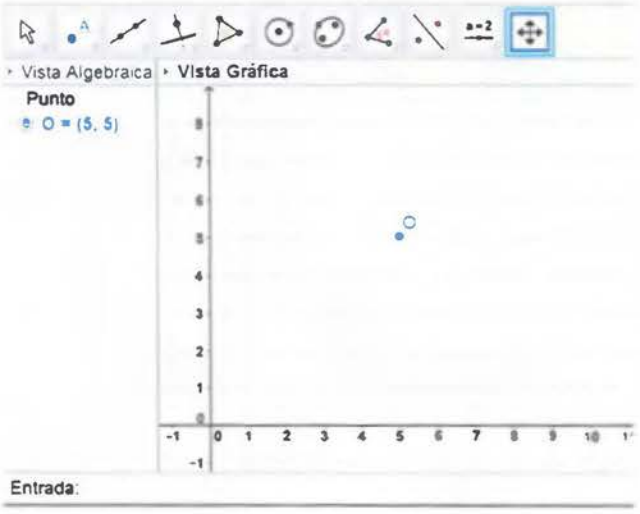


Figura 3.1:
Fuente: Elaboración propia

2. Crea la circunferencia:

   "Circunferencia[O,4]"

   Debería quedar una circunferencia que no corta los ejes, para que no molesten. También puedes quitar la vista de los ejes.

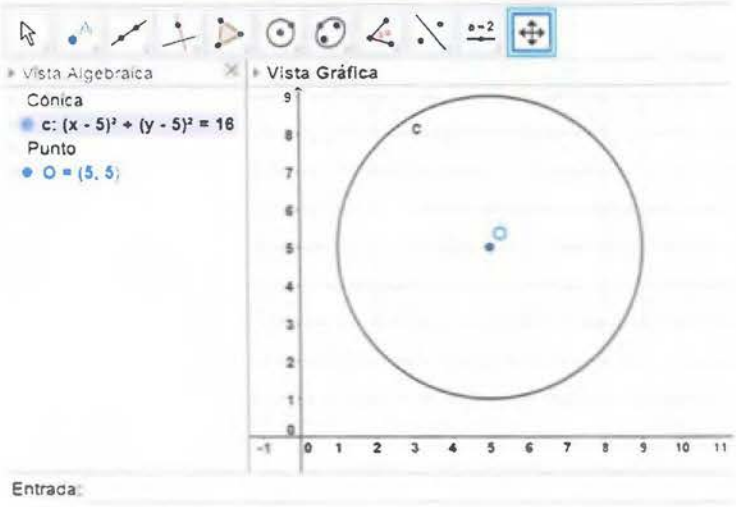


Figura 3.2:
Fuente: Elaboración propia

- Crea el deslizador (sea "n" el deslizador para el ejemplo con un rango de 1 a 200)

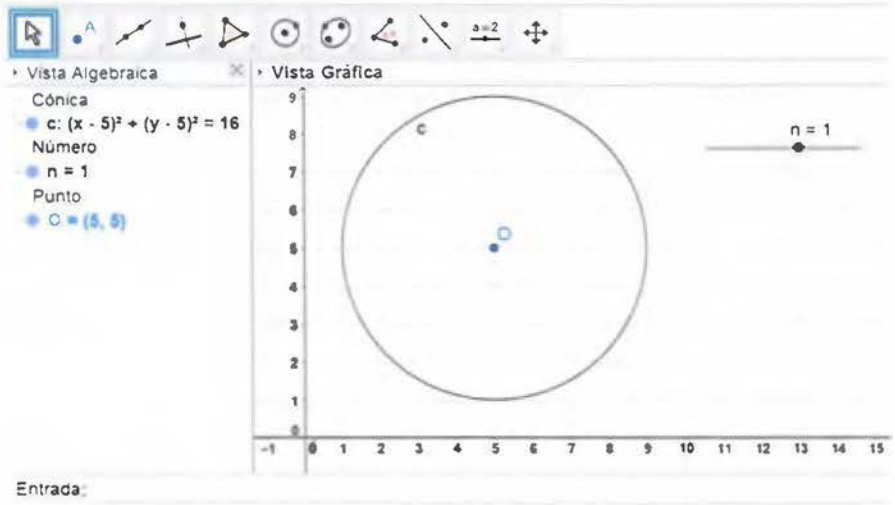


Figura 3.3:
Fuente: Elaboración propia

- Crea el radio de la circunferencia con un segmento. Lo vamos a usar de base para dividir luego la circunferencia en los ángulos que necesitamos:

  "r=Segmento[O,4]" (donde 4 es el tamaño del radio en este ejemplo)

  El segmento radio se llamará "r". Si no le pones la parte "r=" entonces le pondrá nombre automático, fíjate en que nombre es.

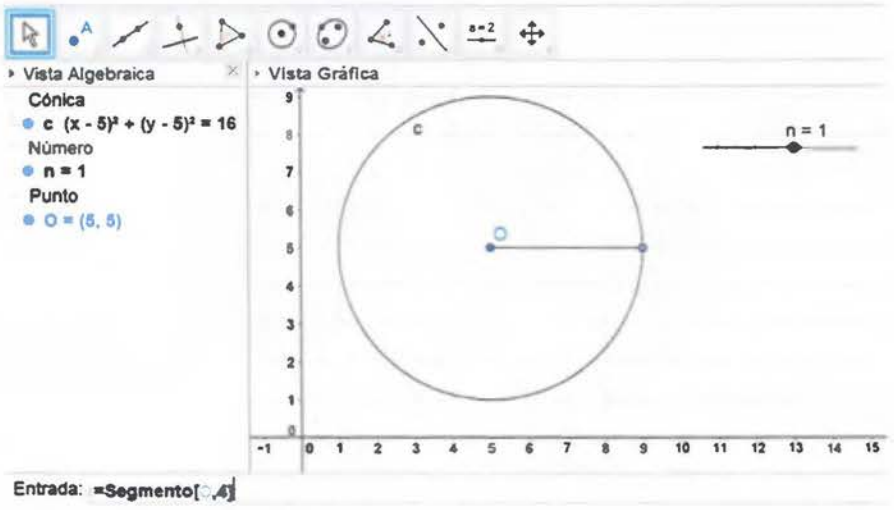


Figura 3.4:
Fuente: Elaboración propia

5. Primera secuencia: necesitamos copiar el segmento en los ángulos precisos para ubicar los vértices en la circunferencia:

   "Secuencia[Segmento[Rota[O, 360° / n k, O], Rota[A, 360° / n k, O]], k, 1, n, 1]" Esto rota el radio "r" de este ejemplo en los ángulos adecuados al polígono de lado "n" que queremos crear. Fijate en el nombre de la lista creada, normalmente será "lista1"

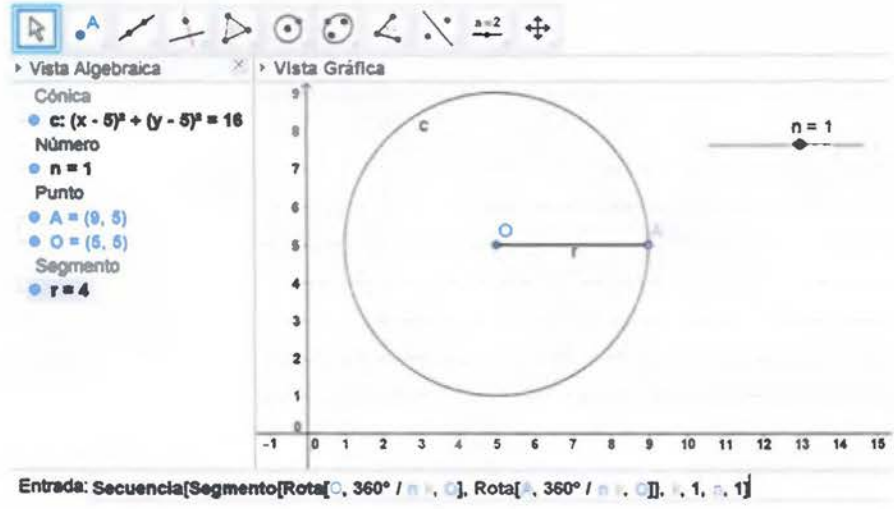


Figura 3.5:
Fuente: Elaboración propia

6. Lamentablemente lo anterior no nos genera los vértices, tenemos que crearlos con otra secuencia, que será la intersección de los radios que creamos en el punto 5, con la circunferencia:

"Secuencia[Interseca[Elemento[lista1,k],c],k,1,n,1]"

Esto tomará cada elemento de la lista1 y lo intersectará con la circunferencia, cuida que el nombre de la lista sea el adecuado.

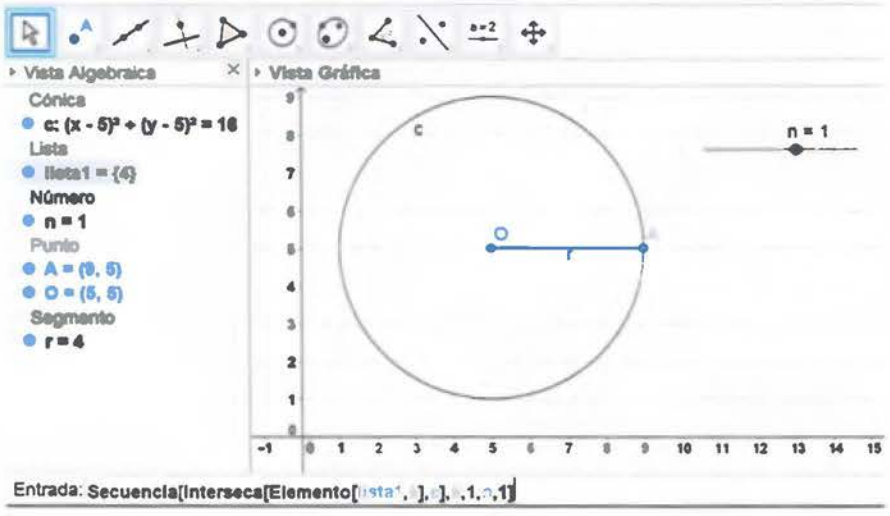


Figura 3.6:
Fuente: Elaboración propia

- Tenemos ahora los vértices en otra lista, normalmente, "lista 2". Para terminar, hay que crear el polígono con la lista de puntos:
  Polígono[lista2]

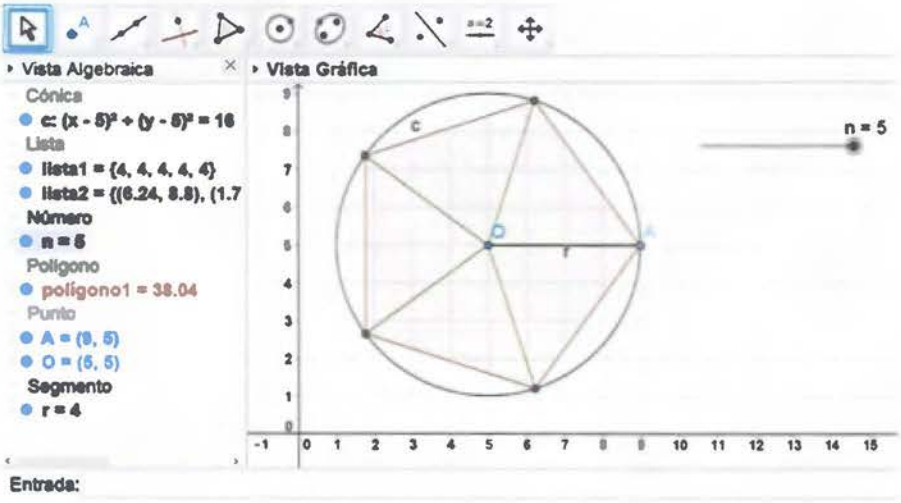


Figura 3.7:
Fuente: Elaboración propia

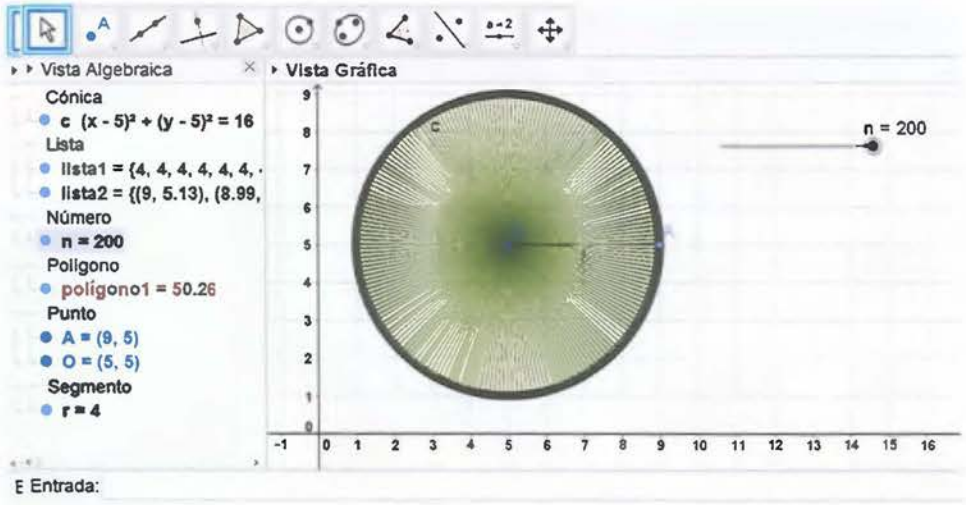


Figura 3.8:
Fuente: Elaboración propia

Puede acceder a la construcción 1 con el código

3.1.2 Construcción 2

Traslación de una circunferencia

1. Crear un punto en la entrada $O = (6,5)$.

Figura 3.9:
Fuente: Elaboración propia

2. Crear una circunferncia de centro O y radio $\sqrt{3}$.

Figura 3.10:
Fuente: Elaboración propia

3. Crear un punto en la circunferencia c.

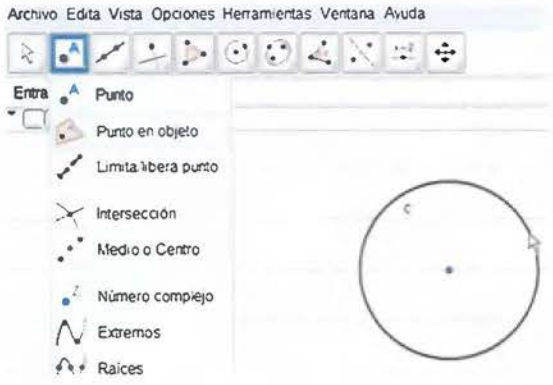


Figura 3.11:
Fuente: Elaboración propia

5. Crear un ángulo dada la amplitud, con vértice O y medida 40°.

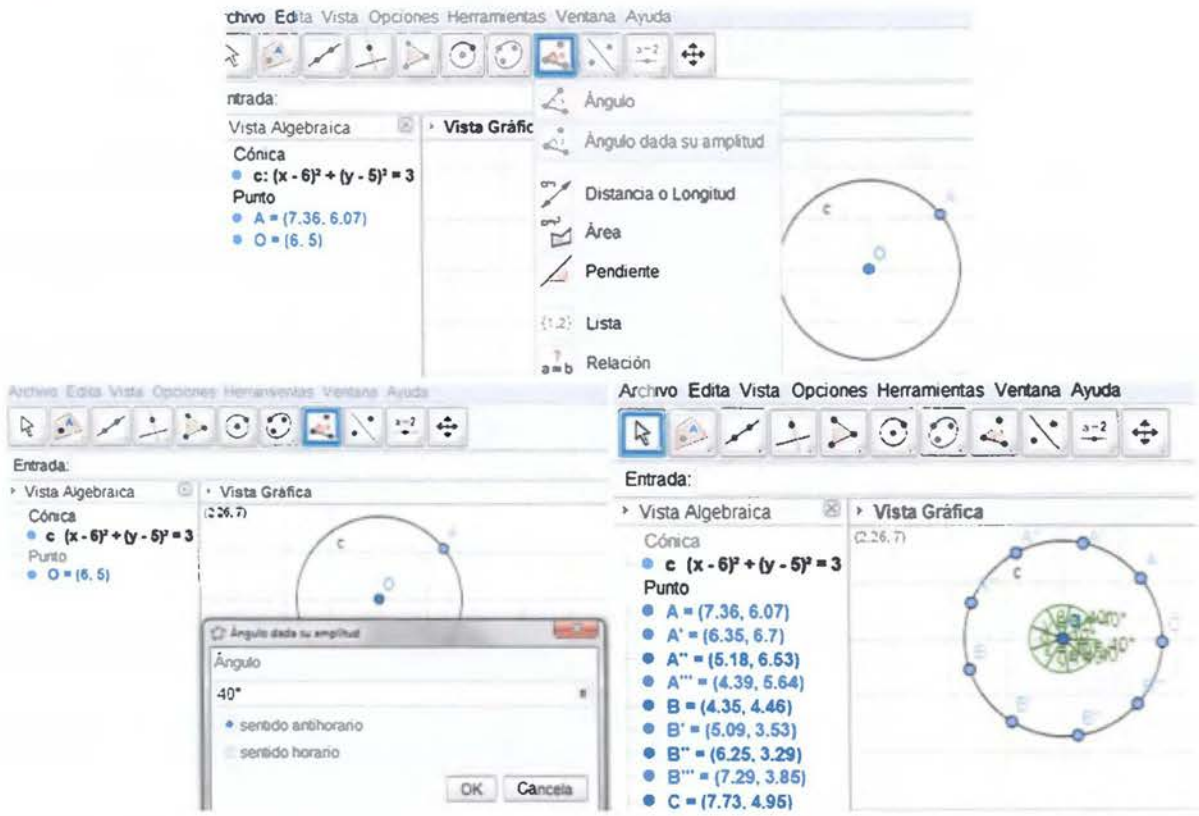


Figura 3.12:
Fuente: Elaboración Propia

6. Crear un sector circular con vértice O y ángulo 40°.

Figura 3.13:
Fuente: Elaboración propia

Se marca en el siguiente orden el centro O, el punto A y el punto A' obteniendo el sector d.

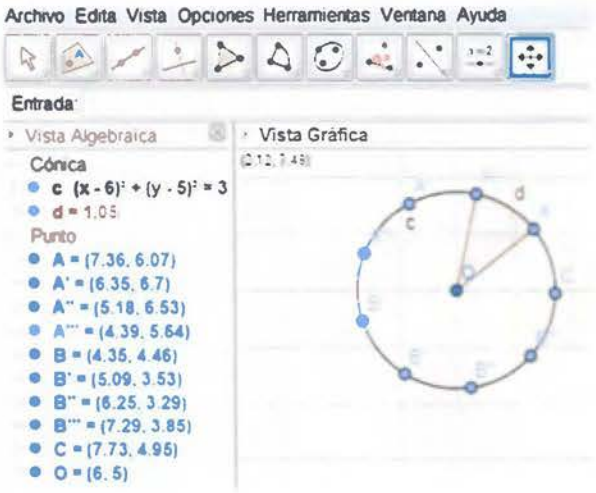


Figura 3.14:
Fuente: Elaboración propia

Así se crean los demás sectores iniciando con el centro O y trabajando en sentido antihorario.

6. Crear un deslizador de ángulo.

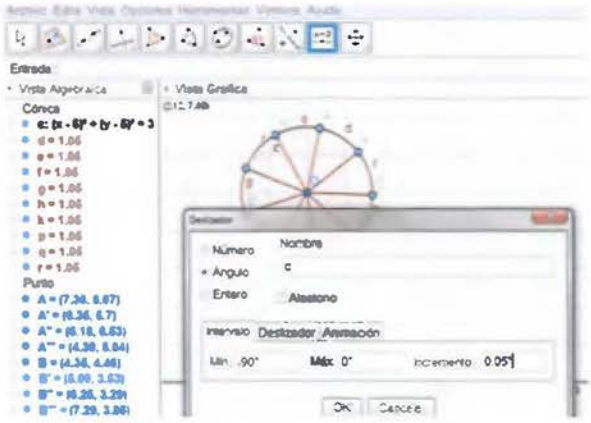


Figura 3.15:
Fuente: Elaboración propia

7. Crear el punto $L = (-4, 8)$.

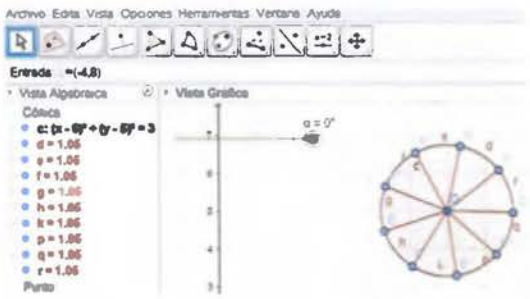


Figura 3.16:
Fuente: Elaboración propia

8. En la entrada se ingresa Rota $[c, \alpha, L]$, y se hace lo mismo con cada sector circular:

Rota $[d, \alpha, L]$
Rota $[e, \alpha, L]$
Rota $[f, \alpha, L]$
Rota $[g, \alpha, L]$
Rota $[h, \alpha, L]$
Rota $[k, \alpha, L]$
Rota $[p, \alpha, L]$
Rota $[q, \alpha, L]$
Rota $[r, \alpha, L]$

Al manipular el deslizador se obtiene

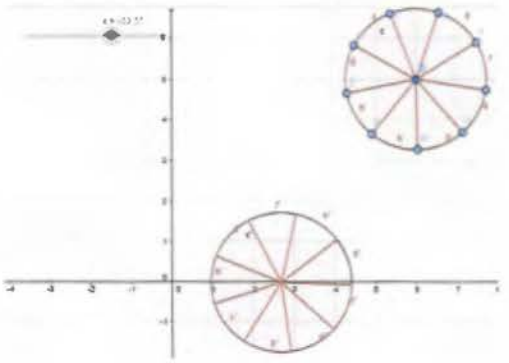


Figura 3.17:
Fuente: Elaboración propia

Se pueden personalizar las figuras como se muestra en la figura 3.18

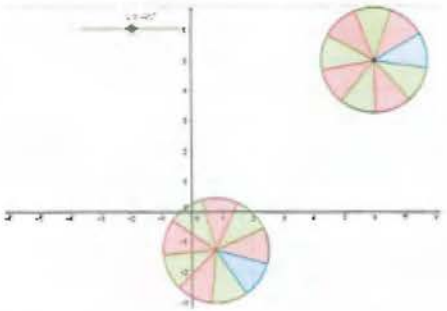


Figura 3.18:
Fuente: Elaboración propia

- Puede acceder a la construcción 2 con el código

3.1.3 Construccion 3

Puntos interiores y exteriores

1. Crear el deslizador r.

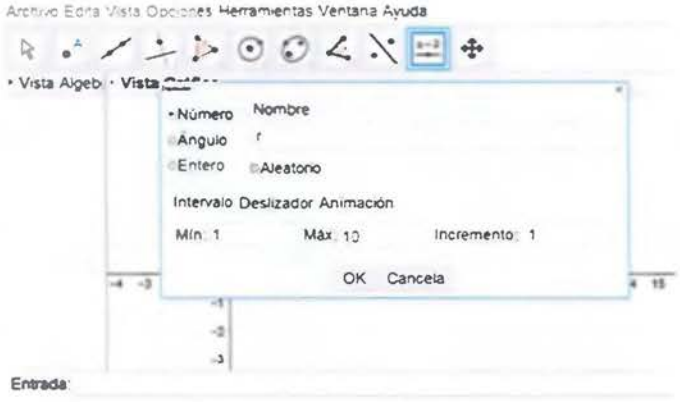


Figura 3.19:
Fuente: Elaboración propia

2. Definir la circunferencia con centro $(1,1)$ y radio r:
Circunferencia$[(1,1), r]$

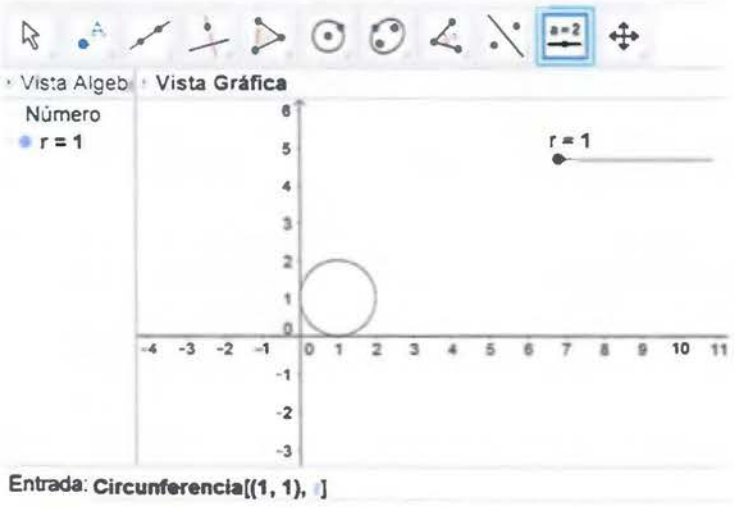


Figura 3.20:
Fuente: Elaboración propia

5. Crear el punto centro de la circunferencia: $O = (1, 1)$

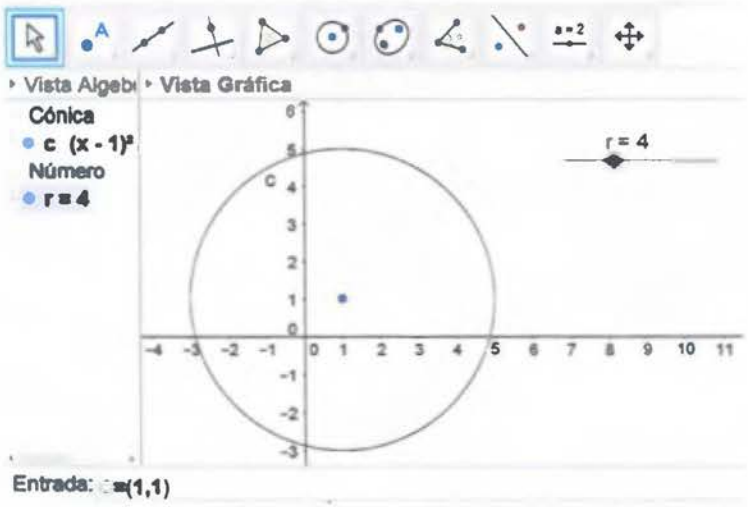


Figura 3.21:
Fuente: Elaboración propia

6. Construya el segmento con centro en O y longitud r:
Segmento$[O, r]$

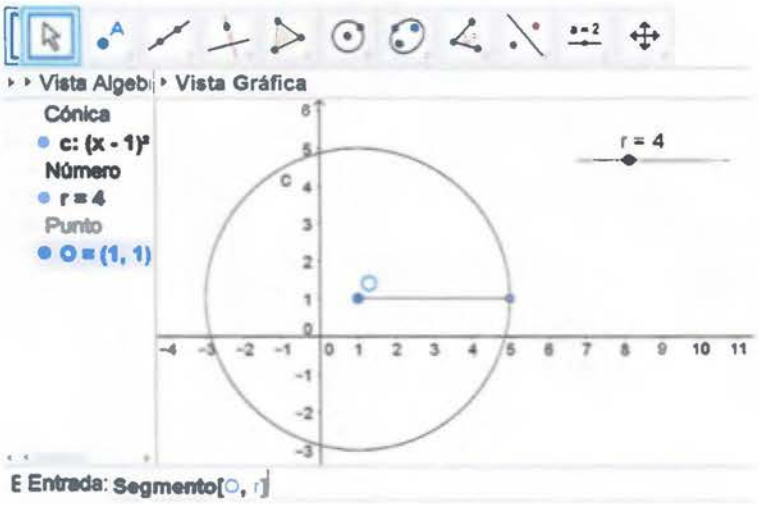


Figura 3.22:
Fuente: Elaboración propia

5. Construya los deslizadores a, b y c

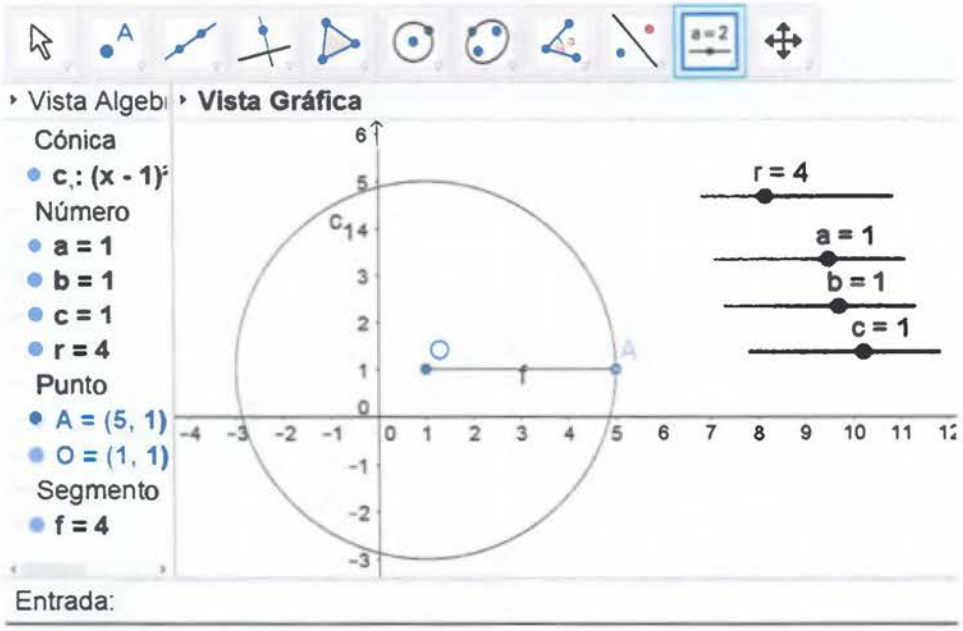


Figura 3.23:
Fuente: Elaboración propia

6. Y a partir de esos deslizadores se definen los segmentos con centro en O y longitud a, b y c:
Segmento$[O, a]$
Segmento$[O, b]$
Segmento$[O, c]$
Por la manera de construirlos, los segmentos quedarán uno encima del otro, con el mouse rote los segmentos para visualizarlos mejor.

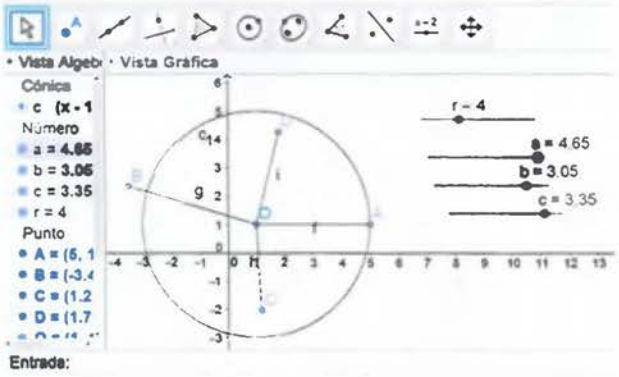


Figura 3.24:
Fuente: Elaboración propia

7. Cambiar en las opciones de los anteriores segmentos que se muestre el valor (longitud).

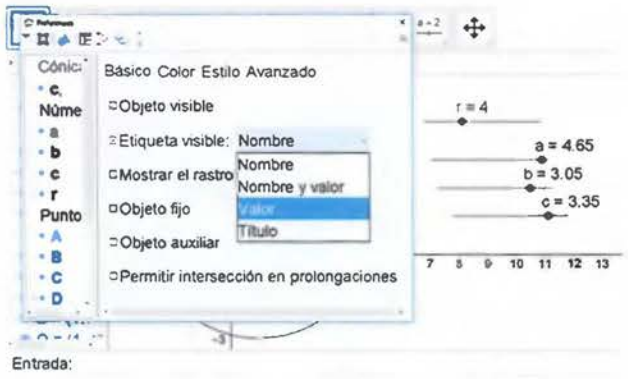


Figura 3.25:
Fuente: Elaboración propia

8. La construcción se puede decorar con diferentes colores y estilos.

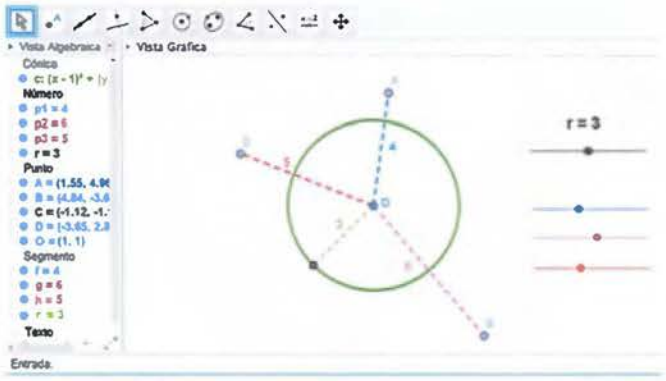


Figura 3.26:
Fuente: Elaboración propia

9. Puede acceder a la construcción 3 con el código

3.1.4 Construcción 4

Construcción Recta Secante, Tangente y Exterior

1. En la casilla de vista elija la opción de vista gráfica 2.

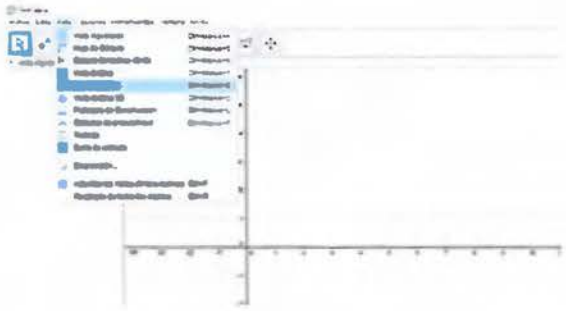


Figura 3.27:
Fuente: Elaboración propia

2. En la vista gráfica 2 defina el deslizador para las constantes a, b, h, k y r.

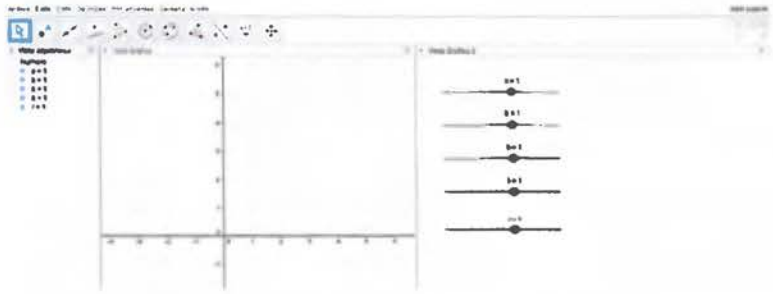


Figura 3.28:
Fuente: Elaboración propia

3. En la barra de entrada se define la ecuación $y = ax + b$, para obtener la ecuación general de una recta cuya pendiente en este caso es a.

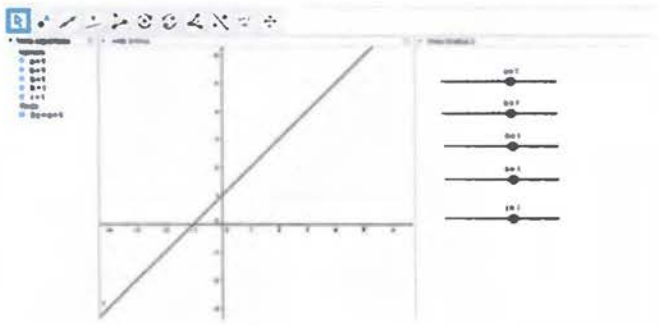


Figura 3.29:
Fuente: Elaboración propia

4. De igual manera en la barra de entrada se define la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, ecuación que corresponde a una circunferencia cualquiera, cuyo centro está dado por el par ordenado (h,k).

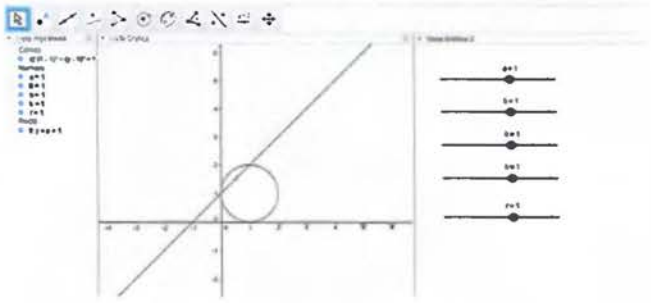


Figura 3.30:
Fuente: Elaboración propia

5. Se define en la barra de entrada el discriminante de la siguiente manera:

$$\Delta=(-2h+2ab-2ka)^2-4(1+a^2)(h^2+b^2-2kb+k^2-r^2)$$

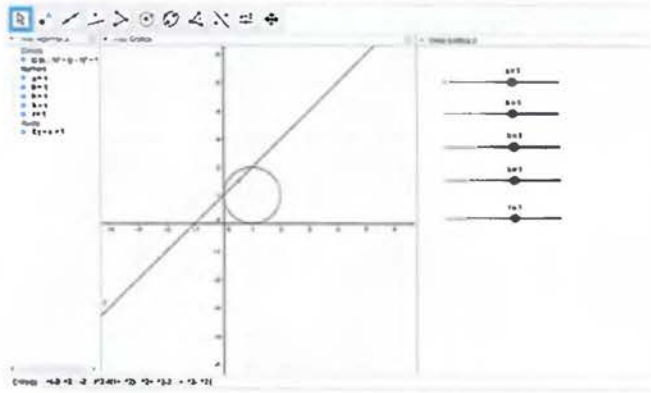


Figura 3.31:
Fuente: Elaboración propia

6. Para mejorar estéticamente la construcción defina texto dinámico para establecer condiciones en las que quiere que se muestren etiquetas en la construcción, en este caso (recta secante, recta tangente y recta exterior).

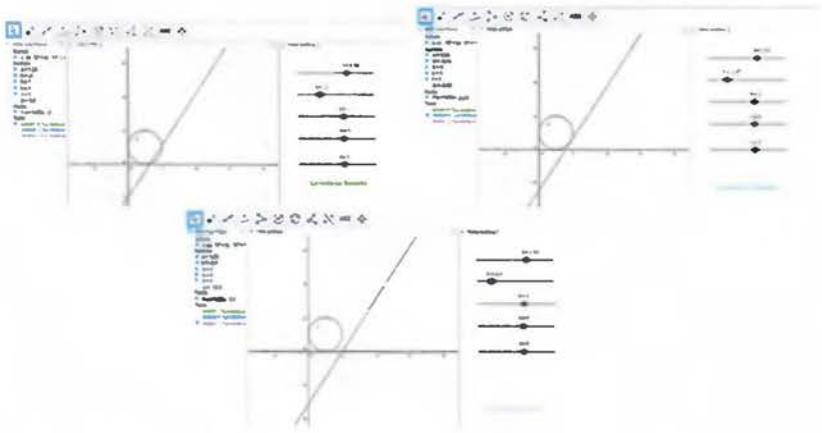


Figura 3.32:
Fuente: Elaboración Propia

7. Puede acceder a la construcción 4 con el código

3.1.5 Texto dinámico

1. Ubíquese en la barra de herramientas y seleccione la pestaña **Deslizador**, despliegue la ventana para seleccionar la opción **Texto**.

Figura 3.33:
Fuente: Elaboración Propia

2. En la vista gráfica, dé un clip sobre el documento y digite en la ventana **Edita** "Recta Secante", seleccione la opción **Fórmula Latex** para optener una opción de texto matemático y presione la tecla **OK**.

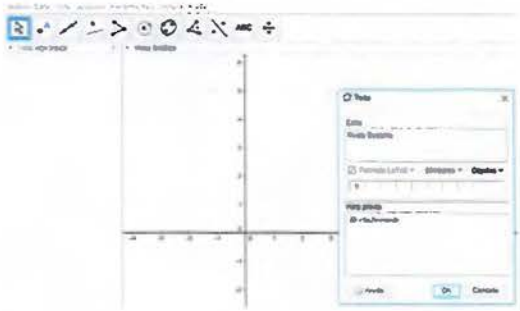


Figura 3.34:
Fuente: Elaboración propia

3. Una vez que el texto aparezca en la vista gráfica, presione clip derecho sobre el texto para desplegar una ventana con distintas opciones, seleccione **Propiedades** y aparecerá una ventana en la que puede cambiar el color, grosor de letra, y varias opciones en cuanto apariencia del texto. En ésta misma ventana seleccione la opción **Avanzado**.

Figura 3.35:
Fuente: Elaboración Propia

9. Una vez seleccionada la opción Avanzado seleccione **Condición para mostrar objeto**, digite $\Delta > 0$.

Figura 3.36:
Fuente: Elaboración propia

10. Siga los pasos del 1 al 4 para definir texto para recta tangente y recta exterior.

3.1.6 Construcción 5

Distancia de un punto de la elipse a los Focos

1. Se oculta la cuadrícula y los ejes, se define en la entrada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$

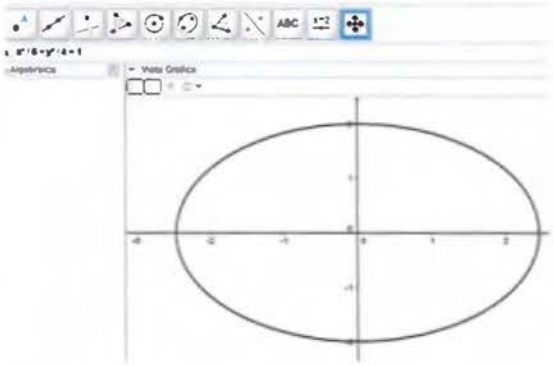


Figura 3.37:
Fuente: Elaboración propia

2. Se escriben las coodenadas en la entrada $(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$ que correspondientes a los focos de la elipse y se etiquetan con texto como F_1 y F_2.

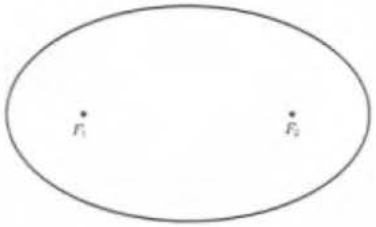


Figura 3.38:
Fuente: Elaboración propia

3. Se marca un punto sobre la elipse y se etiqueta como $P(x,y)$ y se escriben en la entrada los vértices $(-\sqrt{6},0)$ y $(\sqrt{6},0)$ y se etiquetan como V_1 y V_2.

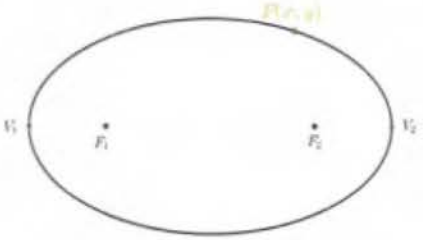


Figura 3.39:
Fuente: Elaboración propia

4. Se construyen los segmentos de los focos hacia el punto $P(x, y)$, además del segmento que une los vértices.

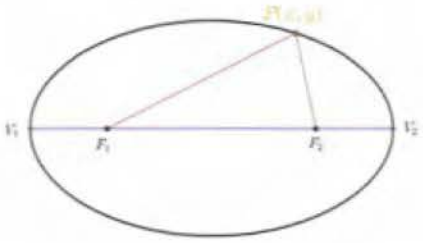


Figura 3.40:
Fuente: Elaboración propia

5. Se etiqueta el segmento que une los vértices como se muestra en la figura $d =$ y se marca en objeto d, pues así se llama el segmento en la vista algebraica.

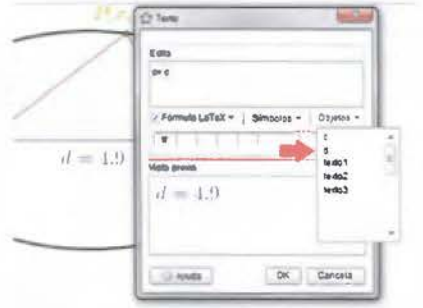


Figura 3.41:
Fuente: Elaboración propia

6. De igual forma se etiquetan los las distancias a los focos, solo que se le da una posición para que conforme se mueva el punto $P(x, y)$ se mueva el texto.

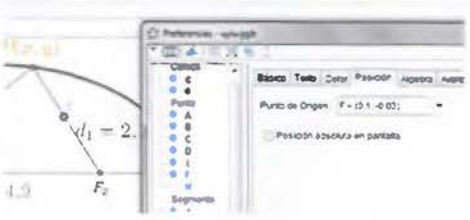


Figura 3.42:
Fuente: Elaboración propia

7. Se escribe el texto como se observa en la figura para observar que con forme se mueva el punto el valor de la suma de las distancia a los focos es igual a la distacia de los vértices.

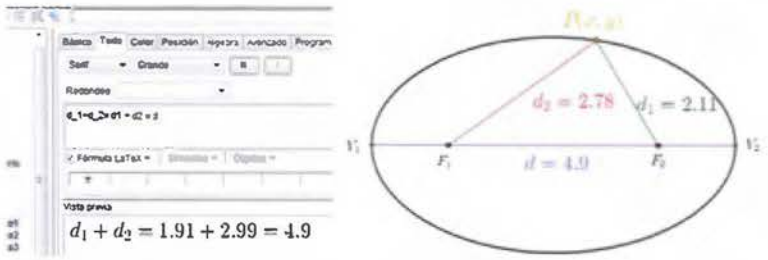


Figura 3.43:
Fuente: Elaboración Propia

8. Puede acceder a la construcción 5 con el código

3.2 Ejercicios de Geométria Pruebas Nacionales

3.2.1 Primera Convocatoria Bachillerato por Madurez 2016

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-3,-5)$ y su radio es 7?

   A) $x^2+y^2-15=0$

   B) $x^2+y^2-83=0$

   C) $x^2+y^2-6x-10y-15=0$

   D) $x^2+y^2+6x+10y-15=0$

2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ecuación ordinaria de la circunferencia para la ecuación $x^2+y^2-8x+9y-74=0$?

   A) $(x+4)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$

   B) $(x-4)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$

   C) $(x-4)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$

   D) $(x+4)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$

3. En México se encuentra un reloj floral, como se muestra en la figura que posee una carátula floral circular de 10 m de diámetro. A este reloj lo adornan 20 mil plantas de diferentes especies. ¿Cuál es la ecuación ordinaria de la circunferencia si su centro está en el punto $A(6,2)$?

   A) $x^2+y^2-15=0$
   B) $x^2+y^2-115=0$
   C) $x^2+y^2-12x-4y+15=0$
   D) $x^2+y^2+12x-4y-15=0$

Imagen tomada de:
https://www.google.com/search?q=reloj+floral+Mexico

4. ¿Cuál es la ecuación de una recta tangente a la circunferencia dada por $x^2+y^2-2x+3y-18=0$ si la recta pasa por el punto de tangencia $P(2,3)$?

   A) $y=2x-1$

   B) $y=\frac{-3}{2}x+6$

   C) $y=\frac{-2}{3}x+\frac{13}{3}$

   D) $y=\frac{-2}{9}x+\frac{31}{9}$

5. Una ecuación de una recta paralela a la recta dada por la ecuación $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$ es

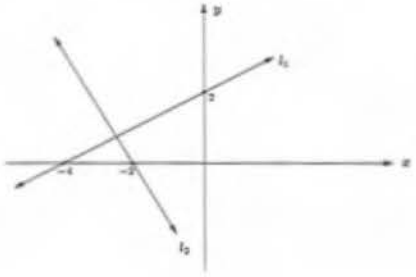
   A) $y = \frac{3}{2}x - 5$

   B) $y = \frac{2}{3}x - 5$

   C) $y = \frac{-3}{2}x + 5$

   D) $y = \frac{-2}{3}x + 5$

6. De acuerdo con los datos de la gráfica, si $l_1 \perp l_2$, entonces una ecuación que determina a la recta l_2 es



   A) $y = 2x + 4$

   B) $y = \frac{1}{2}x + 1$

   C) $y = -2x - 4$

   D) $y = \frac{-1}{2}x - 2$

7. La nueva ecuación de la circunferencia dada por $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, después de una traslación que mueve el punto $P(3, -2)$ al orígen del sistema de coordenadas corresponde a

   A) $x^2 + y^2 = 16$

   B) $x^2 + y^2 = -16$

   C) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 24 = 0$

   D) $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$

8. Al trasladar el centro de la circunferencia dada por $x^2 + y^2 - 36 = 0$ al punto $P(-2,4)$ la ecuación ordinaria de la circunferencia que se obtiene es

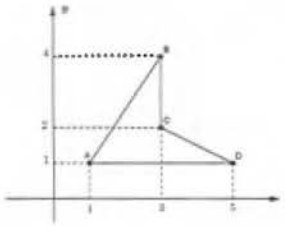
   A) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 36$

   B) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$

   C) $(x-4)^2 + (y+16)^2 = 36$

   D) $(x+4)^2 + (y-16)^2 = 36$

9. Considere la siguiente representación gráfica:



De acuerdo con los datos de la figura, ¿Cuál es aproximadamente el perímetro del cuadrilátero $ABCD$?

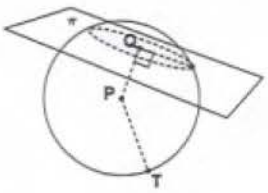
A) $15,60\ cm$

B) $13,28\ cm$

C) $11,84\ cm$

D) $10,42\ cm$

10. Considere la siguiente información para responder las siguientes preguntas:
Se le presenta una esfera de centro P que ha sido cortada por un plano π



T es un punto de la circunferencia.
Q es el centro de la sección obtenida al hacer el corte.

11. ¿Qué nombre recibe la sección plana al realizarse el corte?

A) Elipse

B) Parábola

C) Hipérbola

D) Circunferencia

12. ¿Qué nombre recibe $\overline{PT}$?

A) Recta

B) Radio

C) Cuerda

D) Diámetro

3.2.2 Segunda Convocatoria Bachillerato por Madurez 2016

1. Considere la siguiente información referida a la ecuación de una circunferencia dada por $(x-4)^2+(y+2)^2=16$:
   ¿Cuáles son las coordenadas del centro de dicha circunferencia?

   A) $(4,2)$

   B) $(4,-2)$

   C) $(-4,2)$

   D) $(-4,-2)$

   Con base en la siguiente información conteste las siguientes preguntas:

   Una circunferencia está dada por $x^2+y^2=9$.

2. Considere las siguientes proposiciones:

   I. El radio de la circunferencia es 3.

   II. $(0,0)$ es el centro de la circunferencia.

   ¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

   A) Ambas

   B) Ninguna

   C) Solo la I

   D) Solo la II

3. Considere la siguientes proposiciones:

   I. $P(2,2)$ es un punto que se ubica en el interior de la circunferencia.

   II. $R(2,3)$ es un punto que se ubica en el exterior de la circunferencia.

   ¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

   A) Ambas

   B) Ninguna

   C) Solo la I

   D) Solo la II

4. Considere la circunferencia dada por $x^2+(y-2)^2=4$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y=1$	II. $y=5$

Con base en la información anterior, ¿ cuál o cuáles son rectas tangentes a la circunferencia?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

5. Considere la circunferencia dada por $x^2+y^2=4$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y=3$	II. $y=x$

Con base en la información anterior, ¿ cuál o cuáles son rectas exteriores a la circunferencia?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

6. Considere la circunferencia dada por $x^2+y^2=9$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y=1$	II. $y=-x+1$

Con base en la información anterior, ¿ cuál o cuáles son rectas secantes a la circunferencia?

A) Ambas
B) Ninguna
C) Solo la I
D) Solo la II

7. Considere la circunferencia dada por $(x+2)^2+(y-4)^2=81$. Si se traslada la circunferencia, desplazando su centro 3 unidades a la izquierda (paralelo al eje "x"o de las abscisas), entonces se obtiene una circunferencia cuya ecuación corresponde a

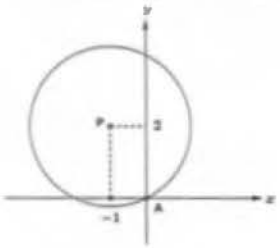
   A) $(x+1)^2+(y-4)^2=81$

   B) $(x-5)^2+(y-4)^2=81$

   C) $(x-1)^2+(y-4)^2=81$

   D) $(x+5)^2+(y-4)^2=81$

8. Considere la siguiente gráfica referida a una circunferencia cuyo centro es el punto $P(-1,2)$, contiene el punto $A(0,0)$ y la longitud de su radio es $\sqrt{5}$:



   De acuerdo con la información anterior, si se traslada la circunferencia, desplazando su centro 5 unidades a la izquierda (paralelo al eje de las abscisas) y 3 unidades hacia abajo (paralelo al eje de las ordenadas), entonces se obtiene una circunferencia cuya ecuación corresponde a

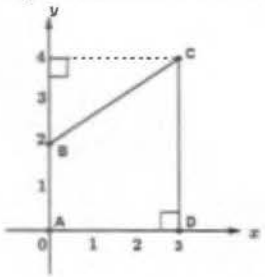
   A) $(x+6)^2+(y+1)^2=5$

   B) $(x-6)^2+(y-5)^2=5$

   C) $(x-5)^2+(y+1)^2=5$

   D) $(x-6)^2+(y-1)^2=5$

9. Considere la información de la siguiente figura, la cual corresponde a un cuadrilátero representado en un sistema de coordenadas rectangulares:



   Con base en la información anterior, el área del cuadrilátero $ABCD$ corresponde a

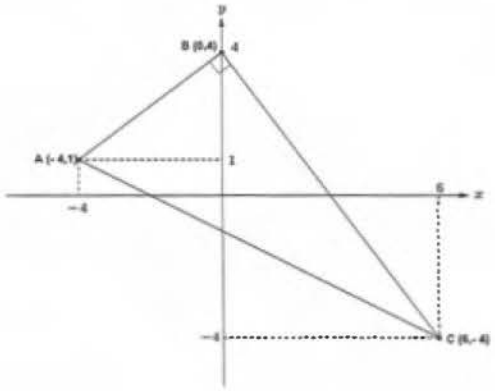
   A) 7

   B) 9

   C) 14

   D) 15

10. Considere la información de la siguiente gráfica:



Con base en la información anterior, ¿cuál es el perímetro del triángulo ΔABC?

A) $11+\sqrt{5}$

B) $15+\sqrt{29}$

C) $11+\sqrt{29}$

D) $15+5\sqrt{5}$

11. Sea un cilindro circular recto, tal que, la medida del diámetro es 12. Si un plano paralelo a la base del cilindro interseca a dicho cilindro, entonces, la longitud de la sección plana que se forma entre ellos, corresponde a

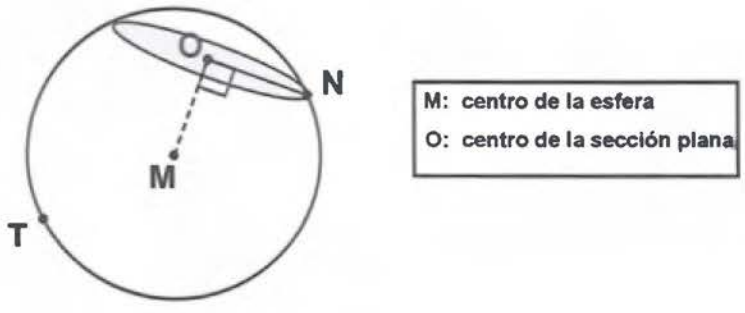
A) 6π

B) 12π

C) 36π

D) 144π

Con base en la siguiente información, conteste las siguientes preguntas:
La siguiente figura ilustra una esfera y una sección plana producto de la intersección de esta con un plano. Además, considere que $TM = 5$ y $ON = 3$.



12. ¿Cuál es la longitud de la sección plana?

    A) 6π

    B) 8π

    C) 9π

    D) 10π

13. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera al centro de la sección plana dada?

    A) 3

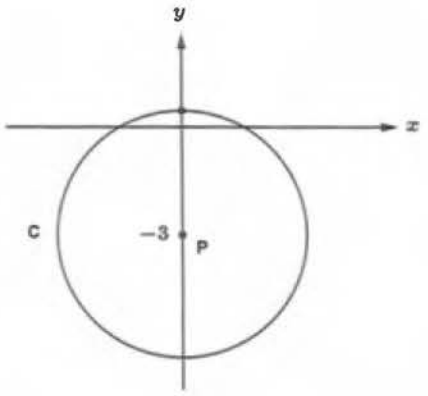
    B) 4

    C) 5

    D) 6

3.2.3 Prueba Ordinaria Bachillerato Noviembre 2016

1. Considere la siguiente representación gráfica de una circunferencia C de centro P, cuya medida del radio es 4:



De acuerdo con la información anterior, la ecuación de esa circunferencia corresponde a

A) $x^2+(y-3)^2=4$

B) $x^2+(y+3)^2=4$

C) $x^2+(y-3)^2=16$

D) $x^2+(y+3)^2=16$

2. Si el centro de una circunferencia es el punto $(-5,-1)$ y la medida de su diámetro es 6, entonces la ecuación de esa circunferencia corresponde a

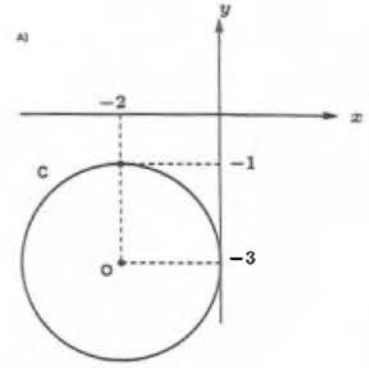
A) $(x-5)^2+(y-1)^2=9$

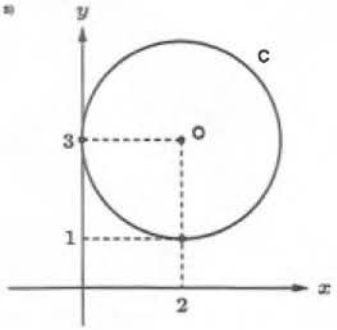
B) $(x+5)^2+(y+1)^2=9$

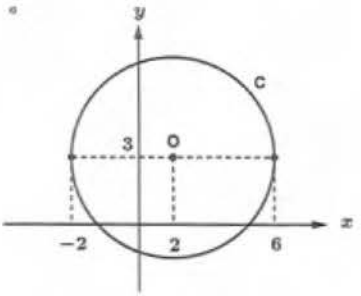
C) $(x+1)^2+(y+5)^2=36$

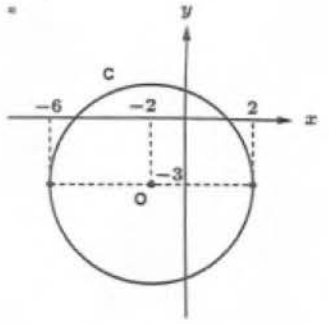
D) $(x-1)^2+(y-5)^2=36$

3. La representación gráfica de la circunferencia C de centro O dada por $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ corresponde a

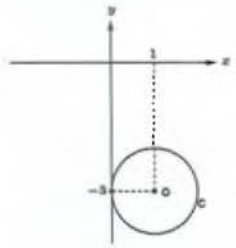








4. Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O, cuya medida del radio es 1:



De acuerdo con la información anterior, la ecuación de una recta tangente a C es

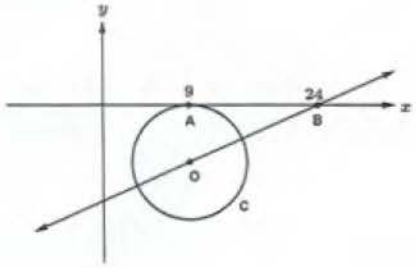
A) $y = 0$

B) $y = 1$

C) $y = -2$

D) $y = -3$

5. Considere la siguiente representación gráfica, en la cual el "eje x"es tangente en A a la circunferencia C de centro O:



De acuerdo con la información anterior, si $OB = 17$, entonces, ¿ cuál es la medida del radio de esa circunferencia?

R/ ☐☐☐☐, ☐☐

6. Considere las isguientes proposiciones referentes a la circunferencia C dada por $x^2 + y^2 = 16$:

I. La recta dada por $x = y - 2$ es exterior a la circunferencia C.
II. La recta dada por $y = x - 4$ es secante a la circunferencia C.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

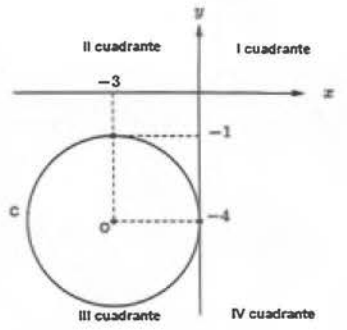
A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O, para responder las siguientes preguntas



7. Si C' es una raslación de C, de modo que ambos ejes de coordenadas sean tangentes a C' y que su centro se ubique en el III cuadrante, entonces el centro de C' corresponde al punto

   A) $(-4,-2)$

   B) $(-4,-3)$

   C) $(-3,-2)$

   D) $(-4,-3)$

8. Si C'' se obtiene al trasladar la circunferencia C, tres unidades a la derecha (horizontalmente) y dos unidades hacia arriba (verticalmente), entonces la ecuación de C'' corresponde a

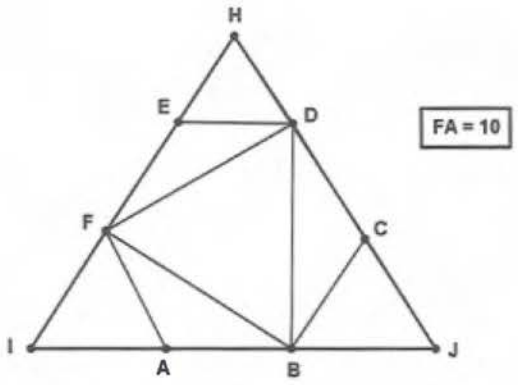
   A) $x^2+(y+2)^2=3$

   B) $x^2+(y-2)^2=3$

   C) $x^2+(y+2)^2=9$

   D) $x^2+(y-2)^2=9$

Considere la siguiente figura, que muestra el ΔDFB, el hexágono regular $ABCDEF$ y el ΔHIJ, para responder las siguientes preguntas:



9. El perímetro del ΔHIJ es

   A) 60

   B) 90

   C) $25\sqrt{3}$

   D) $225\sqrt{3}$

10. El área del ΔDFB es

    A) $30\sqrt{3}$

    B) $60\sqrt{3}$

    C) $75\sqrt{3}$

    D) $150\sqrt{3}$

11. Si de un cilindro circular recto se quiere obtener una sección plana que corresponda a una circunferencia, entonces el corte que se debe realizar a ese cilindro corresponde a

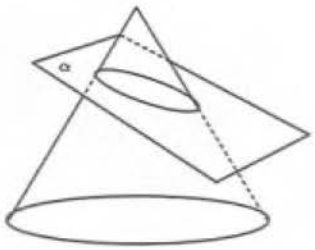
    A) paralelo con respecto a las bases.

    B) perpendicular con respecto a las bases.

    C) oblicuo con respecto a las bases y que **no** las corte.

    D) oblicuo con respecto a las bases y que corte una de ellas.

12. Considere la siguiente figura, referente a un cono circular recto cortado por un plano α oblicuo con respecto la base sin cortarla:



De acuerdo con la información anterior, la intersección del plano α con el cono corresponde a una sección plana denominada

A) elipse.

B) parábola.

C) hipérbola.

D) circunferencia.

3.2.4 Prueba Bachillerato Educación Diversificada a Distancia Convocatoria 00 - 2017

1. Considere las siguientes proposiciones:

I. $P(3,0)$ **es un punto interior de la circunferencia.**

II. $R(0,3)$ **es un punto exterior de la circunferencia.**

¿Cuál o cuáles de ellas son **verdaderas**?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

Considere la siguiente información para responder las siguientes preguntas:

Sea la ecuación de una circunferencia dada por $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

2. La longitud del radio de la circunferencia anterior, corresponde a

A) 1

B) 3

C) 5

D) 25

3. Las coordenadas del centro de dicha circunferencia, corresponde a

A) $(1,-3)$

B) $(3,-1)$

C) $(-3,1)$

D) $(-1,3)$

4. Considere la circunferencia dada por $x^2+(y-1)^2=9$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y=2$ II. $y=4$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles son rectas tangentes a la circunferencia?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

5. Considere la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 16$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y = 5$	II. $y = 2x$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles son rectas exteriores a la circunferencia?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

6. Considere la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 36$, y las siguientes rectas determinadas por:

I. $y = 0$	II. $y = x + 1$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles son rectas esecantes a la circunferencia?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

7. La ecuación de una circunferencia está dada por $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 21$. Si se traslada la circunferencia, desplazando su centro 3 unidades a la derecha (paralelo al eje "x"o al de las abscisas), entonces se obtiene una circunferencia cuya ecuación corresponde a

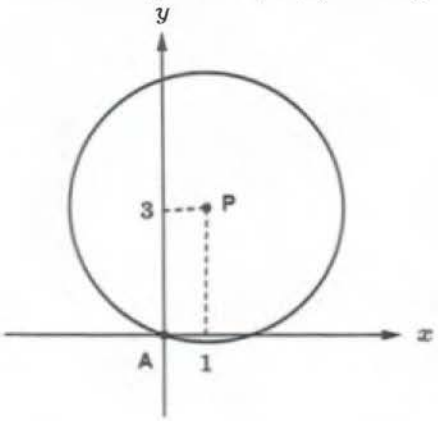
A) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 21$

B) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 21$

C) $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 21$

D) $(x+1)^2 + (y+6)^2 = 21$

8. Considere la siguiente gráfica referida a una circunferencia cuyo centro es el punto $P(1,3)$, contiene el punto $A(0,0)$ y la longitud de su radio es $\sqrt{10}$:



De acuerdo con la información anterior, si se traslada la circunferencia, desplazando su centro 2 unidades a la izquierda (paralelo al eje de las abscisas) y 3 unidades hacia arriba (paralelo al eje de las ordenadas), entonces se obtiene una circunferencia cuya ecuación corresponde a

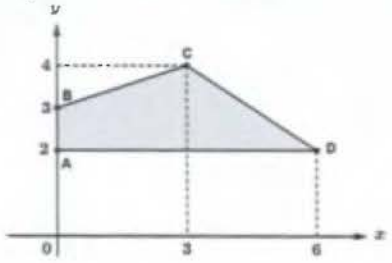
A) $(x+6)^2+(y-1)^2=10$

B) $(x-1)^2+(y+6)^2=10$

C) $(x-6)^2+(y+1)^2=10$

D) $(x+1)^2+(y-6)^2=10$

9. Considere la información de la siguiente figura, la cual corresponde a un cuadrilátero representado en un sistema de coordenadas rectangulares:



Con base en la información anterior, el área del cuadrilátero $ABCD$ corresponde a

A) 7,50

B) 9,50

C) 12,00

D) 13,50

10. Considere un polígono regular, tal que, la medida de un ángulo central es 30^0. Si la longitud del lado es 3, entonces el perímetro de este polígono es

    A) 27

    B) 33

    C) 36

    D) 90

Considere la siguiente información para responder las siguientes preguntas:

Un terreno tiene forma de cuadrado y la medida de su lado es 60 m.
Además, se desea construir a su alrededor una cerca con tres hilos de alambre.

11. ¿Cuál es el área, en metros cuadrados, del terreno?

    A) 180

    B) 240

    C) 720

    D) 3600

12. ¿Cuántos metros de alambre se necesita, como mínimo, para cercar todo el terreno?

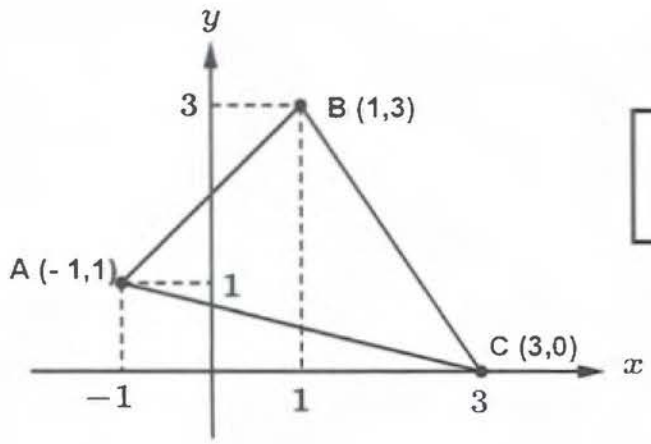
    A) 180

    B) 540

    C) 720

    D) 3600

13. Considere la información de la siguiente gráfica:



$AB = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{13}$

Con base en la información anterior, ¿cuál es el perímetro de ΔABC?

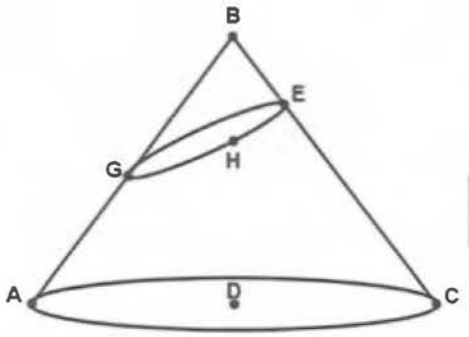
A) $2\sqrt{2}+\sqrt{13}+3$

B) $2\sqrt{2}+\sqrt{13}+4$

C) $2\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{10}$

D) $2\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{17}$

Con base en la información que se indica en la figura siguiente, referida a un cono circular recto, conteste las siguientes preguntas:



A - G - B
A - D - C
C - E - B

BE ≠ BG
D: centro de la base del cono

14. ¿Cuál segmento representa la altura del cono?

A) $\overline{DE}$

B) $\overline{BC}$

C) $\overline{AC}$

D) $\overline{BD}$

15. La sección plana que resulta de la intersección del cono que contiene a los puntos G, H y E corresponde a

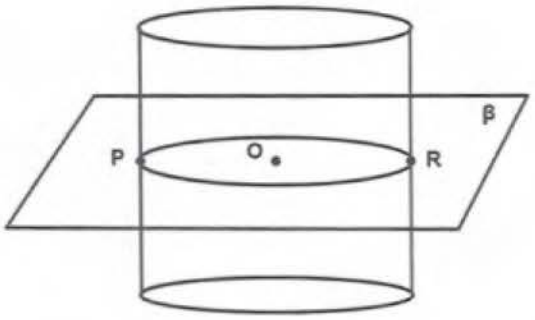
A) elipse.

B) parábola.

C) hipérbola.

D) circunferencia.

16. Considere la siguiente figura sobre un cilindro circular recto, intersecado por el plano β, el cual es paralelo a la base:

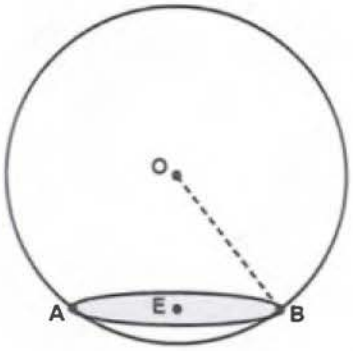


P - O - R
O: centro de la circunferencia

Si el plano contiene a los puntos P y R, y $PR = 4$, entonces, la longitud de la sección plana que se forma producto de la intersección de la superficie cilíndrica con el plano, corresponde a

A) 2π
B) 4π
C) 8π
D) 16π

Con base en la siguiente información, conteste las siguientes preguntas:
La siguiente figura ilustra una sección plana producto de la intersección de un plano con la superficie de una esfera. Además, considere que $OB = 5$ y $AB = 6$.



A - E - B
O: centro de la esfera
E: centro de la sección plana

17. ¿Cuál es la longitud de la sección plana?

A) 6π
B) 10π
C) 11π
D) 12π

18. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera al centro de la sección plana dada?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

7.2. Entrevista a Docentes de Secundaria de la Región Occidente

Universidad de Costa Rica

Sede de Occidente

Seminario de Graduación

Institución:_____

Nombre del docente:_____

Años de Servicio:_____ años.

Entrevista a Docentes de Secundaria de la Región Occidente

A continuación se presentan preguntas sobre las dificultades presentes a la hora de enseñar Geometría Analítica en Educación Diversificada, con el fin de recopilar información para el trabajo final de graduación, titulado **Unidad Didáctica para el abordaje del tema Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada, aplicando resolución de problemas y tecnología.**

1. ¿Ha asistido a capacitaciones sobre los programas de estudio en los últimos dos años?

   Sí _____ No _____

2. ¿Ha impartido temas de Geometría Analítica en los últimos dos años?

   Sí _____ No _____ (Si la respuesta es **No** pasar a pregunta 6)

3. ¿Es importante el tema de Geometría Analítica en la educación diversificada?

   Sí _____ No _____

4. ¿Ha utilizado resolución de problemas para tratar los temas de Geometría Analítica?

   Sí _____ No _____

   ¿Cómo ha sido la experiencia?

   _____

   _____

5. ¿Cuántas horas dedica a la preparación de clases de Geometría Analítica?

   _____

6. ¿Utiliza algún material de apoyo para impartir sus lecciones?

   Sí _____ No _____

   ¿Cuáles?

   _____ Computadora _____ Televisor

   _____ Video Proyector _____ Libro de Texto

   _____ Carteles _____ Otros _____

   ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

7. **¿Utiliza algún libro de texto para el trabajo de clase?**

Sí _____ No _____

¿Cuáles?

_____ Santillana _____ **Folleto propio**

_____ Fenix _____ **Otro** _____

_____ Porras y Gamboa

¿Por qué?

_____

_____

_____

8. **¿Con qué frecuencia realiza actividades que involucren tecnología como material de apoyo en sus lecciones?**

_____ **Nunca**

_____ Muy Poco

_____ **Poco**

_____ A veces

_____ Siempre (Si la repuesta es Nunca pase a pregunta 11)

¿Por qué?

_____

_____

_____

9. ¿Qué software ha utilizado?

_____ GeoGebra

_____ Mathematica

_____ Exel

_____ Win Plot

_____ Prezi

¿Por qué?

_____

_____

_____

10. ¿Cuál ha parecido la experiencia de implementar un software en sus lecciones?

_____

_____

11. ¿Considera que los recursos que utiliza son suficientes para impartir lecciones de Geometría Analítica?

Sí _____ No _____

¿Por qué?

_____

_____

_____

12. ¿Conoce de la existencia de algún software educativo que sea de utilidad en la enseñanza de la

Geometría?

Sí _____ No _____

¿Cuál? _____

13. ¿Considera que la tecnología es un buen método para enseñar Geometría?

    Sí _____ No _____

    ¿Por qué?

    _____

    _____

    _____

14. ¿Qué otros métodos considera usted que se pueden complementar con la Resolución de Problemas para abordar Geometría Analítica?

    _____

    _____

15. ¿Qué contenidos geométricos considera que se le dificulta aprender a los estudiantes?

    _____

    _____

16. ¿Qué factores considera usted que dificultan el aprendizaje de la Geometría en clases?

    _____

    _____

17. ¿Cree que la tecnología ayudaría a minimizar esos factores que dificultan el aprendizaje?

    _____

    _____

18. ¿Considera usted que la parte visual es importante en la enseñanza de la Geometría Analítica?

    _____

    _____

19. Alguna recomendación extra que ayude a la elaboración de nuestra Unidad Didáctica

7.3. Guía de observación para la aplicación

Universidad de Costa Rica

Sede de Occidente

Enseñanza de la Matemática

MA-9600 Seminario de Graduación

Guía de observación

Institución:_____

Sección:_____

Número de estudiantes:_____

Fecha y Hora:_____

Problema por aplicar:_____

Aplicador:_____

A continuación se presentan preguntas sobre las dificultades presentes a la hora de enseñar Geometría Analítica en Educación Diversificada, con el fin de recopilar información para el trabajo final de graduación, titulado **Unidad Didáctica para el abordaje del tema Geometría Analítica en décimo año de la Educación Diversificada, aplicando resolución de problemas y tecnología.**

Aspectos Generales:

Descripción del Espacio Físico

1. La illuminación del aula es:
   - ( ) Exelente
   - ( ) Regular
   - ( ) Mala

2. La distribución del espacio en el aula es:
   ( ) Exelente
   ( ) Regular
   ( ) Mala
3. La ubicación de la pizarra y los recursos audiovisuales:
   ( ) Exelente
   ( ) Regular
   ( ) Mala

Desarrollo de la Clase

4. Los materiales y recursos empleados son:
   ( ) Exelentes
   ( ) Regulares
   ( ) Malos
5. En el desarrollo de los problemas se observa que los estudiantes:
   ( ) Comprenden lo planteado
   ( ) Encuentran diferentes formas de solución
   ( ) No entienden el problema
   ( ) No llegan a la solución
6. Los problemas utilizados:

   ( ) Son acordes con lo que establece el Ministerio de Educación Pública
   ( ) Son acordes con el nivel cognitivo de los estudiantes
   ( ) Son de interés para los estudiantes
   ( ) Se pueden reformular para que sean entendidos por todos los estudiantes
   ( ) Se adaptan al tiempo con que se cuenta para impartir la lección
   ( ) Utilizan la tecnología como herramienta de apoyo para lograr su solución

7. Las preguntas generadoras son pertinentes:

( ) Sí

( ) No

¿Por qué? _____

Le gustaría agregar alguna pregunta

_____

8. El profesor aplicador toma en cuenta la opinión de los estudiantes en el momento de construir la solución de los problemas:

( ) Sí

( ) No

¿Por qué? _____

9. Considera que el uso de la tecnología en el desarrollo de la clase cumple un papel importante en la construcción de conocimiento:

( ) Sí

( ) No

¿Por qué? _____

10. El incluir la tecnología contribuyó a que en la lección se lograra un aprendizaje significativo:

( ) Sí

( ) No

¿Por qué? _____

Actitud de los Estudiantes

11. Al aplicar la tecnología los estudiantes se notan:
    ( ) Interesados
    ( ) Motivados
    ( ) Confundidos
    ( ) Desinteresados
    ( ) Distraídos
12. Los estudiantes ante el planteamiento de los problema, se mostraron:
    ( ) Interesados
    ( ) Motivados
    ( ) Confundidos
    ( ) Desinteresados
13. Los estudiantes participan y construyen con ideas para llegar a una solución:
    ( ) Sí
    ( ) No

    ¿Por qué? _____

7.4. Cuestionario a estudiantes

Universidad de Costa Rica — Seminario de Graduación MA-9601

Sede de Occidente — Enseñanza de la Matemática

Institución: _____

Nivel: _____

1. Al inicio de la lección:
   ( ) No tenía interés y sigo sin tenerlo
   ( ) No tenía interés y ahora si
   ( ) Tenia interés y lo perdí
   ( ) Tenía interés y lo mantuve
   ( ) Tenía interés y ahora quiero saber más

2. ¿Le gustó la metodología (resolución de problemas) empleada en la lección?
   Sí_____ No_____
   ¿Por qué?
   _____
   _____
   _____
   _____

3. ¿Considera que utilizar tecnología ayuda mejorar el aprendizaje?
   Sí_____ No_____
   ¿Por qué?
   _____
   _____
   _____

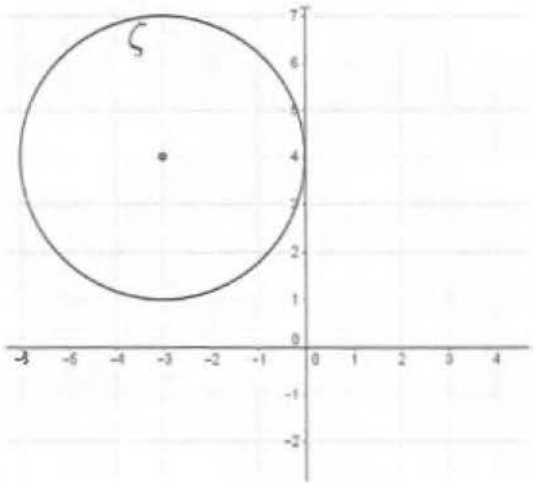
7.5. Diagnóstico para estudiantes

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA — SEMINARIO DE GRADUACIÓN MA-9601
SEDE DE OCCIDENTE — ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

NOMBRE DEL ESTUDIANTE_____ NIVEL _____

INSTITUCIÓN_____

a) Considere la siguiente figura



1) Determine la ecuación de la circunferencia ζ

2) Si el centro de se traslada 6 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo. ¿Cuál es la ecuación de la nueva circunferencia si se mantiene el radio de ζ ?

b) Una cadena de restaurantes tiene servicio a domicilio en dos locales cuyos centros se pueden representar en un plano cartesiano por los puntos $O\ (0,0)$ y $I\ (10,0)$. En la primera cubren 9 km y en la segunda 3 km a la redonda.

1) Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que describen la cobertura de los locales.

2) Determine cuál de las siguientes casas, representadas por puntos, se pueden atender con el primer local, con el segundo, con ambos o con ninguno:

a) $(5,5)$ b) $(1,1)$

c) Considere la circunferencia ζ con ecuación

$$(x-5)^2+(y-1)^2=1$$

Determine si la recta $l_1 : y=\dfrac{x}{4}-1$ es exterior, interior o tangente a ζ.

d) Se sabe que la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, si $a=b$ describe una circunferencia. ¿Qué figura describe la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{si}\ a\neq b$$