UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

REPRESENTACIONES DE GENERALIZACIÓN Y ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS QUE INVOLUCRAN RELACIONES FUNCIONALES. UNA INVESTIGACIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Jason Ureña Alpízar

Granada, 2021

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

REPRESENTACIONES DE GENERALIZACIÓN Y ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS QUE INVOLUCRAN RELACIONES FUNCIONALES. UNA INVESTIGACIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de la Dra. Marta Molina González del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca y el Dr. Rafael Ramírez Uclés del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y que presenta Jason de Jesús Ureña Alpízar, para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Educación.

Fdo.: Jason de Jesús Ureña Alpízar

VºBº de los directores

Fdo.: Dra. Marta Molina González

Fdo.: Dr. Rafael Ramírez Uclés

El doctorando Jason de Jesús Ureña Alpízar y los directores de la tesis la Dra. Marta Molina González y el Dr. Rafael Ramírez Uclés garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 20 de noviembre de 2020.

Fdo.: Jason de Jesús Ureña Alpízar

VºBº de los directores

Fdo.: Dra. Marta Molina González

Fdo.: Dr. Rafael Ramírez Uclés

Este trabajo de Tesis Doctoral se ha realizado en el seno del grupo FQM193 “Investigación en Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico y Algebraico” del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía.

A su vez se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación y desarrollo titulado “Proyecto Pensamiento funcional en educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización” (EDU2016-75771-P) del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

La Universidad de Costa Rica otorgó una beca al doctorando para llevar a cabo sus estudios de Maestría y Doctorado en la Universidad de Granada.

A mis padres y hermana por estar siempre a mi lado

y confiar más que nadie en mí.

A usted, chiquillo, por sacar lo mejor de mí, por ser protagonista en esta aventura y acompañarme en el cumplimiento de mis más grandes sueños.

Agradecimientos

Agradezco a Dios-Vida en sus infinitas formas por haberme permitido llegar hasta aquí y darme el regalo de finalizar la tesis en el lugar que más amo de Granada, La Alpujarra.

Es mi más grande placer agradecer a mis directores de tesis, Marta Molina y Rafael Ramírez. Gracias infinitas a ambos por acompañarme con tanta calidez humana durante estos cuatro años, por su paciencia, por instruirme, guiarme y animarme tan sabiamente, y apoyarme en mis decisiones.

Mi más profundo agradecimiento a la Universidad de Costa Rica por respaldarme en la realización de mis estudios de posgrado, particularmente a la Escuela de Matemática.

Gracias a la Universidad de Granada, la oportunidad de continuar formándome en una institución con casi cinco siglos de historia es un gran honor. Gracias al Departamento de Didáctica de la Matemática. Agradezco al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, particularmente al grupo PenFu, por permitirme ser un miembro más. Ha sido una oportunidad invaluable, gracias a cada uno de sus miembros, ahora los vínculos se han extendido aún más. Gracias especiales María C. Cañadas por ser parte de nuestro grupo de trabajo y compartirnos su experiencia y conocimiento.

Muchas gracias a mi familia y amigos de Costa Rica, su apoyo ha sido fundamental en este proceso. Gracias especialmente a mi madre por alentarme a diario e inspirarme.

Gracias a mi gran familia “granaína”. A mis compañeros de máster, a mi pequeña comunidad de ticos, a mi querida Carmen Gloria, a todos aquellos que compartieron conmigo tiempo o una sonrisa durante el posgrado. Gracias de corazón a la familia Alonso, a quienes he considerado mi familia en Granada, especialmente a Calio, sin usted esta aventura no habría tenido el mismo color. Gracias a los amigos tan bellos que con su particular y especial personalidad hicieron que mis días fueran aún mejores.

Índice de contenidos

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

En esta tesis doctoral se presenta una investigación, organizada en tres estudios, que tiene por objetivo explorar y describir las estrategias y manifestaciones de generalización de estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria al resolver tareas de generalización en las que hay implícitas relaciones funcionales. Indagamos en cómo los estudiantes representan la generalización y qué estrategias utilizan al resolver las tareas. Para algunos alumnos[1] de primaria también indagamos en cómo la mediación docente les ayuda a generalizar.

En consecuencia, parte de nuestra investigación se desarrolla dentro de la propuesta *early algebra* que, partiendo de una concepción amplia del álgebra, recomienda su integración en el currículo desde los primeros niveles escolares. Complementariamente trabajamos con estudiantes que inician su formación algebraica en los primeros cursos de secundaria, con el interés de comparar sus producciones dadas sus diferentes experiencias educativas y la formación algebraica recibida.

El sentido de variabilidad y la relación entre variables, la generalización y su representación sobresalen en la literatura como elementos clave en el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos (Kaput, 2008; Kieran et al., 2016; Radford, 2018)[2]. Especialmente el enfoque funcional del álgebra se consolida como un contexto de abordaje del álgebra escolar a través de la generalización y representación de relaciones entre cantidades que covarían, así como el razonamiento con las mismas

---

[1] En esta tesis se emplea el masculino gramatical de forma inclusiva para referirse a colectivos que agrupen hombres y mujeres, o a personas cuyo sexo se desconozca. De este modo seguimos las recomendaciones de la Real Academia Española en el artículo *Sexismo lingüístico y visibilidad de la mujer*.

[2] En las citas y referencias hemos seguido los lineamientos de APA en su séptima edición (American Psychological Association, 2020).

(Blanton et al., 2011). Este constituye el enfoque y contexto en que se desarrolla nuestra investigación.

Consideramos la generalización como esencia o raíz del álgebra y la expresión de la generalización como parte fundamental del pensamiento algebraico (Kaput, 2008). En este marco de investigación atendemos a tres temáticas: las representaciones de la generalización, las estrategias y la mediación docente. Denominamos representaciones de generalización[3] a las formas en que la generalización es puesta de manifiesto y es expresada. Partimos de que el pensamiento algebraico y la generalización se exhiben mediante una variedad de representaciones (e.g., lenguaje verbal, gráficos, representaciones simbólicas) (e.g., Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2008; Carraher et al., 2008), combinaciones de estas y también de otros sistemas semióticos como el gestual (Radford, 2018). Las estrategias son la segunda temática en la que nos hemos enfocado. Desde finales de los noventa los procesos sobre los cuales los estudiantes construyen y desarrollan generalizaciones han recibido una atención reducida en la investigación (García-Cruz y Martinón, 1997). A su vez, diversos estudios reflejan una extendida dificultad de estudiantes tanto de primaria como de secundaria para utilizar estrategias adecuadas para generalizar (e.g., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Siguiendo estas ideas, el estudio de estrategias para generalizar, particularmente en contextos funcionales, constituyen una temática que requiere ser reforzada desde la investigación. Por último, como tercera temática, atendemos a las acciones o intervenciones docentes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y especialmente en la promoción y desarrollo del pensamiento algebraico. A pesar de la importancia que

[3] En esta tesis usamos de forma indistinta los términos “representación de generalización” y “representación de la generalización” para referir a lo mismo.

pueden tener dichas intervenciones en contextos matemáticos, es reducida la literatura que se ha enfocado en estas como informa Leiß y Wiegand (2005). Es aún menor la cantidad de trabajos que se relacionan con la generalización o que se desarrollan bajo el enfoque funcional del álgebra.

La investigación recogida en esta memoria es cualitativa, de carácter descriptivo y exploratorio. El primer estudio se lleva a cabo con 8 estudiantes de cuarto curso de primaria (9-10 años) que participan en una entrevista individual en el contexto de un experimento de enseñanza. En el segundo y tercer estudio interviene un total de 313 estudiantes (de 11 a 13 años): 33 de sexto curso de primaria, 167 de primer curso de secundaria y 113 de segundo curso de secundaria quienes resuelven un cuestionario como prueba de acceso a un programa de estímulo del talento matemático. De dicho cuestionario analizamos las respuestas a la primera de las situaciones propuestas, compuesta por dos tareas relacionadas. En el segundo estudio analizamos las producciones de los estudiantes de sexto curso a ambas tareas y en el tercer estudio las respuestas de todos los estudiantes participantes a la primera tarea.

Los resultados de la investigación reflejan variedad de representaciones de generalización en contextos funcionales (numérica, genérica, verbal, simbólica y múltiple) y matices en su empleo dependiendo del curso de los estudiantes y el valor específico o indeterminado del caso al que dan respuesta, constituyendo este un aporte de la investigación. Esta variedad de representaciones pone de manifiesto el potencial y pensamiento algebraico de estudiantes de primaria y de alumnos en los primeros cursos de secundaria. Asimismo, los resultados sugieren que la mediación docente (efectuada por una entrevistadora) constituyó un apoyo para que los estudiantes del primer estudio hicieran explícitos sus razonamientos y generalizaciones, en comparación con los otros cursos donde resuelven las tareas de forma individual. La presentación, definición y reconocimiento de mediaciones que han contribuido a los estudiantes a generalizar (estudio 1) constituye otro de los aportes del trabajo.

Se reconoce, en general, un mejor desenvolvimiento de los alumnos en los casos que involucran valores específicos cercanos, que en lejanos o cuando implican indeterminaciones, donde pocos generalizan y la mayoría no responde (estudio 2 y estudio 3). Otro resultado que destaca es la dificultad de algunos estudiantes para coordinar con precisión las representaciones de generalización con la relación funcional que utilizan. Estos hallazgos nos hacen suponer una reducida experiencia de los estudiantes de los distintos cursos con tareas de generalización y con prácticas que favorecen la expresión clara y ordenada de sus razonamientos.

Por otro lado, la exposición de la diversidad de estrategias que emplearon los estudiantes para resolver las tareas y la profundización en la descripción de las que se relacionaron con las manifestaciones de la generalización, es otra de las contribuciones de este trabajo. El uso de las estrategias dependió de la naturaleza del valor involucrado. Entre todas las estrategias (e.g., conteo, operatorias, proporcionalidad) sobresalió la correspondencia (i.e. estrategia funcional de correspondencia) por ser la estrategia más ampliamente utilizada cuando generalizaron. Los estudiantes fueron flexibles cambiando a esta estrategia al pasar de casos específicos a generales. Ellos utilizaron distintas estructuras de relaciones funcionales, siendo más diversas y complejas las utilizadas y representadas por los estudiantes de secundaria.

Presentación

El trabajo que presentamos en esta memoria conforma la Tesis Doctoral del autor como parte del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, para la obtención del título de Doctor. La investigación se inicia en el curso 2017/2018. El año previo, en el Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, el autor de esta tesis realizó el Trabajo de Fin de Máster titulado "Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra relaciones funcionales". Este trabajo constituye el principio de los tres estudios que desarrollamos en este escrito.

La investigación que se describe aquí se contextualiza en el enfoque funcional del álgebra. Este sobresale como un abordaje de aproximación y desarrollo del pensamiento algebraico y como un espacio para su estudio, especialmente en relación con la generalización. El objetivo general que nos proponemos es explorar y describir las estrategias y manifestaciones de generalización de estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria al resolver tareas de generalización en las que hay implícitas relaciones funcionales. Por medio de tres estudios, y en el marco de un proyecto de investigación más amplio, indagamos en las formas en las que estudiantes de primaria y secundaria representan la generalización y las estrategias que utilizan al resolver las tareas de generalización. La mediación docente y cómo esta ayuda a los estudiantes a generalizar también es objeto de análisis en uno de los estudios realizados.

Parte de la investigación se desarrolla dentro del *early algebra*, contribuyendo a una propuesta curricular y una línea de investigación actual, pertinente y en desarrollo. Sin embargo, no nos quedamos ahí, ya que también trabajamos con estudiantes en los primeros cursos de secundaria, quienes acaban de empezar su formación algebraica formal. De este modo desde el planteamiento del trabajo con diversos grupos de estudiantes y mediante los hallazgos que obtenemos, se enriquece el acervo investigativo en relación con el pensamiento algebraico.

Estructura del documento

La memoria de esta tesis se organiza en seis capítulos. En el Capítulo 1 exponemos la justificación de la investigación y la importancia de abordar dentro del enfoque funcional las tres temáticas que consideramos: (a) las representaciones de generalización, (b) las estrategias en tareas funcionales de generalización y que conducen a generalizar y (c) la ayuda de la mediación docente para representar la generalización. La justificación se presenta desde la literatura de investigación y desde el currículo escolar de varios países. Finalizamos este capítulo con los objetivos que orientan el trabajo.

El Capítulo 2 comprende los fundamentos teóricos de la tesis. En este describimos las temáticas que sustentan el trabajo: (a) álgebra y *early algebra*, donde se profundiza en el pensamiento algebraico, el pensamiento funcional, la generalización y las representaciones, (b) las estrategias y (c) la mediación docente.

En el Capítulo 3 presentamos los principales antecedentes de la investigación realizada. Para ellos describimos estudios relacionados con nuestras temáticas de interés.

La metodología que sigue la investigación se describe en el Capítulo 4. Aquí se expone el paradigma de investigación adoptado y se especifica la estructura de la investigación en tres estudios, los objetivos que cada uno sigue y sus respectivos elementos metodológicos (descripción del contexto, participantes, técnica de recolección de información, diseño de las tareas y el análisis de los datos).

El Capítulo 5 abarca los tres estudios realizados, presentado cada uno en formato artículo, habiendo sido publicados a fecha de cierre de esta tesis el primero de estos.

Finalmente, en el Capítulo 6 mostramos las conclusiones generales del trabajo desarrollado, tanto dentro de cada uno de los estudios como relacionándolos entre sí, dando respuesta a los objetivos de investigación planteados. Los principales aportes de la investigación también son destacados junto con posibles implicaciones para la instrucción. Finalmente describimos algunas limitaciones del trabajo y posibles líneas futuras de investigación.

Capítulo 1. Justificación y objetivos de investigación

En este primer capítulo recogemos los principales fundamentos que justifican la investigación que realizamos y presentamos los objetivos de investigación que la definen. Estructuramos la justificación en dos apartados según referimos a la investigación o al currículo escolar.

1.1. Justificación desde la investigación

En Educación Matemática, en la actualidad, el álgebra escolar sobresale como un campo de investigación productivo (e.g., Radford, 2018; Warren et al., 2016). La identificación de factores que ocasionan dificultades a los estudiantes en el aprendizaje del álgebra (e.g., la postergación histórica de la enseñanza del álgebra hasta la escuela media o secundaria, la transición abrupta entre el aprendizaje aritmético en primaria al aprendizaje algebraico en secundaria, el énfasis algebraico en procedimientos) ha motivado propuestas para el abordaje de la enseñanza del álgebra de forma más eficiente y significativa desde los primeros cursos escolares (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2005; McEldoon y Rittle-Johnson, 2010; Molina, 2009; Stephens, Ellis et al., 2017; Warren, 2005; Warren et al., 2016).

La investigación en álgebra escolar antes de los años noventa se centraba más en lo que los estudiantes no podían hacer que en la exploración de su potencial (Molina, 2009). Sin embargo, hoy en día la investigación en el pensamiento algebraico desde edades tempranas, mediante la propuesta del *early algebra*, despunta como un campo fértil de estudio y relevante por el amplio enfoque que se le está dando (Cañadas et al., 2019). Este campo se ha estado asentando durante los últimos treinta años, aportando teoría y resultados que revelan la necesidad de romper con la tradición que opone la aritmética y el álgebra (Kieran et al., 2016; Wilhelmi, 2017), para sugerir un currículo integrador con el álgebra como uno de sus hilos conductores principales desde los primeros niveles escolares (Kaput, 2008).

La generalización, su representación, el sentido de variabilidad y la relación que se puede establecer entre variables destacan en los estudios como elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Kaput, 2008; Kieran et al., 2016; Radford, 2018; Warren et al., 2016). El enfoque funcional del álgebra se consolida como una opción para abordar la enseñanza de álgebra por medio de la generalización y la representación de relaciones entre cantidades covariantes así como el razonamiento con estas (Blanton y Kaput, 2011; Blanton et al., 2011). Estas dimensiones del pensamiento algebraico han ido ganando terreno en la investigación, confirmando su relevancia y vigencia entre los investigadores como se refleja, en particular, en los trabajos presentados en distintos congresos, entre estos, el Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM) o el *Psychology of Mathematics Education* (PME) con gran trayectoria y reconocimiento internacional (Hitt y González-Martín, 2016; Warren et al., 2016).

El trabajo recogido en esta memoria de tesis se enmarca en dicha línea de investigación, en actual crecimiento, sobre el estudio del pensamiento algebraico en contextos funcionales tanto de estudiantes de primaria como de los primeros cursos de secundaria. El contenido focal en el que nos centramos es la generalización como componente esencial del álgebra. En este marco atendemos a tres temáticas: las representaciones de generalización, las estrategias y la mediación docente.

Utilizamos el término representaciones de generalización para referir a las formas en que la generalización es puesta de manifiesto y expresada. Partimos de que el pensamiento algebraico y la generalización se exhiben mediante una variedad de representaciones (e.g., lenguaje verbal, gráficos, representaciones simbólicas) (e.g., Kaput, 2008; Blanton y Kaput, 2005; Carraher et al., 2008), combinaciones de estas y también de otros sistemas semióticos como el gestual (Radford, 2018). Según Mason et al. (2005), “los aprendices solo comprenderán el álgebra como un lenguaje de expresión si ellos perciben y expresan la generalidad por sí mismos” (p.23). En este sentido a través de la expresión de la generalidad por parte de los estudiantes se puede obtener información sobre su potencial, comprensión y capacidades algebraicas. Es cierto que investigaciones desarrolladas en contextos funcionales con estudiantes de diversos cursos de primaria, evidencian que estos pueden identificar variables, progresar en el uso de representaciones conforme avanzan en su formación escolar, así como generalizar y representar relaciones funcionales, cuando reciben instrucción (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008; Warren y Cooper, 2005). Sin embargo, en ausencia de instrucción explícita en el empleo de representaciones o el trabajo con funciones, resulta de interés profundizar en cómo los alumnos expresan implícita o explícitamente las relaciones funcionales que reconocen entre las cantidades variables implicadas en tareas de generalización, tanto cuando las variables asumen un valor específico como indeterminado. Este acercamiento constituye un aporte de la investigación en cuanto se enfoca en cómo se puede representar la generalización de relaciones funcionales y no solo en las representaciones o la generalización de forma separada. Para indagar en este sentido consideramos tareas organizadas de forma inductiva (i.e. parten desde casos particulares[4] a casos generales).

[4] En las tareas que involucran relaciones funcionales asumimos los términos “caso particular” y “caso específico” como equivalentes, entendiendo que refieren a casos en los que la variable independiente toma un valor numérico específico.

Por otro lado, retomamos que tradicionalmente los estudiantes son introducidos al álgebra formal en la escuela secundaria (Blanton y Kaput, 2011; Cañadas et al., 2016). En España se espera que los alumnos desarrollen algunas competencias algebraicas durante la escuela primara para ser luego introducidos al álgebra formal (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a, 2014b). En este sentido, también nos resulta de interés estudiar y comparar las representaciones de la generalización de estudiantes de diferentes cursos para contrastar la influencia de las experiencias educativas y la formación algebraica recibida.

La segunda temática de investigación abordada en este trabajo son las estrategias que emplean los estudiantes en contextos funcionales (e.g., Merino et al., 2013; Morales et al., 2018). Desde finales del siglo pasado García-Cruz y Martinón (1997) apuntan que en la investigación se ha puesto poca atención a los procesos sobre los cuales los estudiantes construyen y desarrollan generalizaciones. Más recientemente Lepak et al. (2018) reflexionan que la formación de los estudiantes tiende a girar en torno a una constante evaluación enfocada en las respuestas correctas y los resultados y, no tanto, con respecto a las estrategias que emplean, a pesar de la información que estas brindan sobre la comprensión matemática de los estudiantes. Diversas investigaciones muestran una extendida dificultad tanto en primaria como en secundaria para emplear estrategias adecuadas para generalizar (e.g., Akkan, 2013; Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Hay evidencias de que los estudiantes tienen limitaciones para identificar y justificar las relaciones funcionales subyacentes en situaciones, debido en parte a las estrategias que emplean (Moss y Beatty, 2006). Desde lo expuesto, las estrategias para generalizar en contextos funcionales utilizadas por estudiantes de primaria y secundaria despuntan como un área que requiere ser más estudiada. A esta buscamos contribuir por medio de la investigación realizada.

La tercera temática considerada en esta investigación abarca la contribución de la mediación docente en la representación de la generalización por parte de los estudiantes. Reconocemos que las intervenciones y acciones que efectúan los docentes constituyen un elemento fundamental en el desarrollo del aprendizaje de los alumnos y la promoción del razonamiento y, en consecuencia, de la generalización. Investigaciones describen intervenciones docentes explícitas que contribuyen a los estudiantes a generalizar (e.g., Cusi y Sabena, 2020; Mata-Pereira y da Ponte, 2017; Warren, 2005, 2006). Otras más bien revelan implícitamente algunas acciones docentes que orientan a los estudiantes durante la resolución de las tareas funcionales de generalización (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2008; Morales et al., 2018). También algunos trabajos estudian y describen más ampliamente intervenciones docentes que facilitan el aprendizaje de la matemática (e.g., Dekker y Elshout-Mohr, 2004; Leiß y Wiegand, 2005). Sin embargo, a pesar de su relevancia, los trabajos que tienen las intervenciones docentes en espacios matemáticos como foco de estudio son reducidos, como reconocen Leiß y Wiegand (2005). Aún menor es la cantidad de estas investigaciones que se delimitan a la generalización o que se desarrollan en contextos funcionales. Identificamos así en esta tercera temática una contribución al conjunto de investigaciones sobre pensamiento algebraico y funcional.

1.2. Justificación desde el currículo escolar

La perspectiva actual que recomienda el abordaje del álgebra como un hilo que recorre la formación matemática de los estudiantes desde primaria y que se defiende desde la investigación en Educación Matemática se recoge en los programas curriculares de matemática de diversos países, entre estos, Australia (*Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* [ACARA], 2015), Canadá (*Ontario Ministry of Education and*

Training, 2005), Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2012), Costa Rica (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica [MEP], 2012), España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a), Estados Unidos (*Common Core State Standards Initiative* [CCSSI], 2010; *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2000) y Singapur (*Ministry of Education Singapore*, 2012). La generalización, así como el estudio de patrones[5] y de relaciones (funcionales) destacan como elementos fundamentales del álgebra. Estos son base para el posterior abordaje del álgebra formal en secundaria.

Para describir los componentes algebraicos fundamentales que se abordan en diversas propuestas curriculares, a continuación profundizamos en el programa escolar de Estados Unidos por ser pionero en la introducción del álgebra desde los primeros cursos escolares (CCSSI, 2010; NCTM, 2000), España que es el país donde se desarrollan los estudios que llevamos a cabo (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a) y Costa Rica (MEP, 2012). Mencionamos este tercer país porque recientemente se llevaron a cabo reformas curriculares que comprenden la introducción de contenidos algebraicos desde el inicio de la escolarización de los alumnos. Además, hay un interés personal ya que de allí procedo y parte de mi motivación en la realización de esta tesis involucra el cuestionamiento sobre cómo puede ser implementada la citada reforma.

En Estados Unidos, NCTM (2000) propone una serie de principios y estándares curriculares para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Estos estándares constituyen un referente nacional e internacional al proponer la introducción de fundamentos algebraicos desde que los alumnos inician su formación educativa. Destaca que el estándar de álgebra “se centra en las relaciones entre cantidades, incluyendo las

[5] En esta tesis hacemos uso del término patrón para referir a una regularidad asociada a la idea de repetición (Castro, 1995).

funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis de cambio" (p. 37). Se desprende que el estudio del álgebra va más allá de su raíz histórica centrada en métodos de resolución de ecuaciones o de la creencia popular que equipara el álgebra con la manipulación de simbolismo. A la vez aclara que, aunque el simbolismo algebraico es una componente fundamental del álgebra, no es el único medio para expresar el álgebra o las relaciones funcionales.

Según plantea NCTM (2000), la propuesta del álgebra como un hilo curricular desde primaria podría contribuir a la construcción de bases algebraicas sólidas. Esta formación se traduciría en la preparación del estudiante para una comprensión profunda del álgebra en secundaria. Los patrones se entienden como un medio para introducir a los alumnos al álgebra a través de la descripción de los mismos, la predicción de sus términos, el empleo, manipulación y representación de las variables y de las relaciones entre estas, el uso de expresiones algebraicas y el progreso en la utilización, comprensión y relación entre representaciones que posteriormente en secundaria puedan ser empleadas con significado para describir las relaciones (i.e. funciones).

Más recientemente el *Council of Chief State School Officers* plantean los *Common Core* (CCSSI, 2010) como estándares matemáticos educativos a nivel estatal durante toda la formación de los alumnos. Entre estos destacamos la modelización por medio de la matemática, la búsqueda, identificación y uso de estructuras (o patrones) y la búsqueda y expresión de regularidades. En estos estándares el álgebra es un componente central de la formación matemática de los estudiantes desde primaria. El pensamiento algebraico es abordado progresivamente mediante el trabajo con números y las operaciones aritméticas, patrones y relaciones, la manipulación de expresiones algebraicas y la resolución de problemas como un contenido transversal.

En España, el Real Decreto 126/2014 plantea los lineamientos curriculares para la educación primaria. En estos sobresalen la modelización y el establecimiento de relaciones y estructuras que conlleven fundamentalmente encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas como funciones de la matemática. Este currículo plantea y persigue como uno de sus propósitos primordiales que el estudiante al finalizar la primaria "sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a, p.33). Así mismo, desde el inicio de la secundaria se espera que los estudiantes reconozcan regularidades, generalicen resultados o propiedades matemáticas y usen simbolismo algebraico para expresar relaciones y resolver problemas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014b). En este sentido resulta clara la importancia que se da a elementos propios de la generalización y el pensamiento algebraico relacionados con la identificación de patrones y el establecimiento y formulación de relaciones funcionales entre cantidades variantes.

Otros países han llevado a cabo también reformas curriculares recientes en esta línea (e.g., MEP, 2012; Ministerio de Educación de Chile, 2012). En sus currículos actuales se propone la introducción de contenidos algebraicos en primaria como preámbulo al aprendizaje formal-tradicional del álgebra en secundaria. En Costa Rica en el año 2012 el Ministerio de Educación Pública plantea las relaciones y el álgebra como una de las áreas medulares del programa de estudios que se implementa en la actualidad. En relación a esta área, precisa:

> Se favorece un tratamiento 'funcional' de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo, las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación

> en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de forma gradual. (MEP, 2012, p.54)

Desde primaria organiza la introducción del pensamiento funcional desde el álgebra y ligado con los otros bloques de contenidos matemáticos (e.g., Estadística y Probabilidad, Números). Como en los currículos de los países mencionados previamente, la búsqueda de patrones destaca como un medio de introducción al álgebra y al pensamiento funcional. Se promueven el desarrollo progresivo de las habilidades de reconocimiento, descripción de patrones (e.g., numéricos, geométricos, pictóricos), comprensión de cambios, expresión de regularidades, comprensión y uso de representaciones diversas y planteamiento y representación de relaciones entre variables.

En lo que respecta a la etapa de educación secundaria es conocido que el álgebra forma parte de uno de los bloques de contenido básicos del currículo tanto en el caso de España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014b) como en otros países (e.g., Estados Unidos (CCSSI, 2010; NCTM, 2000), Costa Rica (MEP, 2012)), incluyendo contenidos mínimos tales como las expresiones algebraicas (e.g., polinomios), las ecuaciones y sistemas de ecuaciones a aplicar en el contexto de la resolución de problemas, entre otros. Las funciones también están presentes en el planteamiento de relaciones entre variables que describen situaciones diversas y su representación por medio de simbolismo algebraico. Estas se estudian con mayor profundidad a través de contenidos específicos, entre estos, definición, características, tipos de funciones (e.g., polinomiales, exponenciales) y formas de representarlas (e.g., tablas, gráficas, expresión simbólica algebraica).

Desde la descripción de los programas curriculares expuestos evidenciamos no sólo la importancia que se da actualmente al desarrollo de las habilidades algebraicas de los estudiantes a lo largo de los cursos, sino que mostramos también elementos esenciales del álgebra que merecen atención. Entre estos elementos destacan los patrones, la identificación de regularidades y su generalización, las representaciones, la variabilidad y la descripción y expresión de relaciones funcionales entre cantidades variantes. Por su relevancia, estos elementos se han convertido a su vez en focos de investigación en los últimos años como se ha mencionado en el apartado 1.1 y argumentamos más extensamente en el Capítulo 3 de Antecedentes.

1.3. Objetivos de investigación

En esta tesis doctoral nos proponemos indagar en la generalización como habilidad matemática fundamental y componente esencial del álgebra desde el contexto del enfoque funcional. El objetivo general que unifica los tres estudios realizados es explorar y describir las estrategias y manifestaciones de generalización de estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria al resolver tareas de generalización en las que hay implícitas relaciones funcionales (en adelante tareas funcionales de generalización).

Desglosamos el objetivo general en los siguientes objetivos específicos:

O1. Describir las representaciones de generalización manifestadas por estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria en la resolución de tareas funcionales de generalización.

O2. Describir las estrategias que emplean estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria para resolver tareas funcionales de generalización.

O3. Identificar las estrategias que permiten a estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria generalizar relaciones implícitas en tareas funcionales de generalización.

O4. Analizar cómo la mediación docente del entrevistador ayuda a estudiantes de primaria a generalizar y representar la generalización de la relación involucrada en una tarea funcional de generalización.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo presentamos las bases teóricas de la investigación recogida en esta memoria doctoral. En primer lugar, centramos la atención en el álgebra y la reciente propuesta curricular *early algebra*. En relación con ambos describimos el pensamiento algebraico y el pensamiento funcional, este último como centro del enfoque del algebra escolar en el que se enmarca cada uno de los estudios que desarrollamos. También profundizamos en la generalización como la esencia de la matemática en general y del álgebra en particular, exponemos algunas de sus concepciones y su respectiva contextualización dentro del enfoque funcional del álgebra. Finalmente caracterizamos las representaciones dado que su uso es parte fundamental del pensamiento algebraico. Los últimos apartados comprenden la noción de estrategia de resolución que utilizan los estudiantes en contextos matemáticos y la mediación docente como elemento que puede intervenir en los procesos de generalización de los alumnos.

2.1. Álgebra y *early algebra*

En las últimas décadas se ha dado una intensa reflexión sobre el modo en que el álgebra es enseñada y los cursos escolares en los que se aborda su enseñanza. Tradicionalmente la enseñanza del álgebra ha sido abordada en la educación secundaria, centrada en contenidos como el uso y representación de variables o en aspectos transformacionales como la simplificación de expresiones algebraicas o la resolución de ecuaciones diversas (e.g., Blanton et al., 2011; Kaput, 1999; Kieran, 1989) de forma ajena a la realidad y desconectada de otros conocimientos matemáticos (Kaput, 1999).

En cambio, en la actualidad se fomenta la introducción del álgebra como un hilo de contenido que recorre todo el currículo escolar (Blanton et al., 2015). En lo que respecta a los primeros niveles escolares, la propuesta curricular *early algebra* plantea la introducción del aprendizaje del álgebra y la promoción y fortalecimiento del pensamiento algebraico (Molina, 2009).

Esta propuesta se ha motivado y nutrido por el cuestionamiento y abordaje de diversos elementos. Entre estos están la enseñanza tradicional del álgebra como tema aislado y postergado hasta la escuela secundaria (e.g., Blanton et al., 2011; Kaput, 1999), la organización curricular tradicional donde primero se enseñan contenidos aritméticos antes de introducir los algebraicos (Kaput, 2008; Radford, 2018), la creencia de la necesidad de cierto nivel de abstracción que sólo se ha alcanzado en secundaria (Blanton et al., 2015) y las dificultades algebraicas que históricamente han enfrentado los estudiantes en secundaria (e.g., comprensión de la sintaxis algebraica, significado de letras, el reconocimiento de estructuras) (e.g., Kaput, 2008; Kieran, 1989). Otras razones que sustentan la propuesta son el desarrollo de concepciones más amplias del álgebra que no se restringen al uso de simbolismo algebraico (e.g., Kaput, 2008, Molina, 2009; Radford, 2018) y las demandas del nuevo siglo que sugieren cultivar hábitos mentales que contemplen la profunda estructura que subyace en la matemática (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2008). A su vez, esta propuesta y su implementación se ha fortalecido por las evidencias del potencial algebraico que poseen los estudiantes desde la escuela primaria (Cañadas y Molina, 2016).

El *early algebra*, lejos de entenderse como la introducción temprana de contenido algebraico (Carraher y Schliemann, 2007), propone fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico ofreciendo una oportunidad de formación matemática más profunda y compleja desde el inicio de la escolarización de los estudiantes (Blanton y Kaput, 2005; Cañadas y Molina, 2016; Molina, 2009). El propósito es generar mejores bases algebraicas y evitar las dificultades que suelen enfrentar los estudiantes en cursos superiores (Kilpatrick et al., 2001). El álgebra se aborda como forma de razonamiento y actuación con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas orientadas a la comprensión de la matemática (Molina, 2006).

El énfasis del *early algebra*, está en la generalización de ideas matemáticas y la representación, justificación y razonamiento con esas generalizaciones (Bastable y Schifter, 2008; Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

Esta propuesta asume la multidimensionalidad del álgebra. Se reconocen variedad de concepciones del álgebra escolar o enfoques desde las cuales puede ser abordada su enseñanza (e.g., Bednarz et al., 1996; Kaput, 2008; Usiskin, 1988). Estos enfoques no son disjuntos e incluso relacionan áreas del currículo de matemática. Entre estos están, por ejemplo, el enfoque de aritmética generalizada, el enfoque de resolución de problemas o el enfoque funcional. Particularmente, en el contexto algebraico cuando el énfasis son las funciones, se trabaja dentro del enfoque funcional del álgebra escolar (Cañadas y Molina, 2016). En los siguientes apartados profundizamos en este enfoque, contexto de nuestros estudios.

2.1.1. Pensamiento algebraico

La tradición ha tendido a asociar el álgebra con el estudio y uso de simbología algebraica, el manejo y uso de expresiones, resolución de ecuaciones y tópicos similares que suelen ser abordados después de la escuela primaria (Blanton, 2008; Smith, 2011). Sin embargo, como hemos mencionado la visión actual es menos restrictiva. Así se pone también de manifiesto en las diferentes definiciones de pensamiento algebraico que encontramos en la literatura.

No existe acuerdo en una definición de pensamiento algebraico, pero las diferentes concepciones se complementan entre sí resaltando elementos fundamentales del álgebra.

Desde la posición de Kaput (2008), el álgebra es una creación cultural que evoluciona en su sistema de símbolos, lo que hace que deba estudiarse en contextos específicos. Para él el pensamiento algebraico se entiende como una actividad humana que refiere a las formas de pensar, hablar y hacer matemática. Desde una perspectiva simbólica, Kaput (2008) planteó que el pensamiento algebraico abarca un proceso complejo de simbolización orientado a manipular y razonar con generalizaciones. Su marco teórico se organiza sobre dos aspectos centrales del álgebra y el pensamiento algebraico, que su vez se concretan en tres hilos de contenidos (Figura 2.1).

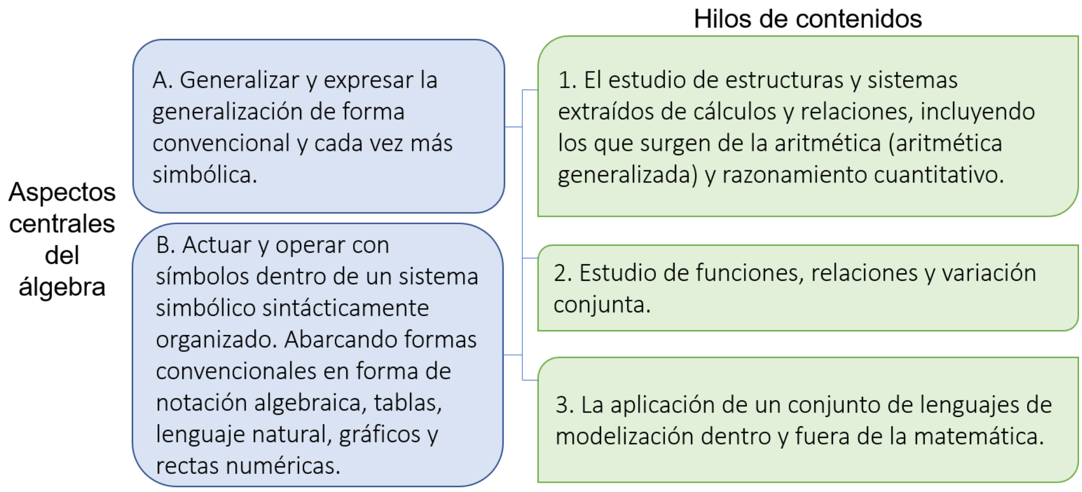


Figura 2.1. Aspectos centrales del álgebra y sus hilos de contenidos (Kaput, 2008)

Complementariamente, Blanton et al. (2011) reconocen cuatro prácticas esenciales en el álgebra escolar vinculadas con los aspectos centrales del álgebra propuestos por Kaput (2008): a) generalizar, b) representar, c) justificar y d) razonar, con relaciones y estructuras matemáticas. Pinto (2019) evidencia una relación que se puede establecer entre estas prácticas y los aspectos centrales del álgebra (Kaput, 2008), siendo las prácticas de generalizar y representar la esencia del primer aspecto central del álgebra, y justificar y razonar la base del segundo aspecto central.

Warren et al. (2016), por otro lado, afirma que en toda actividad algebraica, como puede ser la generalización, destacan dos elementos fundamentales que son pilares del pensamiento algebraico: las variables como objetos abstractos representables de formas diferentes y el sentido de estructura del álgebra. Drijvers et al. (2011) también resalta que el proceso de descubrir y representar estructuras vinculadas con patrones constituye una actividad algebraica muy productiva siendo a su vez un medio para generalizar. Desde un abordaje amplio, Mason et al. (2009) refieren a las estructuras como la identificación de las propiedades que se pueden extraer de situaciones particulares. Esto implica reconocer y usar relaciones entre elementos para describir dichas propiedades. Entre los elementos están, por ejemplo, las relaciones funcionales entre conjuntos. Concretamente en el ámbito del álgebra escolar, Molina y Cañadas (2018) reconocen que la noción de estructura está presente, con diferentes acepciones, en todos los enfoques desde los que se aborda (e.g., enfoque funcional, aritmética generalizada).

Desde la perspectiva de Radford (2018) el pensamiento algebraico está asociado a (a) cantidades indeterminadas, y (b) representaciones/simbolizaciones idiosincráticas o culturalmente evolucionadas de estas cantidades y sus operaciones, a la vez que trata con (c) estas cantidades indeterminadas de forma analítica. Bajo su perspectiva, el pensamiento algebraico recae en comprender, representar y operar con cantidades en su condición de indeterminación (e.g., como variables, parámetros, valores desconocidos). Dado el componente representacional del pensamiento algebraico, reconoce que el simbolismo algebraico convencional no es el único recurso por medio del cual se manifiesta el pensamiento algebraico, aunque es cierto que ofrece ventajas para representar y operar. Así, el pensamiento algebraico también puede ser expresado por medio de diversos sistemas semióticos, entre estos los gestos o el lenguaje natural (Radford, 2018). El contexto también cumple un rol en el pensamiento algebraico. De acuerdo con Radford (2006) el pensamiento algebraico no es ajeno al contexto en que se busca desarrollar, sino que en este es dónde se construyen socialmente los significados vinculados con él.

En cada una de las perspectivas expuestas, las representaciones, entre estas el simbolismo algebraico, cumplen un papel esencial dentro del pensamiento algebraico. Esto no es de extrañar, puesto que generalizar y representar son actividades fundamentales de este tipo de pensamiento (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Radford, 2018). Smith (2008) expone que el pensamiento algebraico sucede cuando el estudiante crea o adopta una representación para la expresión de la generalización de una relación entre cantidades variantes, como parte del pensamiento funcional (que describimos en el apartado 2.1.2). Sin embargo, es esencial destacar en general que, si bien las cantidades indeterminadas que se involucran en prácticas algebraicas pueden ser representadas por medio de símbolos alfanuméricos (en adelante, simbolismo algebraico), el pensamiento algebraico también puede ser expresado a través de otros sistemas semióticos (Radford, 2018). Kaput (2008) plantea en este sentido que cuando los estudiantes inician su formación algebraica son motivados a identificar y expresar generalizaciones usando sus propios medios para representar, aunque luego son guiados al uso de representaciones convencionales (e.g. simbolismo algebraico, tablas, gráficos, lenguaje natural) para la profundización y enriquecimiento de su pensamiento algebraico. Bajo estos supuestos partimos de la premisa de la existencia de una variedad de representaciones que pueden emplear los estudiantes en la expresión de su pensamiento algebraico.

El trabajo de investigación que desarrollamos y que se reporta en esta tesis se orienta principalmente por los postulados teóricos del pensamiento algebraico de Kaput (2008) y colaboradores (e.g., Blanton et al., 2011). Nos centramos en la generalización y su representación como aspectos centrales del álgebra los cuales abordamos desde el enfoque funcional del álgebra.

2.1.2. Pensamiento funcional

Rico (2007) reconoce al pensamiento funcional como una meta disciplinar fundamental en la instrucción de los alumnos. Lo define como “pensar en términos de y acerca de relaciones” (Rico, 2007, p. 56). En la misma línea Smith (2008) lo conceptualiza como un pensamiento cuyo énfasis está en la relación entre dos (o más) cantidades variables y la generalización de estas relaciones. Por su parte Cañadas y Molina (2016) conciben el pensamiento funcional como un componente del pensamiento algebraico “basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p.211). Las funciones se entienden como vehículo para la promoción del conocimiento y formación algebraica (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2011; Cañadas et al., 2016; Stephens, Ellis et al., 2017).

El pensamiento funcional es un componente fundamental del pensamiento algebraico en cuanto está vinculado al razonamiento, manipulación, justificación, generalización y representación de las relaciones que se establecen entre cantidades covariantes (Blanton et al., 2011; Blanton et al., 2015; Kaput, 2008; Stephens, Ellis et al., 2017; Warren y Cooper, 2005). Implica también razonar con las respectivas representaciones de las relaciones funcionales para analizar el comportamiento de las funciones (Blanton et al., 2011).

A continuación, atendemos al concepto clave al que refiere este tipo de pensamiento: la función.

2.1.2.1. Función

En este apartado exponemos la idea de función desde la que partimos, sin pretender ser exhaustivos en su conceptualización.

En la matemática el concepto de función ha sufrido un largo proceso de transformación. Es en el S. XIX cuando se plantea la definición clásica de función (Shílov, 2004). Desde la teoría de conjuntos la función es concebida como una relación que se establece entre dos conjuntos A (dominio) y B (codominio) (e.g., Doorman y Drijvers, 2011). Freudenthal (1983) define la función como un tipo de dependencia entre dos variables, la independiente y la dependiente, lo que indica que mientras que los valores de una variable varían libremente los valores de la otra dependen de los primeros. Estas concepciones están ligadas a la noción de función de Dirichlet-Bourbaki ampliamente utilizada en la actualidad:

> f es una función de un conjunto a otro, digamos A y B, si f es un subconjunto del producto cartesiano de A (dominio) y B (rango o codominio), tal que para cada $a \in A$ hay exactamente un $b \in B$ con $(a, b) \in f$. (Doorman y Drijvers, 2011, p.121)

En línea con lo anterior, Vinner y Dreyfus (1989) definen una función como una correspondencia (relación de correspondencia) entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto o dominio un único elemento del segundo conjunto o codominio. Desde esta perspectiva una función f también es considerada a su vez como un conjunto de pares ordenados *(a,b)* (e.g., Apostol, 2006; Doorman y Drijvers, 2011; Freudenthal, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989) donde a y b están relacionados. Por otra parte, la función al ser una relación entre los valores de dos conjuntos es denominada también relación funcional (Barrantes, 2001).

Entre la variedad de funciones que suelen ser estudiadas como parte del currículo escolar (e.g., polinomiales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas) (e.g., Barrantes, 2001; Doorman y Drijvers, 2011; Lloyd et al., 2011), nos centramos en las funciones polinomiales lineales al ser las consideradas en la recogida de datos de los estudios realizados. Barrantes (2001) expone que "una función lineal es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = mx + b$, m y b constantes reales" (p.205), donde x refiere a la variable independiente y $f(x)$ la dependiente, tomando estas valores reales. Específicamente en las tareas que resuelven nuestros estudiantes participantes, los valores de m y b así como los valores específicos que toman las variables independiente y dependiente en las relaciones funcionales lineales, son números naturales.

2.1.2.2. Funciones en el pensamiento funcional

Como plantea Carraher et al. (2008) la definición formal de función no contempla elementos propios del pensamiento algebraico y funcional como lo es la generalización e incluye funciones que no pueden ser expresadas mediante una expresión algebraica.

En el contexto del pensamiento funcional, Confrey y Smith (1991) describen dos formas de aproximación a las funciones en el ámbito escolar: correspondencia y covariación. Las mismas distinguen relaciones que se pueden establecer entre la variable independiente y la dependiente. Blanton (2008) y Blanton et al. (2011) mencionan también los patrones recursivos. Es interesante que Stephens, Fonger et al. (2017) refieren a estas aproximaciones como modos de pensamiento funcional. El patrón recursivo se construye atendiendo a la variación de los valores de la variable dependiente que se van obteniendo con base a otros valores de la misma determinados o conocidos previamente. Este tiene varias limitaciones entre ellas: no atiende a la variación de la variable independiente y, por otro lado, para obtener el valor de la función para un valor elevado de la variable independiente es necesario calcular todos los valores previos de la función (Blanton et al., 2011).

La relación de covariación abarca el análisis de cómo el cambio en una variable influye en la otra. La perspectiva covariacional permite comprender la función como covariación de cantidades, siendo precursor de la noción de velocidad de cambio (Blanton et al., 2011).

Por último, la relación de correspondencia establece la relación entre pares de valores correspondientes de la variable independiente y la dependiente. A diferencia de la recursividad o la covariación, la correspondencia engloba un análisis más amplio de la relación entre las variables que permite expresar la regla de la función. Consiste en una relación generalizada entre dos cantidades y facilita, en consecuencia, determinar el valor de la función para cualquier valor de la variable independiente (Blanton et al., 2011). Dicha relación puede ser descrita en términos de su estructura entendida como la organización y expresión de la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017). La estructura refiere a cómo se operan los valores indeterminados o valores numéricos cuando se usa o representa la regularidad.

2.1.3. Generalización

La generalización cumple un rol fundamental en las matemáticas siendo referida como el nervio, corazón o esencia de esta por Mason (Mason, 1996; Mason et al., 1989), Krutetskii (1976) y Dörfler (1991), entre otros autores. Mason et al. (2005) llegan a afirmar que “una clase sin oportunidad para los estudiantes de generalizar matemáticamente, no es una clase de matemática” (p. 1). Krutetskii (1976) y Dörfler (1991) la destacan en paralelo con el proceso de abstracción el cual describen como medio para construir generalizaciones. En la abstracción se extraen mentalmente las propiedades y características (incluyendo relaciones y regularidades) de un grupo de objetos (Dörfler, 1991; Krutetskii, 1976). En la generalización estos rasgos extraídos y separados de los objetos luego son extendidos sobre el conjunto completo de una clase determinada (Krutetskii, 1976).

La generalización también es destacada como la raíz del álgebra (Kaput, 2008; Mason et al., 2005; Smith 2008). Mediante la generalización se establecen relaciones entre los datos en situaciones matemáticas y se identifican estructuras (Blanton et al., 2011).

En lo que sigue precisamos el significado del concepto *generalización* a partir de la distinción de concepciones de este término y atendemos a este concepto en el contexto del enfoque funcional del álgebra.

2.1.3.1. Concepciones de generalización

La literatura de investigación en educación matemática muestra la diversidad de concepciones de la generalización existentes. Estas ponen de manifiesto la aceptación dual de la generalización como proceso y producto de dicho proceso (Harel y Tall, 1991; Stephens, Ellis et al., 2017). En un sentido amplio las definiciones coinciden en que la generalización consiste en el reconocimiento de una regularidad en un conjunto de elementos, la generación e identificación de nuevos casos en los que la generalización aplica y su respectiva expresión.

Pólya (1989) define la generalización como

> Pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado. (p.97)

Según Pólya (1989), generalizar reside en el paso de la identificación de regularidades en casos particulares a más casos que satisfacen el mismo patrón. En este sentido sobresale la inducción como un medio para generalizar (Castro et al., 2010). Pólya (1989) expone la inducción como “un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones” (p.114). De acuerdo con la reflexión de Castro et al. (2010), inducción y razonamiento inductivo suelen ser utilizados con un mismo significado denotando un proceso cognitivo de obtención de reglas que se desprenden de un comportamiento común percibido en algunos casos particulares. Como plantean las investigadoras, este proceso no es exclusivo de la matemática y la ciencia, sino que constituye una habilidad humana.

En conexión con lo anterior, de forma similar Dreyfus (1991) conceptualiza la generalización como el proceso de inducir a partir de casos particulares para identificar similitudes o rasgos comunes y expandir el dominio de validez.

Krutetskii (1976) aporta una caracterización práctica de la generalización al afirmar que:

> Cualquier generalización efectiva en el ámbito del simbolismo numérico y de letras puede ser considerada desde al menos dos aspectos: debe poderse ver una situación similar (dónde aplicarlo) y debe dominarse el tipo generalizado de solución, el esquema generalizado de una prueba o de un argumento (qué aplicar). En cualquier caso, debe abstraerse del contenido específico y señalar lo que es similar, general y esencial en las estructuras de objetos, relaciones u operaciones. (p. 37)

Del planteamiento de Krutetskii (1976) se extrae que el proceso de generalización implica identificar otras situaciones en las que aplica un conocimiento y a la vez conocer cómo y de qué forma se aplica. Requiere una ampliación del alcance de la generalización a otras situaciones que cumplen con propiedades específicas. En la misma línea, Harel y Tall (1991) refieren a la generalización como "el proceso de aplicar un argumento a un contexto más amplio" (p.38). A la vez reconocen que la demanda cognitiva que implica la generalización dependerá del conocimiento del estudiante.

Mitchelmore (2002) al estudiar diversas concepciones de generalización señala relaciones entre la generalización y la abstracción. A partir de esto diferencia tres categorías en las que organiza los significados de generalización:

- Como sinónimo de abstracción. La generalización es el proceso de encontrar y señalar propiedades en un conjunto de elementos similares (en el sentido de Dreyfus, 1991).
- Como extensión de un concepto ya sea a nivel empírico, matemático o como invención matemática. La generalización empírica o generalización expansiva en términos de Harel y Tall (1991), refiere a encontrar otros contextos en los que un concepto aplica. En la generalización matemática o generalización reconstructiva en términos de estos mismos autores, una clase de objetos matemáticos es comprendida dentro de otra. Esto implica que la similitud que relaciona los elementos de la primera clase debe ser reconstruida para que se ajusten a la nueva clase (e.g., el reconocimiento del conjunto de los números enteros como parte del conjunto de números racionales). La invención matemática comprende omitir o cambiar propiedades de un concepto conocido para crear otro más general. Mitchelmore (2002) ejemplifica esta generalización por medio de la invención de la geometría no euclidiana partiendo del cambio del axioma de la paralela.

- Como un teorema que relaciona conceptos existentes. Mitchelmore (2002) afirma que la generalización es una relación entre conceptos abstractos y plantea que para que una generalización sea significativa en términos educativos de enseñanza y aprendizaje, los conceptos que se involucran deben ser abstractos-generales y no abstractos-aparte. Es decir, deben ser conceptos que se abstraen o se extraen a partir de similitudes entre contextos permitiendo el establecimiento de relaciones. Lo ideal es evitar conceptos que existen aparte del contexto en el que se originaron.

Blanton et al. (2011), en el mismo sentido que Kaput (2008), brindan una definición práctica de la generalización en el contexto del álgebra escolar. Conceptualizan la generalización como:

> el proceso por medio del cual identificamos la estructura y relación en situaciones matemáticas […] esta puede referir a la identificación de relaciones entre cantidades que varían una en relación con la otra. También puede significar capturar y expresar la estructura aritmética en las operaciones sobre la base de observaciones repetidas y regulares de cómo se comportan estas operaciones. (p.9)

De esta definición sobresale el reconocimiento de estructuras como parte de la generalización para la descripción y expresión de regularidades que se extraen de distintas situaciones: aritméticas, que involucran relaciones entre cantidades covariantes, o en general de situaciones matemáticas susceptibles de ser generalizadas. Kaput (1999) concibe la generalización como extender el razonamiento más allá de los casos considerados, ya sea explicitando la similitud presente o bien ampliando el razonamiento hacia los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones entre ellos.

Stephens, Ellis et al. (2017) reconocen cambios en la definición de generalización a través de la historia de la investigación en la educación matemática y marcan dos vertientes. Por un lado, está la cognitiva en la que la generalización es aceptada como un constructo individual y cognitivo (e.g. Kaput, 1999) y, por otro, está la sociocultural que caracteriza la generalización con relación a una actividad y contexto. Considerando ambas perspectivas Stephens, Ellis et al. (2017) exponen la generalización tanto como proceso como producto de cualquiera de tres procesos: identificar la regularidad en un conjunto de elementos (e.g., Dreyfus, 1991), razonar más allá de los casos en cuestión (e.g., Harel y Tall, 1991; Radford, 2010) o ampliar los resultados más allá de los casos particulares (e.g., Kaput, 1999).

Radford (2010) entiende la generalización algebraica como la habilidad de identificar la regularidad en una secuencia de elementos, el reconocimiento de su validez y la elaboración de una expresión que los representa. Radford (2001, 2010) define tres estratos de generalización algebraica considerando lo simbólico y presimbólico:

- Generalización factual: aquella en la cual se utilizan acciones numéricas en forma de esquemas de operaciones, siempre dentro del nivel numérico expresado en acciones concretas. Por tanto, no se enuncia lo indeterminado. Este tipo de generalización permite el trabajo con casos específicos sin necesidad del conteo ya que se determina un patrón.

- Generalización contextual: los estudiantes observan un patrón y pueden explicarlo para cualquier figura dentro de la secuencia sin ser esta descrita por un número específico. En este tipo de generalización intervienen los elementos comunicativos y los matemáticos ya que deben existir las explicaciones. Hay un nivel de abstracción mayor que en el tipo de generalización anteriormente descrito y se presta atención al lenguaje utilizado por el estudiante que refleja un nivel de generalidad mediante expresiones específicas de indeterminación (e.g., “la siguiente figura”, “para cualquier número”). Se da una objetivación de un esquema operacional que actúa con la abstracción a pesar de que aún no hay un lenguaje simbólico que da mayor generalidad.

- Generalización simbólica: es la más general, trasciende al objeto o número específico de contextos concretos, se habla en general, hay una representación para todos los elementos de la sucesión o patrón.

Por otro lado, Radford (2010) plantea que existe otro tipo de generalización no algebraica, la aritmética. En este caso, en una sucesión o patrón los estudiantes identifican lo común que han observado en algunas figuras sin la habilidad de extenderlo a otros casos o de usar información que ya han recabado anteriormente ni de brindar una expresión que represente a cada uno de los términos de la secuencia.

Mason y Pimm (1984) no aportan una definición de generalización, pero hacen una distinción útil entre las concepciones de genérico, específico y general cuando se introduce al estudiante en el álgebra y se trabaja con símbolos o letras para representar números. Emplean el término “específico” para referir a casos en los cuales siempre se trabaja bajo la idea de números concretos (i.e. valores específicos). Si se trabaja con expresiones concretas como representantes de una generalidad se habla de casos o ejemplos genéricos. En los casos generales se brinda una respuesta o expresión que se usa para representar a todos los elementos de los que se está hablando; hay una representación de lo indeterminado.

2.1.3.2. Generalización en el contexto funcional

En esta tesis atendemos al concepto de generalización en el marco del enfoque funcional del álgebra. En este contexto adoptamos la definición dada por Blanton et al. (2011): identificar, establecer y expresar en términos generales cómo una cantidad varía con respecto a otra mediante una relación funcional. Desde las concepciones de generalización planteadas anteriormente y en el contexto de nuestros estudios resulta fundamental pasar desde el reconocimiento de una regularidad en casos específicos a más casos que siguen el mismo patrón (Pólya, 1989), para representar a todos los elementos mediante una única expresión (Radford, 2010).

La generalización se desarrolla en un espacio en que, existiendo una dependencia entre cantidades que varían, los estudiantes deben determinar y expresar la regla subyacente en un patrón (Hitt y González-Martín, 2016). En este sentido la generalización se presta a la descripción y representación de las relaciones que se establecen entre cantidades variantes (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

Desde este enfoque funcional del álgebra, sobresale la propuesta de tareas que implican el reconocimiento de una regularidad, la identificación y uso de variables, el desarrollo de expresiones algebraicas y la generalización de patrones como vía de introducción de los estudiantes al álgebra (Lannin et al., 2006; Smith, 2011; Warren, 2005; Warren et al., 2016). Como se aprecia, los patrones se vinculan con las relaciones funcionales cuando se expresan como funciones (Warren, 2005).

En la práctica, una tarea de generalización implica la búsqueda de un patrón o regularidad y a partir de casos particulares generar más o producir una expresión que represente a todos (Merino et al., 2013).

2.1.4. Representaciones

A nivel epistemológico, la noción de comprensión y la de representación están íntimamente ligadas (Rico, 2009). Las representaciones dan cabida a la existencia de dos entidades: un objeto que se desea aprehender y conocer y un sujeto que conoce el objeto (Castro et al., 1997). Las representaciones vienen a ser un vínculo entre ambos (Lupiáñez, 2016).

Por su propia naturaleza, la matemática es considerada como un conjunto de lenguajes. Estos lenguajes tienen dos roles principales, por un lado, comunicar y por otro ser instrumentos de pensamiento (Kaput, 1989). Los lenguajes estarían dados por las representaciones. Estas son esenciales dado el carácter abstracto de los objetos matemáticos. Permiten pensar y expresarnos sobre los mismos, así como resolver problemas. Las representaciones son entonces un elemento fundamental en el aprendizaje para dar sentido y comprender los objetos matemáticos (Rico, 2009).

En la investigación se matizan distintos tipos de representaciones. En un plano general se podrían diferenciar las representaciones internas-mentales y las externas (e.g., Duval, 1993; Kaput, 1989). Las representaciones internas se dan a nivel mental cuando se piensa en ideas matemáticas. Las externas se basan en signos que remiten a los objetos representados, aludiendo a imágenes visuales o formas verbales que plantean el sentido de los objetos (Rico, 2009). Estas representaciones materializan y ejemplifican los objetos matemáticos, sus relaciones y procesos (Kaput, 1989) a la vez que facilitan la expresión de ideas y conceptos (Cañadas y Figueiras, 2011). En esta tesis cada vez que utilizamos el término representaciones nos referimos a representaciones externas.

Asumimos las representaciones matemáticas como herramientas en forma de signos o gráficos específicos, contextualizados y convencionales que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que el sujeto aborda e interactúa con el conocimiento matemático (Rico, 2009). Estas incluyen sistemas de símbolos hablados o escritos, modelos de figuras, imágenes, situaciones del mundo real y modelos manipulativos (Goldin, 1998).

Rico (2009) destaca que las representaciones no agotan los conceptos, sólo exponen algunas de sus propiedades más importantes. Cada una de las representaciones aporta una caracterización del concepto (Molina, 2014), lo cual implica que para conocer un objeto matemático en su complejidad se requiere de una articulación entre representaciones de este (Lupiáñez, 2016; Rico, 2009). Según las características y propiedades de las representaciones, estas pueden ser organizadas en sistemas. Cada sistema "constituye un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de una serie de reglas y convenios que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático y posibilitan su uso para determinadas funciones" (Lupiáñez, 2016, p.120).

El empleo de representaciones constituye un elemento inherente al álgebra (e.g., Blanton et al., 2015; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 1989; Radford, 2018), como hemos destacado en el apartado 2.1.1. Carraher et al. (2008) compara la generalización de una relación funcional con su respectiva expresión por medio de representaciones simbólicas o combinaciones de estas (gráficos, diagramas, lenguaje hablado o simbolismo algebraico). Las representaciones son herramientas para que los estudiantes expresen su comprensión de las funciones. Esta comprensión se enriquece en la medida en que usan variedad de representaciones y comprenden las conexiones entre las mismas (Blanton, 2008). A su vez, las situaciones propuestas a los estudiantes son una oportunidad para emplear representaciones propias y progresar hacia el uso de representaciones convencionales (Carraher et al., 2008).

Partimos de la idea de la multiplicidad de representaciones que pueden ser empleadas en la manifestación de pensamiento algebraico cuyo uso depende de la experiencia y formación de los estudiantes (e.g., Kaput, 2008; Radford, 2018). Particularmente en la expresión de relaciones funcionales las representaciones pueden ir desde el lenguaje natural al simbólico o el empleo de tablas y gráficos (e.g., Blanton, 2008; Blanton et al., 2015; Doorman y Drijvers, 2011; Lloyd et al., 2011; Smith, 2008).

Como cierre de este apartado, destacamos cuatro de los tipos de representaciones más utilizados en el contexto funcional: verbal, simbólica algebraica, tabular y gráfica:

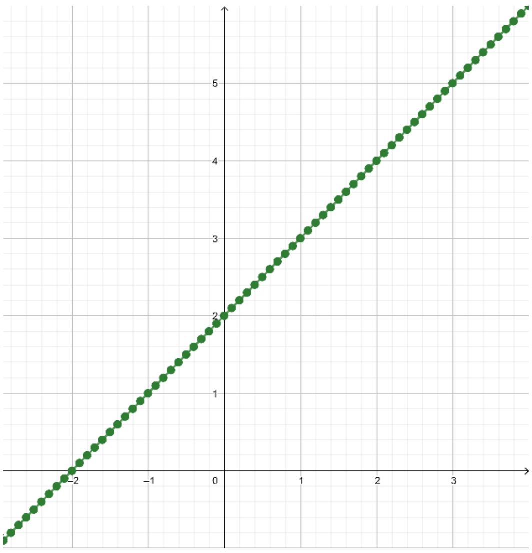
(a) La representación verbal refiere a la expresión por medio del uso del lenguaje natural ya sea de forma oral o escrita (Cañadas y Figueiras, 2011; Molina, 2014). Esta representación está dotada de cierta ambigüedad en cuanto una expresión puede ser interpretada de múltiples formas en función de aspectos tales como la entonación o el uso de deícticos (Molina, 2014).

(b) La representación simbólica algebraica implica el uso del lenguaje algebraico alfanumérico como modo de expresión (letras y operaciones aritméticas) (Cañadas y Figueiras, 2011; Kaput, 1989; Molina, 2014; Rico, 2009), por ejemplo en la expresión $f(x) = x + 2$. Esta representación es caracterizada por su precisión a la vez que facilita representar ideas algebraicas y trabajar con estas sin necesidad del contexto que las genera (Molina, 2014)

(c) La representación tabular comprende la elaboración de tablas para organizar la información de una relación entre dos cantidades (Kaput, 1989; Lupiáñez, 2016). Esta representación permite visualizar en una misma fila los pares de valores relacionados correspondientes a las variables independiente y dependiente, así como los valores propios de cada variable por columnas (Blanton 2008), como mostramos en la Figura 2.2.a.

(d) La representación gráfica consiste en el dibujo sobre el plano cartesiano de todos los pares (x, y) que se relacionan en una función, es decir, plantea visualmente la curva de una función sobre el plano $x - y$ (Kaput, 1989) como se observa en la Figura 2.2.b.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x + 2}$
-1	1
2	4
$\frac{75}{4}$	$\frac{83}{4}$
n	$n + 2$
$\vdots$	$\vdots$



a. Representación tabular

b. Representación gráfica

Figura 2.2. Representación de la función *f(x)=x+2*

2.2. Estrategias

Entendemos por estrategias los procedimientos que permiten dar solución a un problema, obtener conclusiones a partir de un cuerpo de conceptos y establecer relaciones entre estos (Rico, 1997). Las estrategias informan de los razonamientos que los estudiantes aplican y desarrollan durante la resolución de problemas.

La literatura muestra la variedad de estrategias que emplean estudiantes de primaria y primeros cursos de secundaria en la resolución de tareas de generalización (en las que se involucran patrones o funciones). Presentamos primero los tres principales tipos de estrategias (funcionales, recursivas y proporcionalidad directa) por medio de las cuales los estudiantes generalizan según estudios previos y, posteriormente, exponemos otras estrategias que los investigadores también definen e identifican en las producciones de los estudiantes en dichas tareas.

Las principales estrategias vinculadas con la generalización son las de tipo funcional que consisten principalmente en expresar, generalizar o usar implícita o explícitamente una relación funcional entre dos variables (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006; Ramírez et al., 2020; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Estas estrategias también son matizadas según los resultados de cada investigación o su enfoque de análisis. Zapatera Llinares, por ejemplo, distingue entre la aplicación local (para un caso particular) o global (para cualquier caso) de una relación funcional entre dos variables.

Otras estrategias que sobresalen son las de tipo recursivo (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989). La base de estas reside en el empleo de la diferencia común entre términos consecutivos (entendemos que refieren a valores consecutivos que toma la variable dependiente) que se suma a un término para calcular el valor del siguiente (i.e. para obtener el valor de la variable dependiente $f(n)$ para n como valor de la variable independiente, se sigue principalmente un procedimiento de la forma $f(n)=f(n-1)+d$, donde d es la diferencia común).

Resulta interesante que entre las categorizaciones y descripciones de las estrategias de tipo funcional y las de tipo recursivo encontramos puntos de encuentro. Lannin et al. (2006) define la estrategia de fragmentación [*chunking*] que, aunque reconocen comparte similitudes con la estrategia funcional (que llaman explícita), los autores consideran que se estructura sobre un patrón recursivo. En esta los estudiantes utilizan la diferencia común entre valores consecutivos de la variable dependiente y un valor de esta como base para generar otros (i.e. para obtener el valor de la variable dependiente $f(n)$ que le corresponde a n se sigue $f(n)=(n-m)d+f(m)$, donde $f(m)$ fue previamente obtenido y d es la diferencia común en la variable dependiente). García-Cruz y Martinón (1999) entienden estos resultados como de tipo funcional-recursivo, mientras que Stacey (1989) los comprende como parte del empleo de modelos funcionales. De esta reflexión teórica extraemos que las estrategias que utilizan los estudiantes tienen múltiples interpretaciones según los elementos en los que el investigador se centra. Dado el contexto funcional en el que se desarrollan nuestros estudios y la atención que prestamos al establecimiento de relaciones entre variables, los resultados de este tipo los hemos considerado como parte de las estrategias de tipo funcional.

En la literatura también destaca el uso de la estrategia de proporcionalidad (relacionada con la estrategia “objeto completo”) (e.g., Akkan, 2013; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). En esta estrategia subyace el razonamiento proporcional dado que un valor es determinado como producto de otro o bien se hace uso explícito de la regla de proporcionalidad directa.

Además de los tres tipos expuestos antes, en las investigaciones encontramos otras estrategias que también utilizan los alumnos en la resolución de tareas de generalización. Entre las mismas está el conteo (e.g., Akkan, 2013; Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989): los estudiantes cuentan los elementos que componen una figura para determinar la respuesta. El uso de operaciones aritméticas sin relación con patrones específicos es expuesto en el estudio de Merino et al. (2013). En la misma línea Morales et al. (2018) refiere a la estrategia operatoria que refiere a los casos en los que se realizan operaciones a partir de resultados previamente conocidos, se descomponen los sumandos o se modifica algún sumando. Las investigaciones también identifican respuestas directas en las que no se explica el proceso que se ha seguido para obtenerlas (e.g., Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2018; Zapatera Llinares, 2018), así como respuestas consistentes en la repetición del enunciado general de la tarea (Merino et al., 2013).

Akkan (2013) aborda siete estrategias de generalización (conteo, recursividad, proporcionalidad, explícita, múltiplo de la diferencia, contextual y estimar y probar) inspiradas también en el trabajo de investigadores ya mencionados (e.g., Amit y Neria, 2008; García-Cruz y Martinón, 1997; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989). De estas destacamos la estrategia contextual y estimar y probar, que no hemos expuesto antes. En la estrategia contextual los estudiantes construyen una regla según un conocimiento aprendido (e.g., la fórmula de una progresión aritmética). Mientras que, en la estrategia de estimar y probar, los estudiantes estiman una regla sin atender a si se adapta a la situación dada o no.

Investigadores como García-Cruz y Martinón (1997) o Becker y Rivera (2005) adoptan otro criterio para agrupar las estrategias que emplean los alumnos. Ellos las separan distinguiendo si estas involucran un componente visual, es decir, se aplican considerando la información proveniente de un dibujo o figuras o, por otro lado, si aplican datos numéricos. Dentro de las estrategias de tipo numérico Becker y Rivera (2005) incluyen los casos en que los estudiantes establecen relaciones entre términos numéricos, realizan operaciones (e.g., diferencias) o se inclinan por el ensayo y error ajustando fórmulas a los datos disponibles.

García-Cruz y Martinón (1997) distinguen una serie de acciones efectuadas por los estudiantes que los orientan a identificar propiedades y relaciones como parte de la generalización. Entendemos estas como diferentes tipos de estrategias que conducen a la generalización. Con relación a datos relativos a figuras (i.e. dibujos) reconocen dos acciones: (a) bosquejar un dibujo del término requerido de la secuencia al que se le va agregando la parte constante entre los términos (diferencia) y (b) considerar un término como si estuviera conformado por otros términos menores, por descomposición de la figura vinculada al término. En el segundo caso, cuando razonan con datos numéricos, distinguen seis acciones: (a) contar a partir del valor de un término la diferencia constante hasta obtener el valor del término deseado, (b) considerar un término como si estuviera compuesto por otros menores que facilitan calcular su valor, (c) establecer una relación funcional entre el término y su valor, (d) aplicar la regla de tres (i.e. proporcionalidad directa) para obtener el valor de un término, (e) aplicar la fórmula aprendida de progresión aritmética y (f) aplicar sumas sucesivas de la diferencia constante para extender la secuencia numérica.

2.3. Mediación docente

Por medio de la interacción en el aula los docentes obtienen información sobre los razonamientos de los estudiantes y su proceso de aprendizaje. Las acciones de comunicación mediadas por el docente se convierten en un elemento fundamental para el desarrollo del razonamiento y la generalización como parte de este. Estas acciones educativas o mediación del docente se originan de la necesidad de alcanzar las metas educativas planeadas, a la vez que son fundamentales para lograrlas (Mata-Pereira y da Ponte, 2017). En la literatura las acciones educativas docentes vienen descritas también como intervenciones. En nuestra investigación estas son extrapoladas al rol de una entrevistadora que facilita al estudiante la generalización y su respectiva representación. En este sentido las entendemos como mediación del entrevistador.

La propuesta de experiencias con una adecuada guía docente puede ayudar a los estudiantes a desenvolverse en actividades algebraicas en la adolescencia (Warren, 2006). Análogamente de forma más general, Stacey (1989) y Barbosa et al. (2012) argumentan que determinadas prácticas del profesor les podrían ayudar a organizar sus experiencias matemáticas y al mismo tiempo dotarles de recursos para discutir y expresarse en contextos matemáticos. En la misma línea Dekker y Elshout-Mohr (2004) ponen en relieve el papel de la intervención docente en la formación de los alumnos y reconocen que esta, además de ayudar en los procesos matemáticos en los que participan, puede promover la comunicación mientras trabajan, como parte fundamental de su formación.

Partimos entonces de que la intervención/mediación del docente/entrevistador actúa en la construcción, justificación, organización y expresión de las generalizaciones de los estudiantes.

La teoría consultada para caracterizar la mediación del entrevistador en contextos de generalización es diversa. Sintetizamos a continuación parte de la misma estructurándola en tres grupos: (a) intervenciones docentes orientadas a contribuir al estudiante en su aprendizaje matemático, (b) intervenciones docentes en contextos de generalización y (c) otras prácticas que se podrían traducir en mediación para ayudar a los estudiantes a generalizar.

En relación al primer tipo de intervenciones docentes, Dekker y Elshout-Mohr (2004) describen dos tipos de intervenciones orientadas a elevar el nivel matemático de los alumnos: de proceso y de producto. Las intervenciones de proceso se enfocan en la interacción y monitoreo entre los mismos estudiantes mediante actividades como mostrar, explicar, evaluar o justificar sus producciones. Las intervenciones de producto se centran en el razonamiento matemático y el contenido tratado. Por medio de estas el docente asiste los estudiantes, por ejemplo, les solicita justificaciones y explicaciones sobre su trabajo, o bien los guía por medio de pistas cuando tienen dificultades, están inseguros o no comprenden parte de las actividades propuestas.

Anghileri (2006), por otro lado, expone tres niveles de intervenciones docentes que podrían contribuir al aprendizaje de la matemática. El primer nivel se relaciona con elementos ambientales (e.g., la organización del aula, los artefactos y herramientas adecuadas, la disposición de los materiales en el espacio) y la retroalimentación afectiva orientada a motivar y animar a los estudiantes. Los otros dos niveles se enfocan en la interacción entre el docente y el estudiante. El segundo nivel involucra explicaciones, revisiones y reestructuraciones por el docente. Entre las acciones incluidas están: reorientar la atención del estudiante hacia algo específico, solicitar explicaciones, sugerir actividades manipulativas, guiar por medio de otras situaciones similares, negociar significados, reestructurar ideas para hacerlas más accesibles y parafrasear. El tercer nivel abarca acciones orientadas al desarrollo del pensamiento conceptual. El profesor promueve, por ejemplo, establecer relaciones entre conceptos e ideas o generar un discurso conceptual.

A partir de una revisión de la literatura, Leiß y Wiegand (2005) organizan las intervenciones en afectivas, metacognitivas, relacionadas con el contenido, relacionadas con la organización y las vinculadas con el diagnóstico y la observación de los estudiantes. Las primeras involucran acciones como retroalimentar afectivamente. Las intervenciones metacognitivas y las relacionadas con el contenido abarcan, por ejemplo, intervenciones de producto expuestas por Dekker y Elshout-Mohr (2004). Las intervenciones relacionadas con la organización incluyen, entre otras, actividades relacionadas con el espacio de clase y los materiales, preguntas que guían la discusión, así como intervenciones de proceso en términos de Dekker y Elshout-Mohr (2004). Por último, las intervenciones relacionadas con el diagnóstico se centran en la observación del estudiante mientras trabaja.

En los trabajos que abordan las intervenciones en contextos de generalizaciones, los investigadores muestran que las acciones de los docentes podrían influir en las generalizaciones de los alumnos. De Warren (2005, 2006) extraemos seis acciones docentes que ayudan al estudiante generalizar y representar patrones como relaciones funcionales entre dos variables. Estas acciones son:

(a) Uso de materiales concretos que faciliten la representación de la situación.

(b) Propuesta de patrones con una relación evidente entre la posición y el patrón.

(c) Preguntas explícitas que vinculan la posición y el patrón.

(d) Organización del patrón aumentando progresivamente la posición de los términos.

(e) Introducción de lenguaje específico para ayudar a describir el patrón visual de forma general. Esta intervención se concreta mediante la solicitud de justificaciones, la introducción de simbolismo algebraico para representar cantidades indeterminadas y la petición de expresar simbólicamente sus descripciones verbales.

(f) Uso de lenguaje y acciones para guiar al alumno a relacionar la representación visual del patrón con una tabla de los valores de las variables.

En el contexto funcional, Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) plantean nueve intervenciones docentes orientadas a ayudar al estudiante a generalizar y expresar la generalización de una relación funcional. Estas intervenciones se efectúan cuando el entrevistador identifica errores o dificultades. Las citadas investigadoras distinguen los siguientes tipos de intervenciones:

(a) Regresar al primer caso particular, que consiste en sugerir revisar el proceso de resolución desde el inicio.

(b) Volver al caso particular previo (distinto del primero).

(c) Volver a un caso particular cualquiera (distinto del primero y el previo).

(d) Retomar el mismo caso particular.

(e) Verbalizar el argumento del alumno, es decir, se repite una reflexión o resultado del estudiante.

(f) Repetir la pregunta ya sea porque el estudiante está confundido o porque incurre en un error.

(g) Reformular la pregunta.

(h) Calmar al estudiante.

(i) Repetir la respuesta y pedir argumentación. En esta acción se repite la respuesta incorrecta del alumno y se le solicita que reflexione por medio de preguntas orientadoras a reconocer el error.

Las intervenciones son separadas en dos grupos, (a)-(d), que lleva a cabo el estudiante tras la propuesta del docente/entrevistador y (e)-(i) que son acciones propias del docente/entrevistador.

Por otro lado, Cusi y Sabena (2020) señalan tres roles del docente que ayudan a los estudiantes a expresar la generalización a través del fomento y orientación de argumentaciones para hacer explícitas sus formas de pensar. Prestan atención a los elementos semióticos que intervienen en las interacciones que se dan (e.g., gestos, palabras, señalizaciones). El primer rol es el de activador de procesos interpretativos. En este el profesor busca hacer explícitos los razonamientos de los estudiantes y comparte el significado de las estrategias (o razonamientos) así como la interpretación de resultados. En este sentido suscita la aclaración e interpretación de los resultados y expresiones que ellos generan. Luego van de la mano el rol de guía reflexivo y el de activador de actitudes reflexivas. Como guía reflexivo impulsa la argumentación mediante preguntas para el desarrollo de formas efectivas de razonar. En el siguiente rol, a través de preguntas, promueve la reflexión sobre el significado de las estrategias que se desarrollan y se comparan con otras, esto para tomar conciencia sobre sus razonamientos y las actividades en las que participan.

Mata-Pereira y da Ponte (2017) y Ponte et al. (2013) definen tres tipos de acciones docentes asociadas con promover el razonamiento matemático y dentro de este, la generalización. El primer tipo es informar-sugerir. Por medio de estas el docente informa, sugiere, discute o valida la actuación del alumno. En el segundo tipo, apoyar-guiar, guía al alumno en la resolución de la tarea por medio de preguntas u observaciones y le invitan a brindar información. En el tercer tipo, cuestionar o desafiar, anima a los estudiantes a ir más allá de su conocimiento previo, a plantear nuevas representaciones y a interpretar, conectar o generar razonamientos o evaluaciones.

Entre la literatura expuesta anteriormente sobre intervenciones para contribuir al estudiante a aprender matemática y en situaciones de generalización hay puntos de encuentro. Esto refuerza aún más la premisa de la importancia de la mediación docente en contextos variados y permite destacar algunas intervenciones. Entre estas reconocemos el uso de materiales concretos, preguntas guía, acompañamiento afectivo, reorientación del proceso, replanteamiento de las respuestas de los alumnos, sugerencia de actividades concretas, cuestionamiento sobre sus razonamientos o procedimientos, así como la solicitud de argumentaciones y explicaciones.

Finalmente, no toda la literatura consultada refiere explícitamente a mediación docente en contextos matemáticos. Algunos estudios comprenden prácticas que se podrían traducir en mediaciones de un docente/entrevistador para guiar a los estudiantes en sus generalizaciones. Por ejemplo, Soller (2001) en su estudio sobre aprendizaje colaborativo y activo observa que los estudiantes tienden a aprender con mayor eficacia en grupos donde discuten y explican de forma interactiva sus razonamientos. Aunque nuestra investigación no comprende el aprendizaje colaborativo reinterpretamos y reconocemos el papel del profesor en las interacciones entre los participantes (e.g., explicar, preguntar, justificar, explicar, reformular, motivar, rechazar, sugerir, aceptar, redirigir, discutir) mientras se da una construcción y evidencia del conocimiento. Particularmente en nuestro primer estudio la entrevistadora (en rol docente) realiza estas acciones y obtiene información sobre el conocimiento de los alumnos y su capacidad para generalizar y expresar la generalización de una relación funcional. En línea con Dekker y Elshout-Mohr (2004), mediante las acciones efectuadas entre los alumnos, como las señaladas por Soller (2001), el proceso matemático se puede beneficiar si el docente también las aplica a los estudiantes a la vez que los motiva a efectuarlas entre ellos.

En la descripción teórica propuesta en este apartado, extraemos que a partir de una mediación activa en los procesos educativos en los que participan los estudiantes, las mediaciones del docente/entrevistador contribuyen en un refuerzo o reorientación del proceso llevado a cabo para promover un mejor aprendizaje o bien exhibir conocimiento o habilidades de los estudiantes.

Capítulo 3. Antecedentes

En este capítulo presentamos los principales antecedentes considerados en la investigación realizada. Distinguimos tres grupos de antecedentes: investigaciones sobre la generalización y su representación desde el enfoque funcional del álgebra, trabajos que indagan sobre las estrategias que emplean los estudiantes al resolver tareas de generalización y, por último, estudios relacionados con la mediación docente.

3.1. Generalización y su representación

Diversas son las investigaciones que se han desarrollado en primaria y los primeros cursos de secundaria en contextos de generalización en los que subyacen relaciones funcionales (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Blanton et al., 2015; Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2008; Lannin et al., 2006; Warren, 2006; Zapatera Llinares, 2018). Estas muestran matices en las representaciones de generalización de los estudiantes según el curso y el proceso de instrucción en el que participan.

La literatura muestra que, cuando reciben instrucción, desde los primeros cursos escolares los estudiantes son capaces de reconocer la dependencia entre variables y progresar en el uso de representaciones conforme aumenta el curso. A la vez evidencian que los alumnos generalizan y representan relaciones funcionales con estructuras diversas (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2008; Stephens, Fonger et al., 2017; Warren y Cooper, 2005).

En concreto Blanton y Kaput (2004) realizan un trabajo longitudinal desde educación infantil (5 años) hasta quinto grado de primaria (11 años) cuyo foco está en cómo los estudiantes atienden a la variación entre cantidades covariantes y expresan funciones. Ellos trabajan con los estudiantes la generalización de una relación funcional lineal mediante patrones numéricos. El estudio revela el pensamiento funcional de los estudiantes desde una corta edad y sugiere que pueden trabajar con pensamiento covariacional desde educación infantil. Los autores destacan que los estudiantes progresaron en el uso de diferentes representaciones para expresar la relación funcional implícita (e.g., tablas, figuras, gráficos) conforme aumenta el curso y principalmente después de tercero. A la vez reconocen la evolución en el lenguaje, desde el verbal al simbólico, en la expresión de las relaciones funcionales.

En línea con lo anterior, Blanton et al. (2015) presentan el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje con estudiantes de primer grado (6-7 años aproximadamente) en la que caracterizan el pensamiento funcional de los niños asociado a la generalización de relaciones funcionales lineales con estructuras diversas. Los estudiantes debían organizar la información en tablas, identificar relaciones entre variables y, a partir de esto, generalizar las relaciones empleando tanto palabras como simbolismo algebraico. Las investigadoras determinan que los estudiantes aprendieron a pensar de forma sofisticada y generalizada sobre las funciones. Su principal aporte es la definición de ocho niveles de sofisticación en el tratamiento de las funciones. Estos abordan desde el nivel preestructural, en el que los estudiantes no usan ni describen relaciones matemáticas entre los datos, hasta el nivel en el que la función se acepta como un objeto, esto es, los estudiantes reconocen la generalidad de las relaciones funcionales y las conceptualizan considerando las operaciones que entran en juego. El trabajo demuestra también el aporte de los patrones recursivos como preámbulo para el reconocimiento de relaciones funcionales. Este último resultado es interesante dado que en otros trabajos (e.g., Carraher et al., 2008) estudiantes mayores han mostrado una inclinación hacia la recursividad sin llegar a plantear una relación funcional entre dos variables.

Cañadas et al. (2016) estudian las ideas sobre relaciones funcionales generadas por estudiantes de segundo curso (8 años). Los alumnos participaron en clases en las que trabajaron con situaciones que involucraban funciones. Entre sus principales hallazgos sobresale la capacidad de los estudiantes para reconocer las cantidades variables en la tarea y para interactuar con tablas de valores que organizaban la información. Además, los estudiantes aceptaron y comprendieron la representación simbólica de las variables (i.e. letras) y de las relaciones entre estas. En los resultados se reconocen dos enfoques para modelar matemáticamente la tarea planteada. Por un lado, están los patrones recursivos y, por el otro, el planteamiento de relaciones funcionales, destacando la transición del modelo recursivo al funcional como en el trabajo de Blanton et al. (2015).

Carraher et al. (2008) estudian la generalización sobre figuras geométricas y casos particulares como medio de introducción a las funciones lineales con estudiantes de tercer grado de primaria (8-9 años). En los resultados sobresalen dos formas de generalizar: por medio de una secuencia recursiva o una función. Sin embargo, reconocen que muchos estudiantes tendieron a usar la recursividad teniendo problemas para establecer relaciones de correspondencia entre las variables. Identifican que estos resultados fueron motivados por la naturaleza de la situación en la que la variable independiente aumentó en una unidad (i.e. valores consecutivos) derivando en una secuencia recursiva en la que la atención se concentró en el incremento constante en la variable dependiente como base para obtener los siguientes valores. A partir de esto los investigadores hacen hincapié en la importancia de prestar atención a la forma en que los alumnos expresan las relaciones y, en consecuencia, orientarlos hacia el uso de expresiones algebraicas y evitar a futuro concepciones erróneas en el tratamiento de las funciones.

En el contexto australiano, Warren y colaboradores también muestran las habilidades algebraicas de los estudiantes de primaria en la representación y generalización de patrones como funciones cuando reciben instrucción. Estos trabajos a su vez ponen en valor acciones efectuadas por los docentes que asisten a los estudiantes en sus generalizaciones. Warren et al. (2013) se enfocan en la comprensión que tienen estudiantes de primer curso (5 años) sobre las funciones. Los resultados revelan que los gestos, conversaciones de los alumnos consigo mismos y acciones concretas del entrevistador/docente contribuyen al estudiante a generalizar, identificar los valores de entrada y salida, probar hipótesis, así como determinar la regla funcional implícita. Warren (2005) identifica que estudiantes de cuarto curso (9 años) mejoraron considerablemente en el reconocimiento y descripción de patrones de forma general una vez que recibieron instrucción. Llama la atención que para los estudiantes resultó más sencillo verbalizar la generalización que escribirla. Por otro lado, Warren destaca que las limitaciones de los estudiantes al trabajar con patrones se podrían deber a su falta de experiencia con los mismos. En línea con la investigación anterior, Warren (2006) observa que estudiantes de quinto curso (10 años) representan verbalmente (escrito) y simbólicamente la generalización de relaciones funcionales que se derivan de patrones tras participar en un proceso de instrucción.

En el marco del amplio proyecto en que se desarrolla esta investigación[6] y del proyecto que le precede[7], ambos pioneros en el estudio del pensamiento funcional de estudiantes de primaria en España, se han realizado estudios que arrojan información sobre las representaciones utilizadas por estudiantes de primaria en contextos de

[6] Proyecto Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización. Proyecto del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica con referencia EDU2016-75771-P.

[7] Proyecto Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico. Proyecto del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica con referencia EDU2013-41632-P.

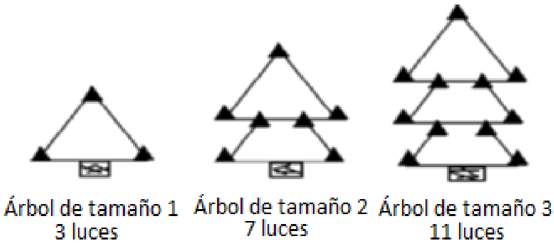
generalización. En estos estudios los alumnos trabajan tareas de generalización que involucran diversas relaciones funcionales lineales y variedad de representaciones. En primer curso (6-7 años), Cañadas y Fuentes (2015) determinan que los alumnos identificaron distintas relaciones funcionales y usaron representaciones diferentes, siendo la más común la pictórica. También en primer curso, Morales et al. (2018) reconocen que los estudiantes establecieron relaciones funcionales de covariación y correspondencia a la vez que generalizaron verbalmente. Torres et al. (2019) muestran que estudiantes de segundo curso (7-8 años) utilizaron representaciones numéricas o verbales e identificaron relaciones funcionales en los casos específicos de la tarea. Sin embargo, los alumnos no generalizaron. Ayala-Altamirano y Molina (2020) describen una variedad de significados que estudiantes de tercer curso (8-9 años) asignaron a la letra como representación simbólica de la variable independiente. Ellas obtienen evidencias de estudiantes que aceptan las letras o rechazan su uso. Entre los estudiantes que aceptaron el uso de la letra determinaron que la usaron como etiqueta u objeto o la relacionaron con un valor fijo o indeterminado (i.e., fijaron un valor único por razones como su posición en el alfabeto u otras, concedieron un sentido genérico asignándole valores numéricos específicos a modo de ejemplo genérico, o entendieron que letra representaba cualquier valor sin ser este especificado). La investigación revela cambios en los significados que los estudiantes atribuyen a las letras según cómo estas se presentan y la tarea involucrada, siendo más frecuente el significado de letra como valor fijo o indeterminado. Pinto y Cañadas (2017, 2019) evidencian que estudiantes de tercer curso (8-9 años), y en mayor medida los de quinto curso (10-11 años), generalizaron relaciones funcionales y las expresaron principalmente por medio de la representación verbal. Llama la atención que los estudiantes de quinto curso emplearon menos estructuras, pero más útiles para generalizar, en comparación con los alumnos de tercero. Ayala-Altamirano y Molina (en prensa) analizan las justificaciones de estudiantes de cuarto curso al trabajar tareas funcionales lineales y la relación de estas con las características de las tareas. Reconocen el aporte valioso de las justificaciones escritas y orales de los estudiantes para comprender sus diferentes formas de expresar y pensar sobre las funciones. Sin embargo, las discusiones orales promovieron justificaciones más precisas y sofisticadas que las partes escritas de las tareas. Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020), si bien se centran en los errores que evidencian estudiantes de sexto curso (11-12 años) y las intervenciones que realiza el entrevistador ante estos, también ponen en evidencia la capacidad de los estudiantes para identificar y trabajar con relaciones funcionales entre variables. A la vez reconocen que el trabajo constante en el aula con tareas funcionales podría promover un desarrollo más profundo del pensamiento funcional.

Comprendiendo también estudiantes de secundaria, Radford (2018) realiza una investigación longitudinal con un grupo de estudiantes desde que estaban en segundo (7-8 años) hasta que llegaron a séptimo curso (12-13 años). En esta describe la emergencia del simbolismo algebraico en un contexto de generalización. El estudio atiende a la variedad de sistemas semióticos (e.g., gestos, lenguaje, símbolos) utilizados por los alumnos en la expresión de la generalización. Los resultados ponen de manifiesto el uso de generalizaciones tanto simbólicas (convencionales) como no simbólicas. En esta línea el autor llama la atención sobre los diferentes sistemas semióticos empleados en las expresiones de generalización porque cada uno revela información diferente sobre el tratamiento de las variables, las relaciones entre estas y la propia estructura algebraica de las secuencias involucradas en las tareas. En la generalización de patrones lineales y no lineales (representados visual o verbalmente), Amit y Neria (2008) reconoce en estudiantes matemáticamente talentosos (11-13 años) una búsqueda de formas sistemáticas para generalizar patrones. Los estudiantes representaron la generalización de las relaciones funcionales implícitas por medio de representaciones verbales, simbolismo algebraico y también combinando términos verbales generales en expresiones algebraicas a modo de representación semisimbólica. Con estudiantes de cursos superiores, de sexto a octavo (10-15 años), y familiarizados con tareas que involucran patrones, Akkan (2013) identifica que los alumnos de sexto se inclinaron hacia el uso de representaciones numéricas. Por otro lado, los alumnos de séptimo y octavo con mejor rendimiento académico generalizaron los patrones (lineales y cuadráticos presentados visual y numéricamente) empleando diferentes representaciones, entre estas el simbolismo algebraico. Cañadas et al. (2008) describen la generalización de un patrón visual por estudiantes de tercer y cuarto curso de secundaria (15-16 años). Aprecian que de los estudiantes que generalizaron, la mayoría lo hace correctamente y aplican representaciones verbales y algebraicas (i.e. simbolismo algebraico), con mayor inclinación a usar la primera. También sobresale el uso de la representación numérica previo a generalizar, a pesar del componente visual de la tarea.

3.2. Estrategias

El estudio de las estrategias que emplean los estudiantes en tareas de generalización ha sido un foco de investigación en los últimos años a nivel internacional (e.g., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Morales et al., 2018).

Las investigaciones consultadas indagan en el empleo de estrategias para generalizar desde el enfoque funcional del álgebra (e.g., Merino et al., 2013; Morales et al., 2018; Zapatera Llinares, 2018) o en el contexto de la generalización de patrones (presentados de forma numérica, en enunciados verbales o de forma pictórica). En los patrones subyacen a su vez funciones (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989). En estos las dos variables que se suelen relacionar son la posición del patrón dentro de la secuencia y su respectivo valor (e.g., la cantidad de elementos que componen el término). Algunos patrones abordados en otros estudios se muestran en la Figura 3.1.



a. Patrón visual lineal tomado de Stacey (1989, p. 149). Función $f(x) = 4x - 1$ para determinar el número de luces según el tamaño del árbol

1, 5, 9, 13, …

b. Patrón numérico lineal tomado de Güner et al. (2013, p.42). Función g(x)=4x-3 para determinar el valor del término según su posición

Figura 3.1. Ejemplos de patrones empleados en la literatura

En esta tesis no diferenciamos entre el trabajo con funciones o con patrones, por este motivo al igual que en apartados previos no ahondaremos en dicha separación. Describimos así los principales estudios que exhiben hallazgos sobre las estrategias que emplean los estudiantes en contextos de generalización y que sustentan nuestros estudios.

3.2.1. Estudios en primeros cursos de primaria

Morales et al. (2018) estudian las relaciones funcionales y estrategias que emplean alumnos de primer curso (6-7 años) en la resolución de tareas con funciones lineales en el contexto del *early algebra*. Entre las estrategias que identifican (respuesta directa, conteo, operatorias y generalización) concluyen que los alumnos emplearon principalmente estrategias operatorias al plantear relaciones funcionales. Este resultado es atribuible a su corta formación escolar y los conocimientos sobre la adición recientemente adquiridos. También en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales con estudiantes de primer curso, Cañadas y Fuentes (2015) reconocen el uso de las estrategias de conteo, respuesta directa o la asociación de los elementos en grupos.

De estas, el conteo y la respuesta directa se vincularon con la respuesta correcta. Cañadas et al. (2016) se centran en las ideas que alumnos de segundo curso (8 años) articulan en relación con las funciones. Identifican que los estudiantes generalizaron relaciones funcionales siguiendo dos enfoques. Por un lado, está el enfoque recursivo en el que la solución a un caso se deriva de otros previos. Y, por otro lado, está el enfoque funcional en que se relacionan las dos variables de la tarea. Las investigadoras observan que mientras que el enfoque funcional se usó tanto con números pequeños y grandes, el recursivo se aplicó con los primeros.

3.2.2. Estudios en últimos cursos de primaria

En un estudio reciente Zapatera Llinares (2018) analiza las estrategias que utilizaron estudiantes de tercer a sexto curso de primaria (8-12 años) al resolver tareas de generalización de patrones. Él apunta que la mayoría de los estudiantes tuvo un buen rendimiento en los casos cercanos (implican valores "pequeños") a diferencia de los casos lejanos (involucran valores "grandes"). También reconoce que el rendimiento de los estudiantes para resolver la tarea mejoró conforme aumentó el curso. Las estrategias aditivas se usaron casi exclusivamente en las preguntas vinculadas con casos cercanos, mientras que estrategias funcionales se aplicaron principalmente en los casos lejanos y para establecer la regla general. En esta línea, la flexibilidad para cambiar de estrategia al cambiar de casos cercanos a lejanos garantizó éxito para generalizar. Otro aspecto por destacar y que coincide con otros estudios (e.g., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989), radica en el uso inadecuado de la proporcionalidad. El trabajo invita a estudiar con más detenimiento situaciones en las que sí aplica esta estrategia.

Ramírez et al. (2020) estudian el uso de estrategias funcionales por estudiantes de cuarto curso (9-10 años) en diferentes situaciones funcionales de generalización y las características de las tareas que promovieron su utilización. Los investigadores obtienen que la mayoría de los estudiantes llegó a emplear dichas estrategias en alguna de las situaciones y de forma exclusiva en las cuestiones generales que involucraron cantidades indeterminadas. Estos estudiantes, a su vez, fueron capaces de representar las relaciones funcionales generales verbalmente o a través de casos genéricos.

En quinto curso (10-11 años) Merino et al., (2013) estudia las estrategias y representaciones que utilizan los estudiantes al resolver una tarea funcional de generalización. Los autores determinan que la representación más común fue la verbal (acompañada también de representaciones numéricas o pictóricas). Al mismo tiempo obtienen que el conteo tendió a ser utilizado casi exclusivamente en cuestiones que involucraron valores pequeños, al igual que la respuesta directa. En cambio, el uso de patrones (i.e. que implicaron el empleo de una estructura) destaca como la estrategia más utilizada a lo largo de la tarea y que condujo generalmente a respuestas correctas.

En sexto curso de primaria (11-12 años), Barbosa et al. (2012) se centran en el rol de la visualización, así como en las estrategias y dificultades que presentan estudiantes en tareas de generalización de patrones visuales. A nivel global los investigadores determinan un bajo rendimiento. Observan que quienes obtuvieron mejores calificaciones en las tareas aplicaron las estrategias de conteo y recursividad (asociada a la diferencia), pero sin llegar a determinar la regla correcta en los casos generales. Concluyen que los estudiantes se inclinaron por estrategias más numéricas que visuales (i.e. que usan ilustraciones como base), incluso cuando estas últimas podían facilitar la resolución de la tarea. Esto promovió en cierta medida el uso de estrategias incorrectas como la proporcionalidad. Un aspecto interesante es que los estudiantes tendieron a seguir una misma estrategia, salvo aquellos que iniciaron con conteo que cambiaron a proporcionalidad en los casos lejanos.

Estudios como el de Lannin et al. (2006) abordan otras áreas de investigación vinculadas con las estrategias que emplean los alumnos al generalizar en diferentes tareas. Ellos analizan los factores que influyen en la selección de las estrategias que emplean alumnos de quinto curso (10-11 años). En los resultados reconocen cuatro estrategias: la construcción explícita de una relación funcional, proporcionalidad, fragmentación y recursividad (descritas en el apartado 2.2). Determinan que el uso de estas estrategias se ve influenciado por factores como los valores en los casos propuestos, la estructura matemática de la tarea (e.g., si la tarea es lineal o no, si es creciente o decreciente), estrategias previas usadas, la imagen visual generada y las interacciones sociales con el profesor u otros alumnos.

3.2.3. Estudios en la transición entre primaria y secundaria

A finales del siglo pasado Stacey (1989) se interesa en cómo se lleva a cabo la generalización de patrones y en cómo esta varía conforme aumenta el curso con estudiantes de primaria y secundaria (9-13 años). Ella considera en su estudio cuatro estrategias de resolución de problemas de generalización: conteo, objeto entero, diferencia entre valores consecutivos (de la variable dependiente) y método lineal (i.e. uso explícito o implícito de una función lineal). La autora reconoce una inestabilidad en el uso de estrategias según si se involucran casos cercanos o lejanos en estudiantes sin experiencia en resolución de problemas. También evidencia el incorrecto y amplio uso que se da a la proporcionalidad en los casos generales de la tarea, incluso después de aplicarse correctamente otras estrategias como el método funcional. En contraste observa que estudiantes con experiencia en resolución de problemas fueron más estables aplicando un método lineal para generalizar.

Amit y Neria (2008) identifican que estudiantes talentosos matemáticamente (de 11-13 años) sin formación algebraica, usaron tanto estrategias recursivas como funcionales para generalizar patrones lineales y no lineales. Entre estas, sobresale la estrategia funcional por su eficiencia y alcance para generalizar.

También en contextos de generalización de patrones (lineales y cuadráticos en secuencias numéricas o figurales) en cursos superiores, Akkan (2013) identificó en estudiantes de sexto a octavo curso (10-15 años) el uso de estrategias como el conteo o aditivas en casos cercanos, sin llegar a generalizar. Sin embargo, también distingue en menor medida y conforme aumenta el curso, estrategias más sofisticadas que involucran establecer relaciones funcionales entre variables. El empleo de estas estrategias también es reconocido por Güner et al. (2013) en estudiantes de séptimo y octavo curso (11 a 13 años) cuando resolvieron los casos generales en tareas de generalización de patrones (numéricos y visuales).

3.2.4. Estudios en cursos de secundaria

Becker y Rivera (2005) describen los resultados de estudiantes de noveno curso (14-15 años) al resolver una tarea de generalización de un patrón lineal visual. Indagan sobre las estrategias que permiten a los estudiantes llevar a cabo una generalización explícita y cómo emplean la información numérica y visual para generalizar. Entre los dos tipos de estrategias, numéricas y visuales, reconocen las primeras como las más comunes. A la vez identifican tres tipos de generalización relacionadas con las estrategias aplicadas: numérica, figural y pragmática. En el primer tipo de generalización los estudiantes siguieron principalmente una estrategia de prueba y error sin sentido de lo que representan los coeficientes del patrón. Las variables se utilizan como marcadores de posición [*placeholders*]. Por otro lado, quienes usaron la generalización figural se centraron en la relación entre los números de la secuencia. Aquí las variables se entendieron en el ámbito de una relación funcional. Por último, en la generalización pragmática los alumnos usaron estrategias figurales y numéricas, reconociendo que las secuencias numéricas constan de propiedades y relaciones.

García-Cruz y Martinón (1997) basan parte de su trabajo en la investigación desarrollada por Stacey (1989). Analizan el proceso de generalización de patrones por estudiantes de secundaria de noveno curso (15-16 años). Reconocen estrategias como el conteo, proporcionalidad y encontrar relaciones funcionales, similares a las estrategias definidas por Stacey (1989). También clasifican las estrategias utilizadas por el estudiante según su naturaleza: visual, numérica o mixta. La investigación destaca el rol de las ilustraciones en el proceso de generalización. Por un lado, estas se convirtieron en la base para generalizar en los estudiantes que utilizaron estrategias visuales y, por otro lado, se tradujeron en un medio para probar las soluciones obtenidas bajo las estrategias numéricas.

3.3. Mediación docente

En este apartado organizamos los antecedentes relacionados con la mediación docente en dos grupos según si los estudios abordan (a) intervenciones docentes en contextos de generalización o (b) intervenciones docentes en otros contextos matemáticos.

Entre los estudios que abordan intervenciones docentes ante tareas de generalización están los trabajos de Warren (2005, 2006). Estos son desarrollados en espacios de instrucción en Australia y permiten valorar el impacto de las intervenciones docentes en el progreso de los estudiantes para generalizar patrones en forma de funciones, i.e. como relación entre dos variables (la posición y, el patrón o término correspondiente). Warren (2005) determina que las acciones docentes (descritas previamente en el apartado 2.3) ayudaron a estudiantes de cuarto curso (9 años) a generalizar patrones y establecer relaciones funcionales entre las variables. Se aprecia que el uso de materiales concretos facilitó la comprobación de pasos faltantes del patrón. La propuesta de patrones con una relación explícita entre el patrón y su posición (las variables) asistió a los estudiantes a describir verbalmente dicha relación. Las preguntas guía se efectuaron para evidenciar la relación entre las variables. Además, la propuesta de patrones organizados desde posiciones con números pequeños a más grandes contribuyó a los estudiantes a articular una relación general entre la posición y el patrón visual.

En un trabajo posterior (Warren, 2006) esta misma autora profundiza en las intervenciones que favorecen la generalización de patrones y su expresión de forma escrita. Su interés se ve motivado tras reconocer en estudios previos (e.g., Warrren, 2005) dificultades en estudiantes adolescentes y otros más jóvenes para llevar a cabo estas expresiones de generalización. A través de la investigación con estudiantes de 10 años añade a las intervenciones docentes descritas en su trabajo previo (Warren, 2005) la introducción de lenguaje específico para ayudar a describir el patrón visual de forma general y el uso de lenguaje y acciones que guían al estudiante a relacionar la representación visual del patrón con una tabla de valores. Los resultados reflejan que las acciones docentes contribuyeron a que los estudiantes identificaran y expresaran la generalización. Tras las intervenciones, casi dos quintas partes de los estudiantes establecieron relaciones entre el patrón y su posición, mientras que una quinta representó la relación simbólicamente.

Otros estudios desarrollados en contextos funcionales de generalización docente también evidencian implícita o explícitamente el rol de la intervención del docente/investigador en el proceso de generalización de alumnos de primaria (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2008; Morales et al., 2018; Warren et al., 2013). Apreciamos que intervenciones como parafrasear, organizar o redirigir las respuestas o procedimientos de los estudiantes, cuestionar los resultados, solicitar justificaciones y plantear preguntas guía en la resolución de la tarea son importantes, por un lado, para obtener información de los razonamientos de los estudiantes y evidenciar su pensamiento algebraico o funcional y, por otro lado, para asistirlos cuando es necesario.

De las acciones docentes que distinguen Mata-Pereira y da Ponte (2017), ya presentadas en el apartado 2.3, las acciones retar-desafiar seguidas de las acciones apoyar-guiar sobresalen por promover la generalización en los estudiantes. Los resultados destacaron la importancia de una combinación entre las distintas acciones docentes para promover el razonamiento.

En un ambiente de entrevista, Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) identifican y clasifican intervenciones docentes efectuadas por un entrevistador a estudiantes de sexto curso (11-12 años) cuando cometen errores o muestran dificultades. Los estudiantes resolvieron una tarea de generalización en la que subyace una relación funcional. Las autoras reconocen nueve intervenciones (descritas previamente en el apartado 2.3) orientadas a promover la reflexión en los estudiantes sobre la tarea para dar respuesta a la misma o bien para que avanzaran en su resolución. Las intervenciones que sobresalieron por su frecuencia fueron: repetir la pregunta y regresar al caso particular anterior.

Dekker y Elshout-Mohr (2004) y Santagata (2005) ejemplifican estudios que indagan sobre la intervención docente a los estudiantes desde otros espacios matemáticos y con atención en focos distintos a la generalización. Dekker y Elshout-Mohr (2004) se centran en determinar la efectividad de intervenciones docentes para elevar el nivel matemático de alumnos de 16-17 años. De los dos tipos de intervención docente (de proceso y producto) ya descritas en el apartado 2.3 de esta memoria, destacaron las de proceso por su efectividad para elevar el nivel matemático en términos del aprendizaje de los estudiantes. Santagata (2005), por otro lado, se centra en analizar la intervención docente-estudiante cuando ocurren errores y en contextos de clase. Particularmente compara clases de álgebra y geometría de octavo curso en Italia y Estados Unidos. Uno de sus aportes recae en categorizar la primera respuesta de los docentes ante los errores que cometían los estudiantes en los siguientes tipos:

(a) Corregir: el profesor además de corregir da la respuesta correcta.

(b) Sugerir al mismo estudiante: el profesor replantea la pregunta y agrega pistas para guiar al estudiante a la respuesta correcta.

(c) Repetir la pregunta al mismo estudiante: el docente dice que la respuesta es incorrecta o repite la pregunta y espera una nueva respuesta.

(d) Pedir explicaciones al estudiante sobre cómo obtuvo la respuesta.

(e) Sugerir a otro estudiante: el docente replantea la pregunta y la redirige a otro estudiante.

(f) Redireccionar la pregunta: el profesor redirige la pregunta a otro estudiante.

(g) Elegir la respuesta correcta: entre varias respuestas el profesor elige la correcta y continúa con las siguientes preguntas.

(h) Preguntar a la clase: el profesor pide a la clase identificar el error cometido por algún compañero o evaluar si su respuesta es correcta.

(i) Iniciativa del estudiante: el estudiante corrige el error de otro antes de que el profesor intervenga.

La investigadora determina que, ante los errores de los estudiantes, las intervenciones docentes más comunes fueron corregir el error, sugerir al mismo estudiante (principalmente simplificando el problema tratado) o bien redirigir la pregunta a otro alumno.

De la revisión de la literatura destacamos dos ideas. Por un lado, en la investigación sobresale el interés en describir las representaciones de generalización de estudiantes de distintos cursos en tareas que involucran relaciones funcionales. Y, por otro lado, la necesidad de ahondar en el estudio de la mediación docente y las estrategias que utilizan los estudiantes en contextos funcionales de generalización.

Capítulo 4. Metodología

En este capítulo describimos la metodología que se ha seguido en el trabajo que recoge esta memoria. Este consta de tres estudios desarrollados en el marco del enfoque funcional del álgebra escolar. Primero describimos el paradigma de investigación que se sigue y la contextualización de los tres estudios. Posteriormente detallamos los elementos metodológicos específicos de cada uno de ellos.

4.1. Paradigma y tipo de investigación

El paradigma de investigación que seguimos es cualitativo. De acuerdo a Hernández et al. (2014), dentro de este paradigma la investigación suele seguir un proceso inductivo, es decir, va de lo particular a lo general, analiza con detalle cada caso en el que centra la atención para luego sacar conclusiones generales. Además, explora y describe, para posteriormente generar una perspectiva teórica. La investigación es flexible, no sigue un proceso claramente definido ni lineal, permite regresar a etapas previas o bien llevar a cabo replanteamientos dentro de una misma etapa. Se basa en una perspectiva interpretativa del significado de lo que hacen seres vivos, en este caso estudiantes. La investigación cualitativa "pone énfasis en la profundidad y sus análisis no necesariamente, son traducidos a términos numéricos" (Barrantes, 2007, p.71). Particularmente en nuestra investigación analizamos en profundidad las representaciones de generalización que manifiestan tanto estudiantes de primaria como de secundaria en contextos funcionales, atendiendo también a las estrategias que aplican y el papel de la mediación del entrevistador en las representaciones de generalización.

Los estudios realizados son de naturaleza exploratoria. Las investigaciones exploratorias se realizan cuando se abordan problemas de investigación poco estudiados o bien se indaga sobre temas desde otras perspectivas (Hernández et al., 2014). Concretamente el estudio de las representaciones de generalización desde la perspectiva funcional del álgebra tanto en primaria, en el contexto del *early algebra*, como en los primeros cursos de secundaria constituye un aporte a la investigación por abordar no sólo las representaciones o la generalización, sino ambas en un campo de investigación en crecimiento. Por otro lado, como mostramos en los antecedentes (Capítulo 3), la investigación cuya problemática se centra en las estrategias que utilizan los estudiantes o la mediación docente, en contextos funcionales de generalización, es reducida. Dado que también el propósito de los estudios recae en detallar cómo son y cómo se manifiestan las áreas en las que nos enfocamos, la investigación desarrollada es descriptiva (Hernández et al., 2014).

4.2. Contextualización de la investigación

Por medio de una articulación de tres estudios damos respuesta a los cuatro objetivos específicos de investigación que nos planteamos (ver Figura 4.1).

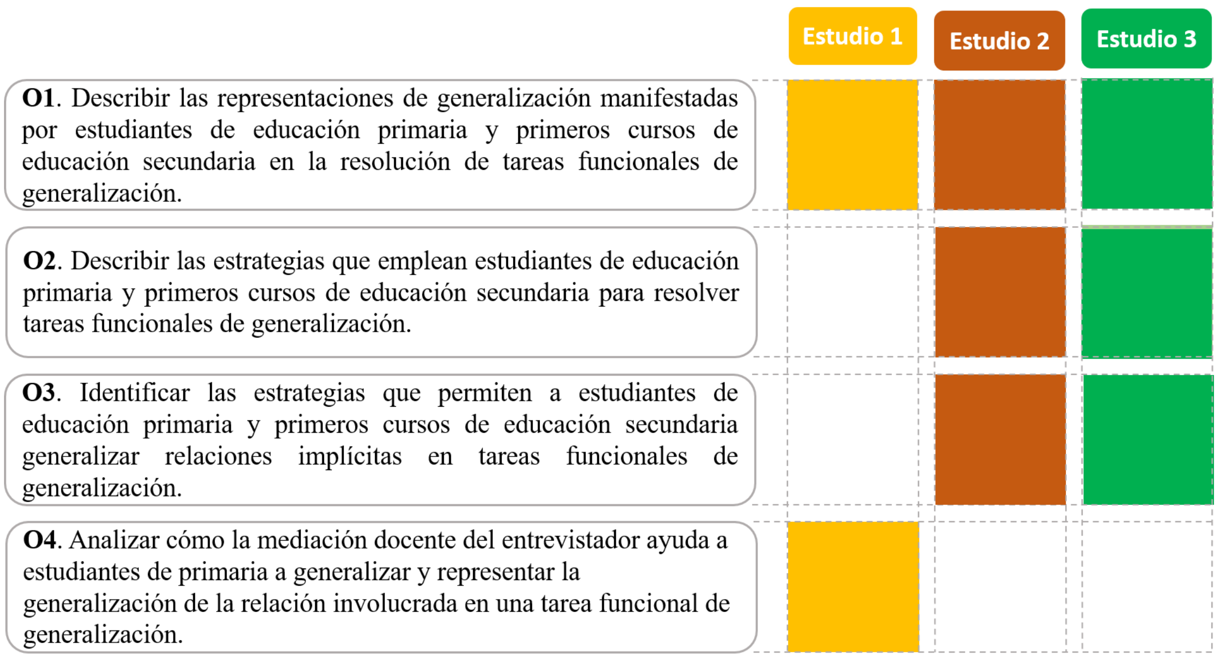


Figura 4.1. Objetivos de investigación cubiertos en cada estudio

Los datos que sustentan los estudios que se reportan en esta tesis provienen de dos contextos de investigación distintos, ambos desarrollados en el seno de un proyecto de investigación nacional (EDU2016-75771-P) centrado en el estudio del pensamiento funcional de estudiantes de primaria en España. En los dos contextos se propone a los estudiantes resolver tareas funcionales de generalización en las que hay implícita una relación funcional lineal de la forma $y=x+b$ (primer estudio), $y=ax+b$ (segundo y tercer estudio) o $y=ax$ (segundo estudio), siendo los coeficientes de las relaciones funcionales números naturales. Las tareas tienen una organización inductiva para ayudar a los estudiantes a visualizar la regularidad implícita y en consecuencia identificar y generalizar las respectivas relaciones funcionales. Han sido diseñadas siguiendo el modelo inductivo de Cañadas y Castro (2007). Inician con el trabajo en casos específicos considerando para la variable independiente valores numéricos pequeños no consecutivos (i.e. casos cercanos), valores numéricos distantes a los primeros (i.e. casos lejanos) y, posteriormente, planteándose cuestiones sobre casos generales (i.e. casos generales). No se involucran casos específicos consecutivos para evitar, a priori, la recursividad como forma de interpretar y abordar las tareas propuestas, según investigaciones previas (e.g., Carraher et al., 2008; Morales et al., 2018). En los casos generales la variable independiente se expresa de forma indeterminada por medio de una expresión verbal o una letra.

En línea con Amit y Neria (2008), esta organización puede promover una transición desde “casos de calentamiento” mediante los cuales el estudiante se familiariza con la situación, pasando luego por la generalización tentativa en la que se extiende la regularidad a otros casos específicos, por la generalización informal mediante la representación que el estudiante prefiera (e.g., la representación verbal), hasta alcanzarse la generalización formal involucrando el simbolismo algebraico.

La consideración de ambos contextos de investigación enriquece la investigación tanto en términos de la diferencia entre las tareas propuestas y las relaciones funcionales lineales subyacentes, como de participantes que nutren nuestros resultados. A continuación, se describen en detalle los elementos metodológicos que los distinguen.

4.3. Elementos metodológicos estudio 1

Este estudio persigue dar respuesta a los objetivos específicos 1 y 4 (Figura 4.1). Primero se enfoca en describir las representaciones de generalización evidenciadas por estudiantes de cuarto de primaria al resolver una tarea de generalización en la que subyace una relación funcional lineal. En segundo lugar, analizamos la mediación de la entrevistadora y su relación con la capacidad de los alumnos para representar la generalización a lo largo de la resolución de la tarea.

Los elementos metodológicos que forman parte de este estudio se sintetizan en la Figura 4.2 y se describen en los siguientes apartados.

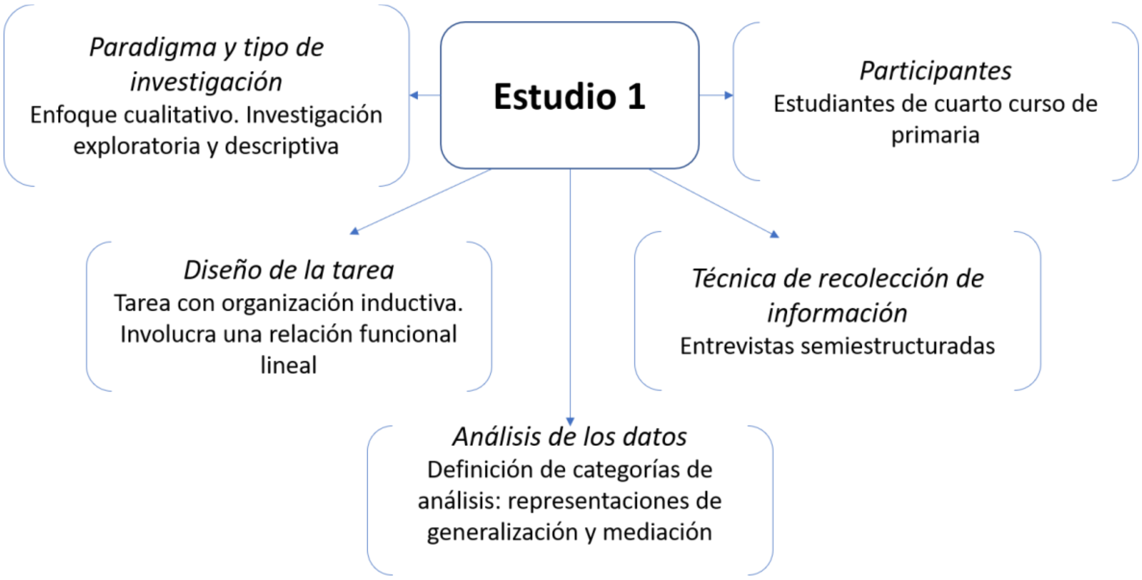


Figura 4.2. Elementos metodológicos estudio 1

4.3.1. Contexto general del estudio

El primer estudio se deriva de una investigación desarrollada en dos fases en un centro educativo privado ubicado en Granada, España. La primera fase se lleva a cabo durante el curso 2014-2015 y la segunda en el curso 2015-2016. Este estudio analiza parte de la información recolectada en la segunda fase, constituyendo el primer contexto en el que se desarrolla nuestro trabajo.

La primera fase consistió en un conjunto de experimentos de enseñanza dentro del paradigma de la investigación de diseño. La investigación de diseño se orienta a comprender y mejorar la realidad educativa considerando contextos naturales en su complejidad, y desarrollar y analizar un diseño de instrucción específico (Molina et al., 2011). Esta metodología busca registrar

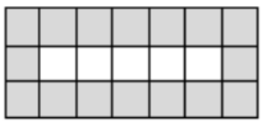
> qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en las tareas, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los alumnos, grabaciones de vídeos y evaluaciones de la clase. (Confrey, 2005, pp. 135-136)

Específicamente, el experimento de enseñanza involucra una secuencia de enseñanza en el que participa un agente de enseñanza (docente-investigador), uno o más estudiantes, así como observadores-investigadores de los episodios de enseñanza. Sugiere a su vez la grabación de las sesiones para la futura toma de decisiones y la planificación de las siguientes sesiones (Steffe y Thompson, 2000).

En la primera fase de la investigación se implementan de forma entrelazada tres experimentos de enseñanza. Cada uno constó de cuatro sesiones de intervención en el aula, de aproximadamente 90 minutos cada una. En estas sesiones participaron 30 estudiantes de primer curso, 25 de tercero curso y 24 de quinto curso de primaria.

En cada sesión se presentó a los estudiantes una tarea en la que subyacía una función lineal y que a su vez involucraba representaciones variadas. Las sesiones siguieron la misma organización: presentación de la tarea, entrega de las hojas de trabajo para resolver las cuestiones de la tarea (individualmente o en grupos de tres o cuatro alumnos) y finalmente discusión de las respuestas en el grupo de clase. A modo de ejemplo en la Tabla 4.1 mostramos las tareas presentadas a los estudiantes en tercer curso de primaria. Estas involucran funciones lineales y siguen una estructura inductiva. En general requerían determinar valores de la variable dependiente cuando se daban valores de la independiente, aunque en ocasiones se solicitaba lo opuesto. Las letras se introducen para representar valores indeterminados.

Tabla 4.1. *Secuencia de tareas presentadas en tercer curso*

Sesión	Enunciado de la tarea	Función
Sesión 1	María y Raúl son hermanos. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.	y=x+5
Sesiones 2 y 3	Carlos vende camisetas con el escudo de su colegio. Él gana 3 euros por cada camiseta que vende.	y=3x
Sesión 4	En un colegio hay diferentes pasillos compuestos de baldosas grises y blancas. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño, siguiendo el patrón que muestra la figura. 	y=2x+6

La segunda fase de la investigación se llevó a cabo el curso siguiente, cuando los estudiantes que participaron en la primera fase cursaban segundo, cuarto y sexto curso, respectivamente. En esta fase se entrevistó un grupo de estos estudiantes en cada curso para ahondar en los razonamientos y las soluciones que dan a diferentes tareas que involucran relaciones funcionales.

El primer estudio que realizamos se desprende exclusivamente de los datos provenientes de las entrevistas realizadas a los estudiantes de cuarto curso de educación primaria. Por tanto, la primera experiencia de dichos estudiantes con tareas funcionales la vivieron el curso académico previo, en el marco del experimento de enseñanza, mediante el trabajo con las tareas mostradas en la Tabla 4.1. Nuestro estudio se centra en describir las representaciones de generalización de estos estudiantes, así como los tipos de mediación que efectúa la entrevistadora y que contribuyen a que generalicen y representen la generalización (Figura 4.1).

4.3.2. Participantes

En este estudio participan 8 estudiantes de cuarto curso de primaria (9-10 años). Los participantes fueron seleccionados intencionalmente siguiendo dos criterios: disposición a contribuir y representación de distintos niveles de rendimiento académico (bajo, medio y alto), según la valoración de su maestra. Como se mencionó antes, estos estudiantes el curso académico previo habían participado en la primera fase de la investigación anteriormente descrita (apartado 4.3.1). Esa fue su primera experiencia con funciones y representaciones simbólicas algebraicas y tabulares. Partimos del supuesto de que, dado que los estudiantes ya habían tenido contacto con el equipo de investigadores, se sentirían más cómodos para expresar sus ideas y razonamientos.

4.3.3. Técnica de recolección de información

La técnica de recolección de información que utilizamos es una entrevista semiestructurada a partir de una tarea presentada al estudiante en formato escrito.

La entrevista como técnica de recolección de información consiste en una reunión mediante la cual se intercambia información entre el entrevistador y el entrevistado (Hernández et al., 2014). Las entrevistas semiestructuradas parten de una guía de preguntas que orientan la entrevista, sin embargo, esta no está completamente predeterminada sino que hay flexibilidad a la hora de desarrollarla de acuerdo con las preguntas de investigación que se siguen (Grinnel y Unrau, 2018; Hernández et al., 2014) y en función de las respuestas que vaya dando el estudiante.

En el caso de este estudio cada entrevista fue individual, de entre 15 a 25 minutos de duración aproximadamente, y conducida por una misma entrevistadora en todos los casos. Fueron realizadas a inicios del año 2016 en tres fechas: 7 y 16 de febrero y 18 de abril.

La entrevistadora planteó una serie de preguntas a cada estudiante siguiendo la organización inductiva de una tarea funcional que se describe en el siguiente apartado 4.3.4. Según consideró necesario para reorientar el trabajo o resultados del estudiante, la entrevistadora efectuó mediaciones para ayudar al estudiante a comprender la tarea, obtener resultados, expresar sus razonamientos o representar la generalización, entre otros aspectos.

La información que se generó en las entrevistas fue registrada mediante grabaciones de video y en las producciones escritas que realizan los estudiantes durante la resolución de la tarea.

4.3.4. Diseño de la tarea

El diseño de la tarea que se presenta a los estudiantes se inspiró en otros trabajos desarrollados bajo el enfoque funcional, mencionados en el Capítulo 3 de antecedentes. La tarea involucra una relación funcional lineal y es contextualizada refiriendo a situaciones que pueden ser consideradas como reales en las que se demanda el uso de conceptos, habilidades y procedimientos matemáticos. Este tipo de tareas sobresalen como un medio para situar y profundizar en el aprendizaje de la matemática, la generalización o el uso de representaciones (Carraher et al., 2008).

El enunciado de la tarea dice:

“A mi familia y a mí nos gusta ir a esquiar. Mientras esquiamos, dejamos el coche aparcado en el parking. El parking tiene una tarifa de 2 euros al entrar y 1 euro por cada hora que está el coche aparcado”.

La tarea solicita a los estudiantes determinar el número de euros que se deben pagar en el parking según la cantidad de horas que el coche está allí. Se sigue una organización inductiva para facilitar a los alumnos progresar hacia una formulación general de la regularidad. Las primeras siete preguntas involucran un número específico no consecutivo de horas (e.g., 3, 5, 10, 20, 120, 500 horas). Se espera que reconozcan y representen numéricamente la relación funcional subyacente. Las siguientes preguntas refieren al número de horas de forma indeterminada para promover la expresión general de la relación funcional que identifican. En la octava pregunta la indeterminación se presenta como “el número de horas, sean las que sean”. En la pregunta final la cantidad de horas que el coche permanece en el parking es expresada por medio de una letra. La función que relaciona el número de horas x que está el coche en el parking (variable independiente) con el número de euros y que se pagan (variable dependiente) es $y=x+2$.

La tarea también incluía algunas cuestiones sobre el número de horas transcurridas si se pagaba un número determinado de euros, es decir, sobre la relación funcional inversa. Sin embargo, dado que a sólo a algunos estudiantes se les plantearon preguntas de este tipo, en este estudio no analizamos esa información.

4.3.5. Análisis de la información

El proceso de análisis de la información sigue el esquema que se muestra en la Figura 4.3.

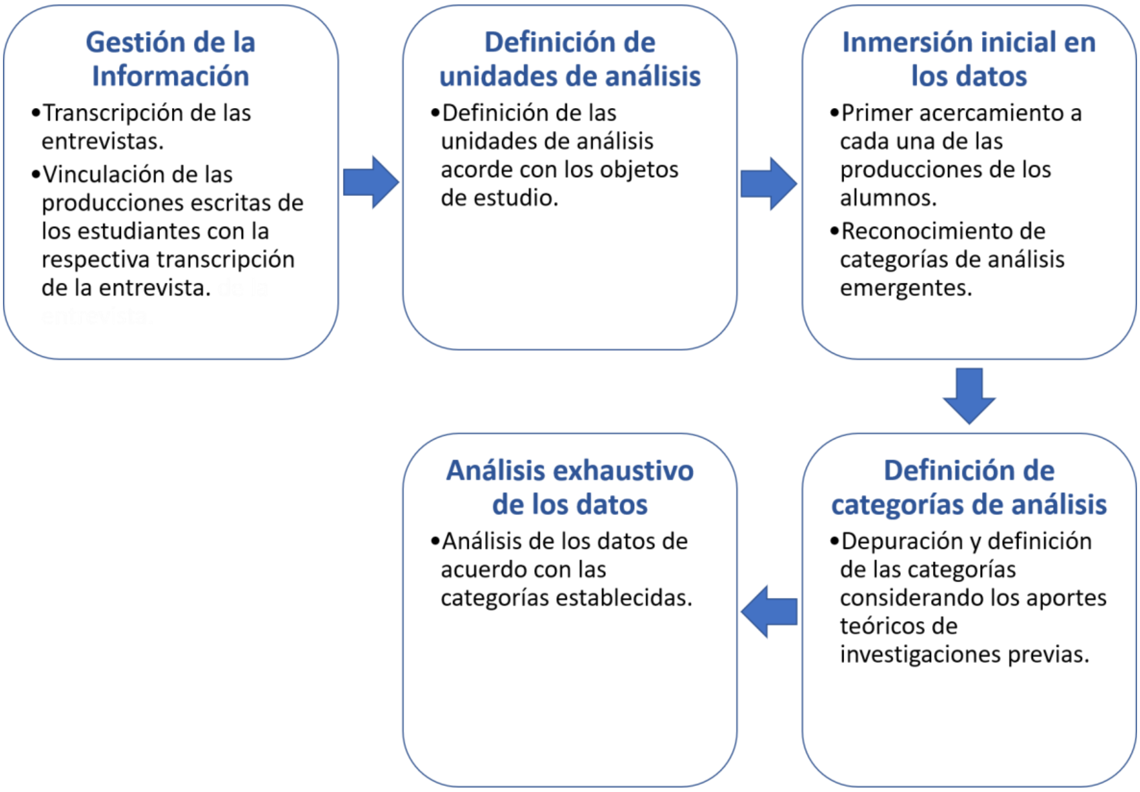


Figura 4.3. Proceso de análisis de la información estudio 1

Una vez que se efectuaron las entrevistas, se transcribieron y codificaron las grabaciones de video. La entrevistadora es designada con la letra E y cada alumno con la letra A acompañada de un número del 1 al 8. En correspondencia con los objetivos de investigación se definieron dos unidades para analizar los datos: (a) la mediación realizada por la entrevistadora en cada acción que ayudaba a generalizar (distinto a la mera formulación de las preguntas de la tarea) y (b) la respuesta completa del alumno después de cada acción de la entrevistadora y, específicamente, cómo representó la generalización en cada pregunta.

Se analizó cada una de las transcripciones de las entrevistas en conjunto con las producciones escritas de los estudiantes. En consistencia con el enfoque cualitativo, el análisis de la información siguió un proceso inductivo. En una primera fase se hizo una inmersión inicial en los datos. El propósito era identificar dentro de cada unidad de análisis elementos por destacar y posibles categorías de análisis emergentes, para caracterizar las mediaciones de la entrevistadora y las representaciones de generalización, así como relaciones entre ambos. Tras este primer acercamiento, depuramos las categorías de análisis emergentes y las contrastamos con los aportes teóricos de otras investigaciones. De este proceso obtenemos categorías de análisis refinadas. Definimos dos tipos de categorías de análisis de los datos: representaciones de generalización y mediación de la entrevistadora. Estas son descritas en los apartados que siguen. Las categorías de análisis son aplicadas a los datos en una segunda fase de análisis.

4.3.5.1. Representaciones de generalización

Las categorías relativas a representaciones de generalización que definimos están inspiradas en los aportes teóricos de Mason y Pimm (1984) relacionados con concepciones vinculadas a la generalización, así como en los estratos de generalización algebraica definidas por Radford (2001, 2010). Consideramos que un estudiante representa la generalización de una relación funcional cuando expresa una regularidad subyacente a la tarea. La distinción entre las representaciones de generalización radica en el modo en que expresan implícita o explícitamente la relación funcional que se reconoce entre las cantidades de las variables implicadas. Definimos cuatro categorías de representaciones de generalización:

- Numérica: mediante el trabajo con distintas cantidades, el estudiante llegó a identificar la relación funcional subyacente y la expresó haciendo referencia a dichas cantidades. Responde a las preguntas de manera consistente recurriendo a la operación inherente en la relación funcional. Esta categoría se subdividió en dos subcategorías en función de si el estudiante hacía referencia a números menores (N1) o mayores (N2) de 100. Aunque la representación numérica podría ser considerada como ausencia de generalización, nuestra interpretación es que el alumno da evidencias de haber percibido lo general en un conjunto de casos específicos.

- Genérica: el estudiante identificó la relación funcional en casos generales y la expresó a través de un ejemplo utilizando números como ejemplos genéricos. El ejemplo específico surge del propio proceso de razonamiento del estudiante, no de las preguntas formuladas por la entrevistadora.

- Verbal: el estudiante identificó la relación funcional y la expresa verbalmente en términos generales, haciendo referencia a cantidades indeterminadas.
- Simbólica: el estudiante identificó la relación funcional y la expresó mediante simbolismo algebraico. En esta categoría se incluyó a los estudiantes que, aunque no lograron representar la relación funcional de manera simbólica por sí mismos, sí comprendieron la expresión cuando la entrevistadora se la propuso.

La representación numérica de la generalización se inspira en la generalización factual de Radford (2001) y en el concepto de específico de Mason y Pimm (1984). La segunda representación se basa en la caracterización del ejemplo genérico propuesta por Mason y Pimm (1984). La representación verbal de la generalización está relacionada con la idea de generalización contextual de Radford (2001) y el concepto de general (Mason y Pimm, 1984). La última representación de la generalización se basa en el estrato de generalización simbólica expuesta por Radford (2001) así como en la concepción de lo general planteada por Mason y Pimm (1984).

4.3.5.2. Mediación

La mediación se describe y se analiza de acuerdo con las acciones que realiza la entrevistadora. Establecemos tres grupos de categorías según los tipos de acción descritos por Mata-Pereira y da Ponte (2017): informar-sugerir, apoyar-guiar y cuestionar. A su vez cada grupo es desglosado en las acciones que la entrevistadora efectúa para favorecer el razonamiento matemático y orientarlo hacia la generalización y su respectiva representación. Para ello, consideramos algunas acciones identificadas por Mata-Pereira y da Ponte (2017), da Ponte et al. (2013) y Soller (2001). Concretamente para describir las acciones de la entrevistadora utilizamos las siguientes categorías que definimos a continuación: reafirmación, sugerencia de procesos, corrección, cambio de rumbo, repetición de información y aclaración.

- Informar-sugerir
    - Reafirmación: la entrevistadora aprueba el procedimiento utilizado por el alumno y en ocasiones le pide que lo explique. Incluso cuando la respuesta es incorrecta, se anima al estudiante a persistir o explicar su razonamiento sobre la tarea.
    - Sugerencia de procesos: la entrevistadora sugiere o insinúa un proceso, o más bien la búsqueda de un procedimiento para encontrar la respuesta, en ocasiones aludiendo a procedimientos que se han utilizado previamente y fomentando la discusión y la recolección de datos.
- Cuestionar
    - Corrección: diseñada para identificar y corregir errores. Al pedir a los alumnos que confirmen los resultados, la entrevistadora promueve la identificación de errores.
    - Cambio de rumbo: el objetivo es guiar y ayudar al alumno en sus progresos y obtener respuestas distintas a las surgidas inicialmente. La entrevistadora parafrasea o reformula sus observaciones y preguntas o redirige el proceso de adquisición de información.
- Apoyar-guiar
    - Repetición de información: la entrevistadora repite ciertos datos o hace referencia a resultados anteriores.
    - Aclaración: la entrevistadora aclara su mediación o introduce información nueva durante la entrevista.

4.4. Elementos metodológicos estudio 2 y estudio 3

El estudio 2 y el estudio 3 se orientan a dar respuesta a los objetivos específicos 1, 2 y 3 (ver Figura 4.1). De este modo, por un lado, se centran en describir las representaciones de generalización que evidencian los estudiantes en la resolución de dichas tareas que involucran relaciones funcionales lineales. Por otro lado, describen las estrategias que emplean para resolver las tareas, con énfasis en las que se relacionaron con las representaciones de generalización.

Los elementos metodológicos que caracterizan el estudio 2 y el estudio 3 se presentan en la Figura 4.4 y se describen en los siguientes subapartados.

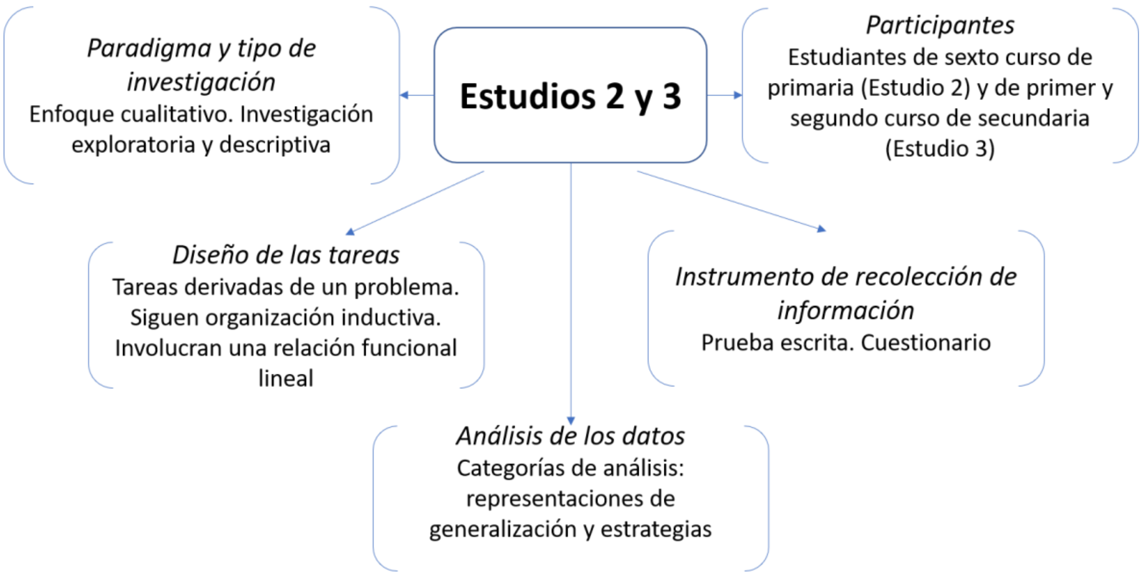


Figura 4.4. Elementos metodológicos estudio 2 y estudio 3

4.4.1. Contexto general de ambos estudios

El segundo y tercer estudio se desarrollan en un mismo contexto. Estudiantes de sexto curso de primaria y primer y segundo curso de educación secundaria resuelven de forma voluntaria un cuestionario que consta de cinco problemas como prueba de ingreso a un programa de estímulo del talento matemático. Del cuestionario tomamos como fuente de información la resolución de un problema que consta de dos tareas funcionales de generalización planteadas en una misma situación.

4.4.2. Participantes

En estos estudios participaron 313 estudiantes (11-13 años) provenientes de la Comunidad Autónoma de Andalucía, específicamente de las provincias de Jaén, Granada, Almería y Málaga. Participan 33 de sexto de educación primaria, 167 de primero de secundaria y 113 de segundo de educación secundaria. Trabajamos intencionalmente con estos estudiantes asumiendo en ellos habilidad para generalizar y que el trabajo con casos específicos no significaría una dificultad para ellos, permitiéndoles exhibir con claridad las estrategias empleadas para generalizar y sus representaciones de generalización. También asumimos en ellos una actitud positiva hacia la matemática. En el estudio 2 consideramos únicamente los estudiantes de sexto curso de primaria, motivados por el interés de centrarnos exclusivamente en las producciones de estudiantes que finalizan la primaria, quedándonos dentro del marco del *early algebra*. Complementariamente en el estudio 3 consideramos a todos los participantes con el propósito de, además de alcanzar los objetivos propuestos, contrastar los resultados teniendo en cuenta sus diferentes experiencias educativas y formación algebraica.

4.4.3. Instrumento de recolección de información

Los estudiantes que participan en el estudio responden a una prueba escrita. Esta consistió en un cuestionario compuesto de cinco problemas que abordaron diferentes contenidos (funciones, operaciones con números, divisibilidad, medida en el plano y construcciones espaciales). En nuestros estudios analizamos las respuestas al primer problema que involucra la generalización de dos relaciones funcionales lineales (ver Figura 4.5). La recolección de información se llevó a cabo el 10 de junio de 2017.

4.4.4. Diseño de las tareas

El problema considerado, diseñado por Ramírez y Cañadas (2018), es seleccionado por vincularse con objetos centrales de nuestra investigación (representaciones de generalización en contextos funcionales). Para su diseño se inició con una revisión de las tareas propuestas en las investigaciones que exponemos en el Capítulo 3 de antecedentes. Se siguieron los siguientes criterios de diseño: el enunciado el problema involucra una coordinación entre la representación verbal y la pictórica, en las dos primeras secciones que contienen casos específicos se invita a los estudiantes a representar pictóricamente la situación, se derivan dos tareas del problema donde cada una de ellas implica una relación funcional distinta, sigue una organización inductiva y se solicita explícitamente a los estudiantes justificar sus respuestas.

El problema propuesto es la "situación del agricultor" (Figura 4.5) y consta de dos tareas. La primera tarea requiere determinar el número de cuadrados que se forman si los puntos marcados sobre una cuadrícula constituyen sus vértices. La segunda tarea implica calcular el valor de la suma de los órdenes de todas las semillas, si el orden de una semilla es el número de cuadrados que tiene uno de sus vértices sobre esta. En la primera tarea la relación funcional que depende del número de días n es $f(n) = 4n - 6$, mientras que en la segunda la relación funcional que asocia la suma de los órdenes con el número de cuadrados que se forman es $h(n) = 4(4n - 6) = 16n - 24$. El problema requirió resolver ambas tareas para 3, 4, 100 y n días.

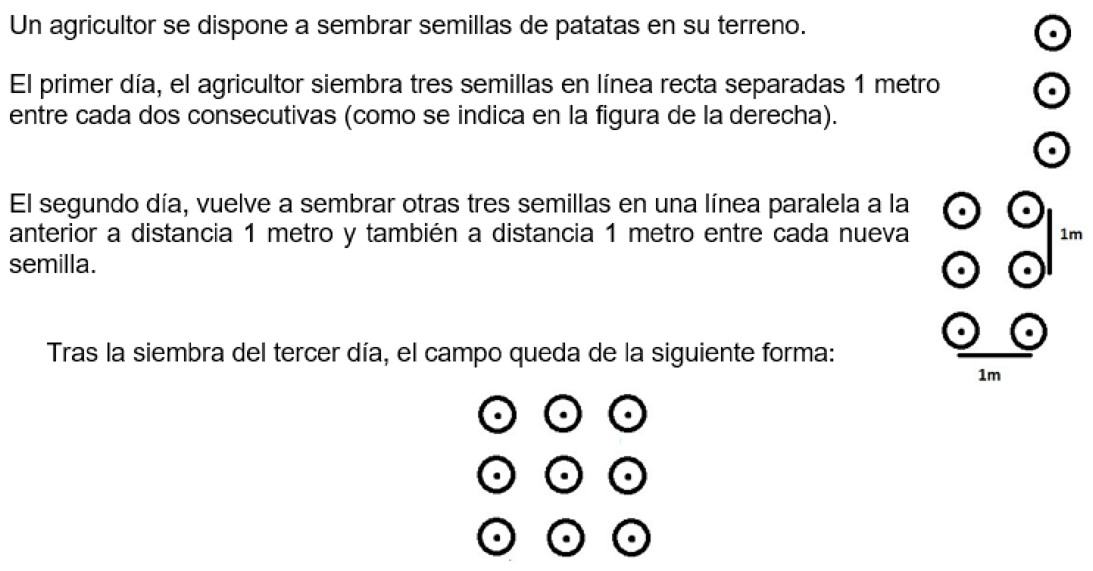


Figura 4.5. Problema situación del agricultor[8]

En los resultados del estudio 2 observamos que la cantidad de estudiantes que responde a los casos de la segunda tarea disminuye con respecto a la primera y que encuentran dificultades para identificar una regularidad, en parte debido a la dependencia entre las respuestas de ambas tareas, donde un error influiría en las siguientes respuestas con la posibilidad de no llegar a generalizar. Por esta razón, en el estudio 3 se analizan exclusivamente las producciones de los estudiantes a la primera tarea (Figura 4.6).

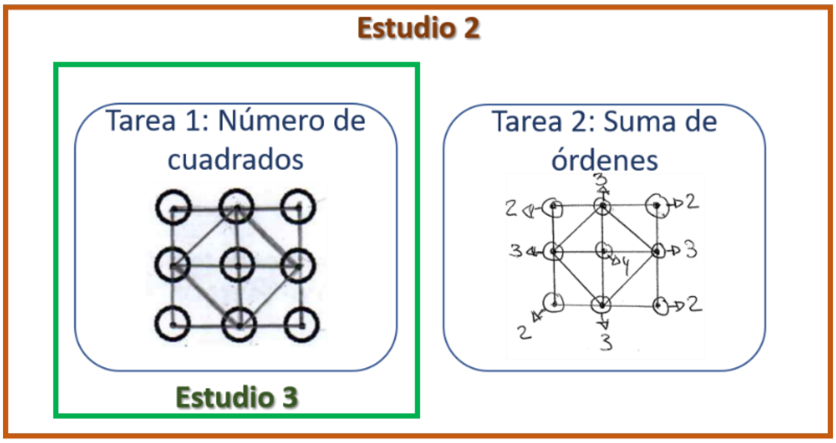


Figura 4.6. Tareas abordadas en el estudio 2 y el estudio 3

[8] La tarea completa se puede ver en el Anexo 1.

4.4.5. Análisis de la información

El proceso de análisis que siguen ambos estudios es el mismo. Este se describe en la Figura 4.7.

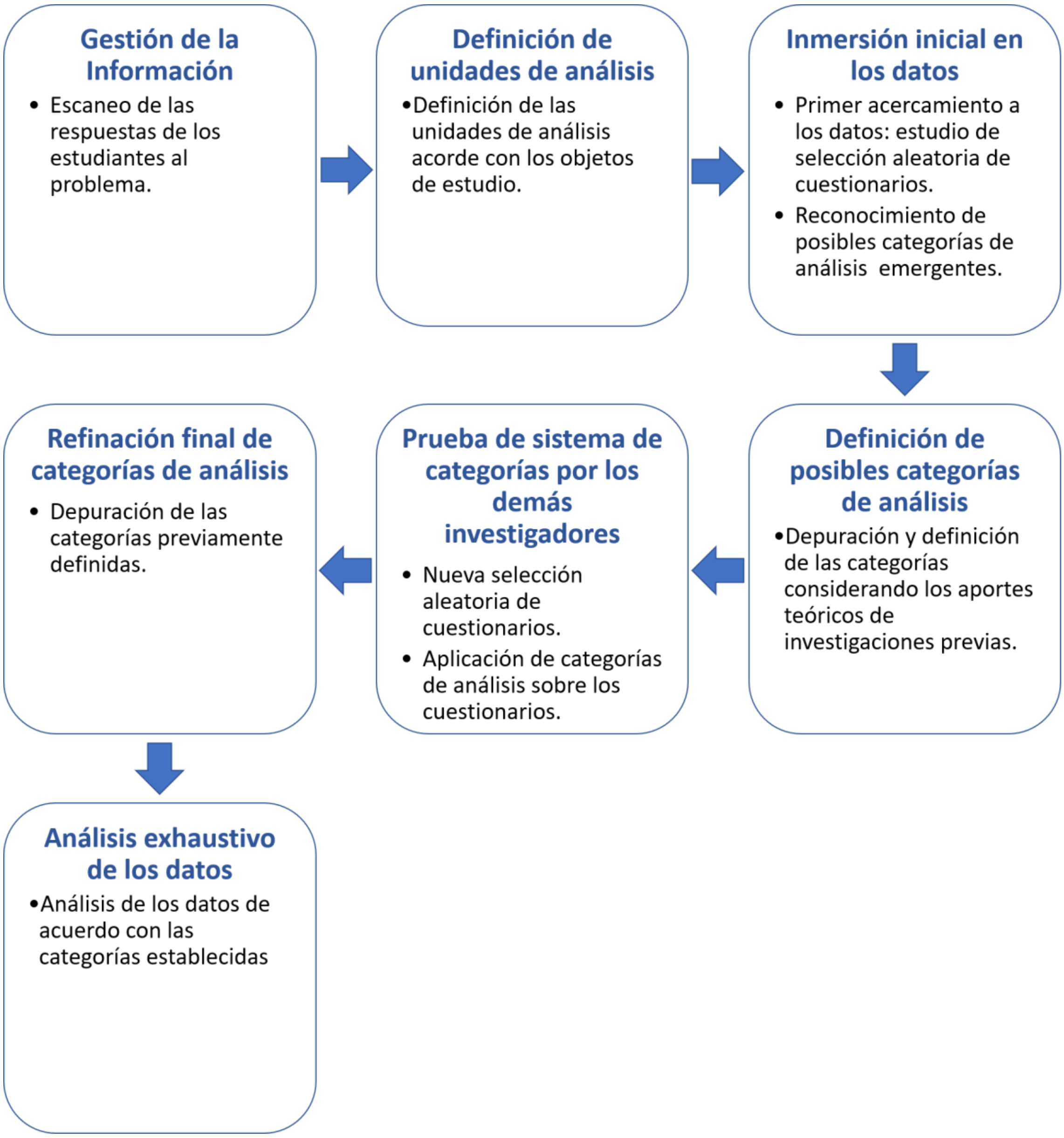


Figura 4.7. Proceso de análisis de la información estudio 2 y estudio 3

Para el análisis de los datos el primer paso que se sigue, una vez que se obtuvieron las respuestas de los estudiantes al cuestionario, fue escanear las producciones vinculadas con el problema objeto de estudio. Designamos a cada estudiante con la letra E y un número del 1-313, así como un subíndice numérico que refiere al curso (6=sexto de primaria, 1=primero de secundaria, 2=segundo de secundaria).

En línea con los objetivos de los estudios y la disposición de la información en las producciones escritas, se define como unidad de análisis la respuesta completa del estudiante a cada tarea (i.e. en conjunto a los casos 3, 4, 100 y *n*), pudiendo ser esta correcta o no. A su vez se consideran tres secciones para el análisis: casos cercanos 3 y 4, caso lejano 100 y caso general *n*.

Dado el volumen de producciones escritas de los alumnos se siguen tres fases de análisis de los datos. En la primera fase se toma una muestra aleatoria de cuestionarios de todos los cursos. Estos son analizados siguiendo los objetivos de investigación. A partir de esto se determinan las primeras categorías de análisis emergentes para las estrategias de resolución que emplean los estudiantes y las representaciones de generalización que manifiestan. Posteriormente las categorías de estrategias son refinadas apoyándonos en los aportes teóricos de investigaciones previas. Las categorías de representaciones de generalización son ajustadas de acuerdo con las ya definidas en el estudio 1. Para validar las categorías, en una segunda fase de análisis se analiza una nueva selección aleatoria de producciones escritas. Una vez que en el equipo de investigación se llega un acuerdo relativo a los resultados vinculados a cada categoría, se lleva a cabo otra etapa de refinación de las categorías. Finalmente, establecidas las nuevas categorías, en una tercera etapa de análisis se analiza exhaustivamente cada una de las producciones escritas de todos los estudiantes.

Definimos dos grupos de categorías de análisis: las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes y las presentaciones de generalización.

4.4.5.1. Estrategias de resolución

Las categorías de estrategias que utilizamos en el análisis de los datos proceden de los antecedentes expuestos (Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Merino et al., 2013; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018) y de un análisis preliminar de los datos. Son las siguientes:

- Conteo: el resultado se extrae del conteo de los elementos que componen la solución en una representación pictórica.
- Operatoria aditiva: se determina la solución aplicando explícita o implícitamente sumas aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en respuestas previas o posteriores.
- Operatoria multiplicativa: se determina la solución aplicando explícita o implícitamente multiplicaciones o divisiones aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en respuestas previas o posteriores.
- Proporcionalidad: se aplica el razonamiento de proporcionalidad para obtener una respuesta como producto de otra. Esta estrategia se separa de la operatoria multiplicativa para hacer énfasis en el razonamiento específico involucrado.
- Recursividad: la respuesta se obtiene sumando la diferencia entre soluciones consecutivas al valor del caso anterior.
- Progresión aritmética: la solución se obtiene aplicando la fórmula de progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)d$, en la que a_n es el valor general de la progresión, a_1 el valor del primer término de la progresión y d la diferencia entre valores consecutivos.
- Correspondencia: se establece y hace uso de una relación funcional de correspondencia entre las variables asociadas para describir la situación planteada.
- Respuesta directa: la respuesta no informa del procedimiento seguido.
- Otra: refiere a procedimientos no clasificables en las categorías previas.

Si bien, se utiliza el mismo sistema de categorías de análisis en los dos estudios, en ambos casos no se manifiestan las mismas.

4.4.5.2. Representaciones de generalización

Consideramos que los estudiantes expresan la generalización cuando representan una regla general relacionando las variables a partir del reconocimiento de una regularidad. Analizamos las representaciones escritas que utilizan los estudiantes para expresar tal generalización. Las categorías utilizadas para clasificar las representaciones de generalización son una reorganización y ampliación de las definidas por Ureña et al. (2019) dentro de las cuales seleccionamos las expresadas por nuestros participantes. Distinguimos por tanto los siguientes casos:

- El estudiante no representa la generalización.
- El estudiante representa la generalización. Esta es dividida en tres subcategorías que son los tipos de representaciones de generalización que diferenciamos:
    - Verbal: la regularidad detectada es expresada por medio de lenguaje natural que refiere a las cantidades indeterminadas y sus relaciones.
    - Simbólica: la regularidad detectada es expresada utilizando simbolismo algebraico para representar las cantidades indeterminadas y sus relaciones.
    - Múltiple: la regularidad detectada es expresada utilizando una combinación de representaciones verbales y simbólicas.

En el Capítulo 5, a continuación, presentamos los resultados que se derivan de cada uno de los estudios llevados a cabo.

Capítulo 5. Compilación de estudios

En el presente capítulo presentamos, en formato artículo, los tres estudios[9] realizados y que conforman la investigación. El estudio 1 ya ha sido publicado como parte de un número especial de la revista Infancia y Aprendizaje sobre *early algebra*. El estudio 2 y estudio 3[10] se encuentran en proceso de revisión en diferentes revistas.

Estudio 1:

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation / Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614.

Estudio 2:

Ureña, J., Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (en revisión). Generalisation strategies and representations used by last-year elementary school students.

Estudio 3:

Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Generalización de estudiantes en un contexto funcional: estrategias y representaciones.

---

[9] En las citas y referencias de toda la memoria de tesis hemos seguido los lineamientos de APA en su séptima edición (American Psychological Association, 2020), esto ha requerido realizar modificaciones mínimas en los manuscritos de los estudios con respecto a cómo han sido publicados o remitidos para su revisión.

[10] Las versiones que aquí se recogen incluyen algunas mejoras que han involucrado cambios en el texto. Estas serán incorporadas en sucesivas versiones antes de su publicación como artículos.

5.1. Estudio 1:

Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador[11]

Jason Ureña[a], Rafael Ramírez[a], and Marta Molina[b]

[a]Universidad de Granada; [b]Universidad de Salamanca

Resumen: En este estudio descriptivo se analiza la capacidad de generalizar y de representar generalizaciones exhibida por estudiantes de cuarto grado de primaria. El estudio adopta un diseño experimental basado en una entrevista semiestructurada en torno a una tarea basada en la relación funcional lineal $y = x + 2$. El papel de la mediación de la entrevistadora en las representaciones de las generalizaciones realizadas por los estudiantes se determina en función de las interacciones de los estudiantes con ella. Se definen cuatro formas de representación de la generalización de una relación función. Los resultados confirman la importancia de la mediación para ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad de reconocer, representar y generalizar las relaciones funcionales.

Palabras clave: representaciones de la generalización; mediación; relación funcional; early algebra.

Abstract: The ability to generalize and represent generalizations exhibited by eight fourth-grade students was analysed in this descriptive study, designed around a semi-

---

[11] Este artículo también fue publicado por la misma revista en inglés bajo el título *Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation* (Ureña et al., 2019).

structured interview involving a task based on the linear functional relationship $y = x+2$. The relation of the interviewer's mediation on students' representations of generalizations was determined on the grounds of students' interactions with her. Four forms to represent the generalization of a functional relationship were defined. The findings confirm the importance of mediation in helping students strengthen their ability to recognize, represent and generalize functional relationships.

Keywords: representations of generalizations; mediation; functional relationship; early algebra.

Las aptitudes algebraicas de los alumnos de primaria y el modo en que estas se manifiestan han sido objeto de numerosos estudios en las últimas décadas. La identificación de las capacidades relacionadas con el álgebra a edades muy tempranas (Blanton et al., 2015) ha dirigido los esfuerzos hacia el refuerzo de ese potencial desde los primeros cursos escolares. Bajo este enfoque, algunos estudios han demostrado que la introducción de funciones en contextos de resolución de problemas es un enfoque válido para desarrollar los conocimientos de álgebra incluso en educación primaria (Blanton y Kaput, 2011; Blanton et al., 2011). Uno de los objetivos de dichas investigaciones es el estudio de la capacidad infantil para generalizar y el modo en que esta se expresa (Warren et al., 2016).

La relevancia de la generalización y sus representaciones como parte del pensamiento algebraico es incuestionable en la investigación de la educación matemática. Algunos investigadores (Kaput, 2008; Radford, 2018) consideran que el simbolismo algebraico no es el único modo en que los estudiantes representan ese pensamiento, que también puede adoptar la forma del lenguaje natural o incluso gestual. Si bien las cantidades indeterminadas asociadas al pensamiento algebraico pueden representarse mediante símbolos alfanuméricos, el pensamiento algebraico también puede expresarse mediante los sistemas semióticos ya mencionados. En este estudio se exploran el reconocimiento y la representación de una relación funcional por parte de los estudiantes durante el transcurso de entrevistas semiestructuradas, así como sus interacciones con la entrevistadora. Las preguntas de investigación abordadas son las siguientes: ¿Qué representaciones de las generalizaciones de una relación funcional manifiestan los estudiantes de cuarto grado durante la resolución de una tarea en un contexto funcional? ¿Cómo ayuda la mediación de la entrevistadora a los estudiantes en esa generalización? Además de contribuir a los resultados de las investigaciones mencionadas anteriormente, el objetivo de este estudio es facilitar información que puede resultar de utilidad en la enseñanza de *early algebra*, materia incluida en el currículo escolar en países como Australia, Canadá, China, Japón, Corea y Portugal (Merino et al., 2013), además de España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a).

Pensamiento funcional

Este estudio se llevó a cabo en un contexto de *early algebra* cuyo objetivo es el desarrollo del razonamiento algebraico de los niños en sus primeros años. Su enfoque está centrado en el pensamiento funcional. Bajo este enfoque, el álgebra se introduce mediante funciones (Cañadas y Molina, 2016). En las relaciones funcionales que se presentan, el valor de la variable independiente se asocia a un único valor de la variable dependiente (Blanton, 2008).

Uno de los factores analizados por la investigación sobre pensamiento funcional es la generalización de las relaciones (Blanton et al., 2011; Smith, 2008) mediante la descripción de la regla general según la cual las cantidades covarían y que las representa

(Blanton et al., 2011; Hitt y González-Martín, 2016). En este estudio se analiza cómo se generalizan y representan dichas relaciones funcionales.

Algunos estudios recientes centran su interés en el pensamiento funcional y la diversidad del comportamiento del estudiante (e.g., su versatilidad en el uso de sistemas de representación, el progreso del lenguaje natural al lenguaje simbólico, la expresión de la generalización en distintos registros) cuando se generalizan situaciones en las que intervienen relaciones funcionales. Algunos de estos estudios han demostrado que los alumnos de primaria son capaces de distinguir y describir situaciones en las que dos cantidades covarían, y definir las reglas que gobiernan las relaciones entre ellas (Carraher et al., 2003; McEldoon y Rittle-Johnson, 2010; Stephens, Ellis et al., 2017), así como de manejar distintos tipos de representaciones (tales como tablas, imágenes o gráficos) para explorar, describir y simbolizar las relaciones funcionales (Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008; Warren, 2006). En un estudio con escolares de primer grado, Blanton et al. (2015) evidenciaron el potencial de los alumnos para representar las relaciones funcionales mediante símbolos algebraicos, poniendo de relieve su capacidad de aprender a pensar sobre las funciones de una manera sofisticada y generalizada a edades muy tempranas. Estos autores sugirieron niveles de sofisticación en la generalización de las relaciones desde un nivel en que los estudiantes no describían la relación subyacente hasta lograr distinguir la función como un objeto. En otros estudios con alumnos de tercer grado, los investigadores destacan la relevancia de monitorizar la identificación de las variables involucradas en las relaciones funcionales por parte de los alumnos, así como la representación de estas relaciones mediante representaciones convencionales, por ejemplo, utilizando expresiones algebraicas en lugar de formas de relación recursivas (Carraher et al., 2008).

Estas investigaciones constituyen un marco inestimable para el estudio del pensamiento funcional de los escolares de primaria para la caracterización y la identificación de factores asociados a la generalización de las relaciones funcionales y la representación de dichas generalizaciones. Con este estudio complementario no se pretende describir el aprendizaje de los alumnos en el tiempo sino más bien poner de relieve sus capacidades y cómo estructuran y representan las generalizaciones en ausencia de enseñanza expresa más allá de la mediación del entrevistador. El objetivo de estudio es, caracterizar las representaciones de la generalización producidas por alumnos de cuarto grado cuando realizan una tarea en la que interviene una relación funcional.

Generalización

La importancia de la generalización en matemáticas radica en la propia naturaleza de la disciplina, en la formulación de proposiciones sobre números y formas (Mason et al., 1985). Mason et al., (2005) proponían que el álgebra está basada en la capacidad de generalizar a partir de casos específicos y que incluso niños en edad preescolar muestran esta capacidad. Desde este punto de vista, el pensamiento inductivo desempeña una función importante en la generalización, puesto que guía la detección de regularidades basándose en casos específicos y extrapolando a un patrón general (Castro et al., 2010).

Generalizar consiste en la transición desde la identificación de la regularidad en casos específicos a otros casos más amplios que siguen el mismo patrón (Polya, 1989) de manera que pueden representarse todos los elementos en una única expresión (Radford, 2010). En esta misma línea, la generalización como proceso puede incluir la identificación de rasgos comunes en distintos elementos, el razonamiento más allá de los casos contemplados o la obtención de un espectro más amplio de resultados a partir de casos particulares. Por otro lado, la generalización se considera no solo un proceso sino un producto o resultado de estos procesos (Stephens, Ellis et al., 2017). Cuando se trasladan estas descripciones a una situación con una relación funcional subyacente entre dos cantidades, la generalización implica identificar y representar la regla que relaciona ambas cantidades desde lo particular a casos más generales. Esta relación se generaliza cuando se representa mediante el lenguaje hablado, gráficos o cualquier otra representación simbólica o combinación de ellas (Carraher et al., 2008). Los distintos tipos de representaciones de la generalización y sus interrelaciones constituyen un elemento esencial indisolublemente asociado al pensamiento algebraico y a la generalización (Blanton, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018). Este estudio se diferencia de otros anteriores en tanto que centra su atención en cómo se representa la generalización de la relación funcional y no solo exclusivamente en la propia representación o generalización.

Para describir la generalización algebraica, Radford (2001) definió tres niveles en los que incluía tanto factores simbólicos como presimbólicos. El primer nivel, la generalización factual, consistiría en la 'generalización de acciones numéricas en forma de un esquema operacional que permanece vinculado al nivel numérico' (p. 82, traducción propia), en el que pueden abordarse con éxito los casos particulares. En el segundo nivel, la generalización contextual, los alumnos observarían un patrón y lo explicarían para cualquier término dentro de la secuencia, sin necesidad de recurrir a casos particulares. El lenguaje utilizado se analiza como reflejo de un nivel de generalidad mediante expresiones indeterminadas tales como 'el siguiente término' o 'para cualquier número'. El tercer nivel, la generalización simbólica, transcendería el objeto o número específico en un contexto dado. Los escolares hablan en términos generales. Su representación abarcaría todos los elementos de la secuencia o patrón. Radford (2010) también distinguió un tipo de generalización no algebraica: la generalización aritmética.

En este nivel, los estudiantes identificarían los aspectos comunes de los términos o elementos específicos pero no serían capaces de aplicarlos a otros casos (ni siquiera a casos particulares) o de formular una expresión que represente a todos los términos de la secuencia. Mason y Pimm (1984), a su vez, diferenciaron entre distintas concepciones asociadas a la generalización que podrían informar distintas categorías para representar la generalización. En primer lugar, definieron ‘específico’ para denotar casos que implicaban números particulares y distinguían ‘genérico’ como expresiones que representan o abarcan la generalidad que, sin embargo, se explica mediante ejemplos específicos. Por último, utilizaron el término ‘general’ para referirse a una respuesta que representa todos los términos implicados, así como expresiones indeterminadas.

Más allá de los hallazgos realizados por estudios anteriores, a los participantes en este estudio se les indujo a generalizar mediante una tarea que versaba en torno a una relación funcional. El estudio fue diseñado para recabar datos sobre su comprensión de la situación funcional propuesta, información basada en las herramientas o recursos utilizados para construir, analizar y representar funciones (Blanton, 2008). Basándonos en la caracterización de la generalización, en la sección de Análisis de datos se establecen categorías de representación de la generalización en función de cómo se reconoció y representó la relación funcional (véase sección de análisis de datos más adelante).

Mediación

El trabajo y la interacción en el aula facilita a los docentes conocimientos detallados sobre el razonamiento y el aprendizaje de los escolares. Tanto las tareas propuestas como la comunicación mediada por las acciones educativas son, por tanto, esenciales para el desarrollo del razonamiento. La mediación de los profesores tiene un impacto considerable sobre la capacidad de generalizar de los alumnos. Estas acciones educativas surgen de la necesidad de alcanzar las metas establecidas por el profesor, vinculadas con las actividades de clase y, al mismo tiempo, son necesarias para alcanzar dichas metas (Mata-Pereira y da Ponte, 2017).

Los estudios revisados para comprobar el papel de la mediación del profesor en la generalización son diversos. Algunos de ellos sugieren que las acciones de los profesores pueden influir en las generalizaciones de los alumnos. Mata-Pereira y da Ponte (2017), así como Ponte, Mata-Pereira, y Quaresma (2013) definieron tres tipos de acción educativa dirigida a desarrollar el razonamiento matemático, considerando la generalización como uno de sus procesos clave. En el primer tipo de acción, informar-sugerir, los docentes informan, sugieren, discuten o validan la actuación del alumno. En el segundo, apoyar-guiar, conducen a los alumnos en sus tareas mediante preguntas u observaciones y les invitan a facilitar información. En el tercero, cuestionar o desafiar, se anima a los alumnos a ir más allá de sus conocimientos previos, a formular nuevos tipos de representaciones y a interpretar, interconectar o proponer razonamientos o valoraciones. Warren (2006) también describió acciones educativas que ayudaban a los estudiantes a identificar y expresar generalizaciones tanto de manera verbal como simbólica. En su estudio sobre el pensamiento funcional, las relaciones funcionales ocurrían entre un patrón y la posición de sus elementos. La autora informó que, tras acciones educativas tales como el uso de materiales concretos, patrones que presentaban una relación obvia entre posición y patrón, y la formulación de preguntas explícitas que vinculaban posición y patrón, un 20% de sus alumnos de quinto grado eran capaces de describir la regularidad de manera verbal y simbólica. Con mediación educativa, los estudiantes también eran capaces de generalizar y expresar las reglas y ecuaciones implicadas.

No todos los estudios revisados contienen descripciones explícitas de las acciones educativas, puesto que algunos de ellos estaban centrados en otros temas de investigación. No obstante, dado que potencialmente incluían prácticas que podrían ayudar a los estudiantes a generalizar, las acciones descritas en otros estudios se tradujeron en acciones educativas. Por ejemplo, en un estudio sobre el aprendizaje cooperativo, Soller (2001) observó que los estudiantes tendían a aprender con mayor eficacia en aquellos grupos en los que podían discutir y explicar de manera interactiva sus razonamientos mientras reflexionaban sobre sus conocimientos. Aunque el presente estudio no está relacionado con el aprendizaje cooperativo, se reinterpreta el valor de las acciones del docente (entre las que se incluyen preguntar, explicar, justificar, motivar, aceptar, reformular, sugerir, rechazar, discutir o redirigir) y la interacción del participante. En este estudio, la entrevistadora realizaba estas acciones mientras los alumnos ejecutaban la tarea designaba y describían sus reflexiones y pensamientos. En línea con las aportaciones de Soller (2001), la entrevistadora recabó información sobre el conocimiento y las capacidades de los estudiantes en torno a la generalización, redirigiendo el proceso mediante preguntas específicas cuando lo estimó necesario. Otros autores (Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008) señalaron el papel esencial de la mediación educativa y de acciones como parafrasear, organizar o redirigir las respuestas o procedimientos de los estudiantes para ayudarles a recabar información y mostrar su pensamiento funcional. En el estudio realizado por Soller (2001), así como en las investigaciones realizadas por Mata-Pereira y da Ponte (2017), se observó que la mediación reforzaba o redirigía acciones diseñadas para fomentar el aprendizaje y la expresión del conocimiento adquirido y las capacidades desarrolladas.

Metodología

Este estudio descriptivo, que forma parte de un proyecto de investigación sobre las habilidades algebraicas de los escolares de primaria en contextos funcionales, tiene dos objetivos. En primer lugar, describir las representaciones de las generalizaciones manifestadas por estos estudiantes cuando llevan a cabo una tarea que incluye una relación funcional. En segundo lugar, analizar la relación entre la mediación y su capacidad para representar la generalización durante el desarrollo de dicha tarea. La generalización, como ya hemos indicado, implica establecer una regla general aplicable a todos los elementos del enunciado, de lo particular a lo general.

Se realizaron entrevistas semiestructuradas con ocho alumnos de cuarto grado (de nueve y 10 años), seleccionados expresamente para representar niveles académicos bajo, medio y alto en matemáticas, según la valoración de su profesor.

El año anterior, los mismos estudiantes habían participado en una investigación diseñada para analizar el pensamiento funcional (e.g., Molina et al., 2018; Pinto et al., 2016). Esa fue su primera experiencia con las funciones y el uso de representaciones simbólicas algebraicas y tabulares. Dado que, a raíz de ello, los estudiantes se habían familiarizado con el equipo investigador y habían adquirido cierta experiencia con las tareas de generalización, es posible que se sintiesen más cómodos a la hora de expresar sus razonamientos.

En ese estudio previo participaron 25 estudiantes durante cuatro sesiones (de aproximadamente 90 minutos) en clase, sin enseñanza previa sobre el pensamiento funcional. Los alumnos tenían que trabajar en una tarea escrita por sesión, bien de manera individual o en grupos de tres o cuatro alumnos. Cuando se completaban las tareas, se debatían las respuestas conjuntamente toda la clase. Las tareas se organizaron siguiendo un diseño inductivo, con ejemplos particulares que conducían a un caso general en situaciones en las que intervenía una relación funcional. Todas las tareas requerían determinar el valor de la variable dependiente según un valor definido para la variable independiente, aunque en algunas de las preguntas se invertía el razonamiento. Se introdujeron letras para representar cantidades indeterminadas.

Por ejemplo, en la primera sesión, se explicó a los alumnos que 'María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. Sabemos que María es cinco años mayor que Raúl'. La relación funcional entre las edades de María y Raúl es $f(x) = x + 5$. Se pidió a los estudiantes que calculasen los valores de una variable en función del valor de otra variable y que completasen la tabla con la información obtenida, especificando la operación realizada para determinar cada resultado. En una pregunta se introdujo una letra para designar la edad de Raúl, a partir de la cual, los alumnos tenían que averiguar la de María.

Diseño de la entrevista

La entrevista, estructurada en torno a una situación en la que se daba una relación funcional, se diseñó para ayudar a los estudiantes a progresar hacia una formulación general a partir de casos particulares. La situación descrita era la siguiente: 'A mi familia y a mí nos encanta esquiar. Mientras esquiamos, dejamos el coche aparcado en el parking. El parking tiene una tarifa de 2 euros al entrar y 1 euro por cada hora que está el coche aparcado'. En la correspondiente relación funcional, el número de horas (variable independiente) que el coche está aparcado está asociado al coste en número de euros (variable dependiente).

En la entrevista, los participantes tenían que determinar el número de euros que habría que pagar en el parking según el tiempo que el coche permanecía aparcado, en línea con la siguiente estructura: las primeras siete preguntas incluían un número específico de horas (3, 5, 10, 20, 120, 500). La octava pregunta introducía una cantidad indeterminada de horas como ‘el número de horas, sean las que sean’. La pregunta final implicaba otra cantidad indeterminada, representada por una letra como el número de horas que el coche estaba aparcado en el parking.

Esperábamos que, después de trabajar con cantidades específicas, los alumnos identificasen y representasen numéricamente la relación funcional subyacente. Las dos últimas preguntas estaban diseñadas para ayudar a los estudiantes a formular la relación funcional de manera general, primero verbalmente o utilizando ejemplos genéricos, y después mediante símbolos algebraicos, en particular letras, que representan cantidades indeterminadas con las que explicar brevemente las relaciones funcionales (Stephens, Ellis et al., 2017).

La entrevista era semiestructurada. La entrevistadora complementó las preguntas de la entrevista con otras preguntas para ayudar al alumno a explicitar su razonamiento y para analizar su capacidad de generalización.

Análisis de datos

Tras las entrevistas, se transcribieron y codificaron las grabaciones de video realizadas. Las transcripciones se utilizaron para analizar tanto la mediación de la entrevistadora (básicamente consistente en la orientación del alumno mediante preguntas) como las representaciones de las generalizaciones realizadas por los estudiantes. Las categorías utilizadas en los análisis se basaron en la revisión de los estudios citados en la discusión teórica y en una revisión inicial de los datos recabados. Se definieron dos unidades de análisis. Por un lado, la mediación realizada por la entrevistadora en cada acción que contribuía a facilitar la generalización, que es algo distinto de la mera formulación de preguntas. Por el otro lado, se analizó la respuesta completa de los estudiantes tras cada acción de la entrevistadora y, particularmente, en cada pregunta, cómo estos representaban las generalizaciones. Se definieron dos grupos de categorías para analizar esta información: las representaciones de la relación funcional que realizaron los estudiantes y la mediación de la entrevistadora.

Representaciones de las generalizaciones de las relaciones funcionales

Las representaciones de las generalizaciones se categorizaron en función de las características definidas por Mason y Pimm (1984) y por Radford (2001, 2010). Aquí, se consideró que los estudiantes habían realizado una generalización en una categoría determinada cuando representaban consistentemente la relación funcional de ese modo. Se definieron las cuatro categorías de representación siguientes, basándonos en cómo los estudiantes identificaron y representaron la relación funcional subyacente en la tarea.

Numérica (N): mediante el trabajo con distintas cantidades, el estudiante llegó a identificar la relación funcional subyacente y la expresó haciendo referencia a dichas cantidades. Responde a las preguntas de manera consistente recurriendo a la operación inherente en la relación funcional. Esta categoría se subdividió en dos subcategorías en función de si el estudiante hacía referencia a números menores (N1) o mayores (N2) de 100. Aunque la representación numérica podría ser considerada como ausencia de generalización, nuestra postura es que el alumno percibe lo general en un conjunto de casos particulares. Esta categoría se basa en la generalización factual de Radford (2001) y en el concepto de específico de Mason y Pimm (1984). En el ejemplo siguiente, el estudiante A1 identifica la relación entre un número específico de horas y el coste en euros:

> Entrevistadora [E]: Exacto, dejas el coche en el parking durante 20 horas. ¿Cuánto tendrías que pagar?

A1: Pues 20, si tienes que pagar cada hora, tenemos 20 euros, más los 2 euros de entrada, 22, 22 euros.

Genérica (G): el estudiante identificó la relación funcional en casos generales la expresó mediante un ejemplo utilizando números como ejemplos genéricos. El ejemplo específico surge del propio proceso de razonamiento del estudiante, no de las preguntas formuladas por la entrevistadora. Esta categoría se basa en la caracterización del ejemplo genérico propuesta por Mason y Pimm (1984). A modo de ejemplo, el estudiante A2 exhibió esta representación de la generalización:

E: Imagina que no sabes exactamente cuántas horas hemos dejado el coche en el parking. Voy a escribir 'número de horas', sean las que sean. ¿Cómo has estado calculando cuánto tienes que pagar?

A2: Por ejemplo, 50, un euro por cada hora son 50 euros, luego 50 más 2 euros que tengo que pagar al entrar, son 52 euros.

Verbal (V): el estudiante identifica la relación funcional y la expresa verbalmente en términos generales, haciendo referencia a cantidades indeterminadas. Esta categoría está relacionada con la idea de generalización contextual de Radford (2001) y de lo general (Mason y Pimm, 1984). En el ejemplo siguiente, la estudiante A3 identificó la relación entre el número de horas de parking y el número de euros a pagar, utilizando la expresión 'el número que sea' en referencia a las horas transcurridas:

E: Con un número cualquiera aquí, ¿cómo calcularías el número de euros?

A3: ¿No tengo el tiempo aquí?

E: Sí, pero el problema es que no sabemos el número de horas que está el coche en el parking.

A3: Bueno, pues el tiempo que haya transcurrido.

E: El tiempo que haya transcurrido, ¿y qué haces con el tiempo qua haya transcurrido?

A3: Pues se añade dos al número que sea [en referencia al número de horas].

Simbólica (S): el estudiante identificó la relación funcional y la expresó mediante símbolos algebraicos. En esta categoría se incluyó a los estudiantes que, aunque no lograron representar la relación funcional de manera simbólica por sí solos, sí comprendieron la expresión cuando la entrevistadora se las propuso. Esta categoría se basa en lo que Radford (2001) denominó generalización simbólica, así como en la concepción de *general* expresada por Mason y Pimm (1984). En el extracto siguiente, el estudiante A6 escribió la expresión simbólica representando el total de euros después de que la entrevistadora le explicara la función de la letra z.

E: OK, si decimos z horas, ¿cómo lo escribirías? ¿Se te ocurre cómo?

A6: No sé cuánto es z horas.

E: Es como x, el otro número que no conocemos. Es lo que pasa con las letras, no sabemos exactamente el número que son, porque podrían ser cualquier número.

A6: Bueno, pues podría escribir $z + 2$, el número de horas que estamos allí más los 2 euros de admisión.

E: ¿Y si te digo que son n horas? ¿Cómo lo expresarías entonces?

A6: Pues $n + 2$.

Mediación

La mediación se describe y se analiza en términos de las acciones realizadas por la entrevistadora. Se clasificó en tres grupos según los tipos de acción descritos por Mata-

Pereira y da Ponte (2017): informar-sugerir, apoyar-guiar y cuestionar. Después se desglosó el sistema de clasificación en función de las acciones realizadas por la entrevistadora para favorecer el razonamiento matemático y orientarlo hacia la generalización y su representación. Para ello, partimos de las propuestas de Soller (2001), Mata-Pereira y da Ponte (2017), y da Ponte et al. (2013). Las categorías específicas utilizadas para describir las acciones de la entrevistadora son: reafirmación, sugerencia de procesos, corrección, cambio de rumbo, repetición de información y aclaración.

Informar-sugerir (Mata-Pereira y da Ponte, 2017).

Reafirmación (M1): la entrevistadora aprueba el procedimiento utilizado por el alumno y en ocasiones le pide que lo explique. Incluso cuando la respuesta es incorrecta, se anima al estudiante a persistir o explicar su razonamiento sobre la tarea. En el fragmento siguiente, la entrevistadora verificó y confirmó la relación funcional establecida por el alumno A1 durante el trabajo con un número específico de horas. Esta acción informa y ofrece una posible invitación a continuar y reforzar este tipo de razonamiento:

> A1: Bueno, 20, si tienes que pagar por cada hora y tenemos 20 euros, pues 20 euros más los 2 euros de entrada, 22; 22 euros.
>
> E: Eso es, eso es. Muy bien, no te dejas engañar fácilmente. [M1]

Sugerencia de procesos (M2): la entrevistadora sugiere o insinúa un proceso, o más bien la búsqueda de un procedimiento para encontrar la respuesta, en ocasiones aludiendo a procedimientos que se han utilizado previamente y fomentando la discusión y la recolección de datos. En el fragmento siguiente, se anima al alumno a que reflexione sobre el procedimiento que ha seguido y que explique cómo llegó a establecer la relación funcional:

A6: 1,002 euros.

E: ¿Cómo lo sabes, A6? [M2]

A6: Pues, porque cada hora cuesta un euro, y me dices, por ejemplo, 1,000, y añado 2.

Cuestionar (Mata-Pereira y da Ponte, 2017).

Corrección (M3): diseñada para identificar y corregir errores. Al pedir a los alumnos que confirmen los resultados, la entrevistadora promueve la identificación de errores. La mediación realizada a continuación ocurrió después de un error cometido por el estudiante A1 cuando trabajaba con números concretos. La mediación le ayudó a comprobar y corregir su respuesta:

E: Aquí hay algo que no acabo de entender. Tu respuesta dice que una hora

cuesta un euro, pero si estás allí solo una hora, ¿cuánto tienes que

pagar? [M3]

A1: 3 euros.

Cambio de rumbo (M4): el objetivo es guiar y ayudar al alumno en sus progresos y obtener respuestas distintas a las surgidas inicialmente. La entrevistadora parafrasea o reformula sus observaciones y preguntas, o redirige el proceso de adquisición de información. Este tipo de mediación se ejemplifica en el fragmento siguiente. Cuando se introduce la letra x con el alumno A6, este explica la relación funcional verbalmente y con ejemplos específicos. La entrevistadora entonces cambia de rumbo para incitar al estudiante a explicar el uso de la letra presentando la expresión $x + 2$. En consecuencia, el estudiante acaba por exponer una generalización simbólica (véase la sección de Resultados más adelante).

E: ¿Podríamos escribirlo así? Si te digo cuántos euros costará y lo escribo así, x + 2, ¿qué te parece? ¿Es posible? ¿Es distinto de lo que tú has dicho? [M4]

A6: A ver, sí, es posible porque x es un número, cualquier número, porque si añades 2, te da lo que tienes que pagar.

E: ¿Y lo podrías escribir así, $x + 2$?

A6: Sí.

Apoyar-guiar (Mata-Pereira y da Ponte, 2017).

Repetición de información (M5): la entrevistadora repite ciertos datos o hace referencia a resultados anteriores. En el extracto siguiente, después de que la alumna A3 verbalizase la generalización al introducir la letra x, la entrevistadora repite el significado de la letra:

E: ¿Y cómo lo escribirías utilizando la x, se te ocurre cómo escribirlo?

A3: [niega con la cabeza]

E: Si x es el número de horas, ¿cómo lo harías? [M5]

Aclaración (M6): la entrevistadora aclara su mediación o introduce información nueva durante la entrevista. En la última pregunta, la entrevistadora recurre con frecuencia a la mediación de tipo M6 para explicar el uso de las letras en representación de cantidades indeterminadas. Este tipo de mediación se ilustra, por ejemplo, en la siguiente descripción de la generalización simbólica:

A6: No sé qué es z horas.

E: Es como x, el otro número que no conocemos. Siempre es así con las letras, no sabemos exactamente qué número es porque podrían ser cualquier número. [M6]

Resultados

En esta sección se presentan y discuten los resultados más destacados. En la Tabla 5.1.1 se muestra el número de estudiantes que realiza cada una de las representaciones de la generalización en cada pregunta. El primer valor indica el número que lo hizo sin ningún tipo de ayuda cuando se les formuló la pregunta correspondiente, y el segundo, entre paréntesis, muestra el total de alumnos en esa categoría. Por ejemplo, en la pregunta 8, el valor 2 (5) bajo el epígrafe 'representación verbal' indica que cinco alumnos realizaron una representación verbal de la generalización; dos de ellos sin ningún tipo de ayuda y tres con la mediación de la entrevistadora. Por otro lado, en una misma pregunta, un estudiante puede representar la generalización de modos distintos. Por ejemplo, en la pregunta 9, algunos estudiantes que representaron la generalización de manera simbólica también lo hicieron numéricamente, verbalmente o genéricamente, como se detalla en las secciones siguientes.

Tabla 5.1.1. *Número de estudiantes que representan la generalización, con y sin mediación*

	Representación de la generalización				
Pregunta	N1	N2	G	V	S
1-5	5(8)				
6-7		7(8)		0(1)	
8			1(4)	2(5)	
9	1(3)		2(5)	2(4)	1(4)

Nota: El valor anterior al paréntesis indica el número de estudiantes que expresaron cada representación sin relación con la mediación, mientras que el valor entre paréntesis indica el número total de estudiantes que expresaron esa representación. El sombreado indica la representación de la generalización esperada en función del tipo de pregunta.

En todas las categorías de representación de la generalización, cuando se tiene en cuenta la relación entre la representación y la mediación del entrevistador, el total de estudiantes que lleva a cabo la representación incrementa, como se aprecia en la cifra entre paréntesis en la Tabla 5.1.1.

Todos los estudiantes reconocieron la relación funcional subyacente en la tarea. La representación de la generalización que se observa en las repuestas está en línea con lo esperado en todas las preguntas excepto en la última, donde se observa menos sofisticación de la esperada.

En la Tabla 5.1.2 se indican los tipos de mediación en relación con la primera identificación y representación de las generalizaciones realizada por los estudiantes durante la entrevista. No se trata de la primera mediación relacionada con cada una de las representaciones de la generalización y con cada estudiante, como se aprecia en las secciones siguientes. Por ejemplo, en algunos casos, un estudiante podría haber manifestado una representación de una generalización sin relación directa con la mediación de la entrevistadora y en otras ocasiones podría haber manifestado la misma representación pero relacionada con la mediación.

Tabla 5.1.2. *Tipos de mediación que motivan la expresión de cada representación de la generalización por primera vez durante la entrevista*

	Representaciones de la generalización				
Estudiante	N1	N2	G	V	S
A1	U	U	M4	M2, M6	
A2	U	U	U		
A3	M3, M5	U	M5, M6	M5, M2	M5, M2
A4	M4, M1	M3, M4		U	
A5	U	U	M4, M5, M2	M4, M5, M2	
A6	U	U	M2	M4	M4, M5
A7	U	U		M2	U
A8	M3	U	M2	U	M4, M2
Total*	5(8)	7(8)	1(6)	2(7)	1(4)

Nota: U = exhibida sin mediación; M1 = reafirmación; M2 = sugerencia de procesos; M3 = corrección; M4 = cambio de rumbo; M5 = repetición de información; M6 = aclaración. *El valor anterior al paréntesis indica el número de estudiantes que expresaron la representación de la generalización sin mediación (con independencia de la pregunta) y el valor entre paréntesis indica el número total de estudiantes que expresaron la representación en cada categoría. Una celda vacía significa que el estudiante no logró representar la generalización, ni siquiera tras la mediación de la entrevistadora.

Se observó una relación entre la mediación y la primera identificación de la generalización, en particular con las representaciones genéricas, verbales y simbólicas. En la representación numérica, la principal mediación asociada fue de tipo M3 (corrección), mientras que M2 (sugerencia de procesos) y M4 (cambio de rumbo) se vincularon con las representaciones genéricas y verbales. La representación simbólica de la generalización se asoció con mediaciones de tipo M2, M4 y M5 (repetición de información).

Representaciones de la generalización y su relación con la mediación

A continuación se discuten los resultados más significativos para cada representación, incluido el modo en que los estudiantes expresan la generalización, la relación con la mediación de la entrevistadora en su capacidad para expresarla y las preguntas particulares formuladas.

Numérica

Todos los estudiantes mostraron esta representación de la generalización en las primeras preguntas (véase Tabla 5.1.1). Cinco estudiantes fueron capaces de generalizar sin mediación, mientras que los otros tres requirieron ayuda, cometiendo errores incluso en tareas con números menores de 100. En este caso, la mediación tipo M3 estaba asociada con la corrección de errores.

Siete de los ocho estudiantes que mostraron representación numérica de generalización para cifras menores de 100 no necesitaron ayuda para expresar esa categoría con números mayores. La excepción, el estudiante A4, no consiguió identificar correctamente las operaciones necesarias para responder a las preguntas que involucraron los casos específicos. En función de la pregunta, A4 contaba mentalmente, sumaba una y otra vez, o recurría constantemente a resultados anteriores para determinar los nuevos. Utilizando estas estrategias, dio ocasionalmente con la respuesta correcta, pero no identificó la relación funcional, ni siquiera con ayuda. Estaba más interesado en responder a las preguntas (la mayoría de las veces de manera incorrecta) que en identificar un patrón que le hubiese permitido encontrar la solución de manera más eficiente.

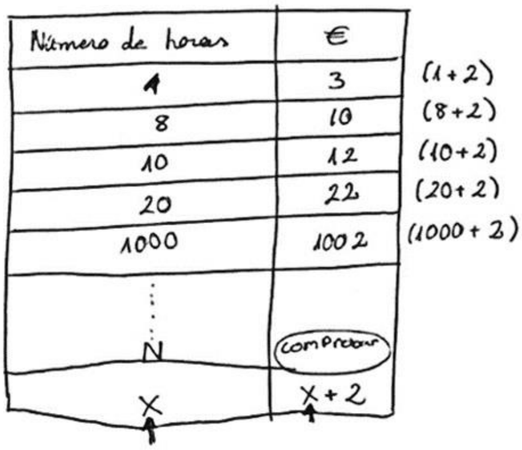


Figura 5.1.1. Tabla resumen del estudiante A5

En el siguiente extracto se observa cómo cambia su respuesta por otra todavía más alejada de la relación subyacente:

> E: Imagina que un día vas a esquiar y pasas todo el día allí. Naturalmente, tienes que dejar el coche en el parking todo el día y está aparcado 10 horas. ¿Cuánto tendrías que pagar?
>
> A4: Pues… 10 horas, 5 + 1 es 6; 6 + 1, 7; 7 + 1, 8; 8 + 1, 9; 9 + 1, 10, 10 + 1, 11: serían 21.

En casos muy específicos, con números como 1,000 o 1,000,000, el estudiante calculó el resultado en euros de manera correcta, con el número más 2. En estos casos, las mediaciones de tipo M3 (corrección) y M4 (cambio de rumbo) le ayudaron a encontrar las respuestas correctas.

La mediación de tipo ‘cuestionar’ estaba vinculada con esta representación de la generalización, en particular la corrección de errores. Los resultados revelaron que la mediación M1 (reafirmación), en la que se aseguraba a los estudiantes que sus respuestas eran correctas, mejoró la fluidez de la entrevista.

Los tres estudiantes que expresaron esta categoría de la generalización en la pregunta 9 necesitaron recurrir a valores específicos para verbalizar la relación funcional cuando se les propuso el uso de letras. Dos de estos estudiantes (A2 y A8) asignaron inicialmente un valor único a las letras, basado bien en su posición en el alfabeto (donde $n = 13$) o en su significado como numeral romano ('dado que *x* en números romanos es 10, entonces serían 12 [euros]'). Tras la intervención en forma de M4 (cambio de rumbo) y M2 (sugerencia de procesos), el estudiante A2 llegó a generalizar de manera genérica. El uso de letras no supuso un obstáculo para el estudiante A8, que tras la mediación fue capaz de utilizar símbolos (al sustituir una letra por otra).

Tras componer la tabla que se muestra en la Figura 5.1.1 con ayuda de la entrevistadora, el tercer estudiante, A5, identificó la relación 'número de horas + 2' analizando las operaciones que se muestran entre paréntesis. La alumna identificó la relación funcional, aunque cuando se introdujeron las letras *n* y *x*, explicó que tendría que comprobar con el número exacto de horas (e.g., comprobando los vídeos de seguridad).

Genérica

Seis estudiantes mostraron esta representación de la generalización, solo uno sin intervención de la entrevistadora (véase Tabla 5.1.2). Este tipo de representación se observó en las dos últimas preguntas, cuando se pedía al estudiante que calculase el número de euros que podría costar 'para cualquier número de horas' o que utilizase una letra para representar esa idea.

El estudiante A2 utilizó esta representación en la pregunta 8 sin ayuda de la entrevistadora (véase Tabla 5.1.1) generalizando la relación funcional mediante números específicos (no utilizados en las preguntas anteriores):

E: Bien, voy a anotar algo aquí. Imagina que no sabes exactamente cuántas horas hemos dejado el coche en el parking. Voy a escribir aquí 'número de horas' sean las que sean. ¿Cómo has estado calculando cuánto tienes que pagar?

A2: Por ejemplo, 50. Uno por cada hora, son 50, más 2 que tengo que pagar cuando entramos, son 52.

Los principales tipos de mediación que se asocian con esta representación de la generalización son sugerencia de procesos (M2) y cambio de rumbo (M4). La primera motivó a los estudiantes a razonar sobre cómo calcularían el coste en número de euros para cualquier número de horas. Con algunos estudiantes, el cambio de rumbo (M4) fue ilustrado mediante un ejercicio en el que se les pedía que dibujasen un cartel con los precios del parking. La idea era ayudarles a utilizar una explicación más general de la utilizada hasta entonces.

El estudiante A1, por ejemplo, recurrió a casos particulares para explicar su interpretación, haciendo uso de una representación genérica de la generalización. Incluso cuando se le formuló una nueva pregunta sobre los precios del parking que implicaba el uso de una letra para representar el número de horas, su respuesta fue genérica en lugar de simbólica:

E: Voy a anotar algo aquí. Imagina que no sabemos cuántas horas vamos a dejar el coche en el parking. Sabemos que serán unas cuantas y las vamos a llamar *n*. ¿Cómo calcularías cuánto tenemos que pagar por *n* horas?

A1: ¿Qué número es *n*? No lo sé, si es 30 horas, tendremos que pagar lo que indican los precios del parking.

E: Y si, por ejemplo, aquí apuntamos que son '*n* horas', ¿cómo sabrías cuánto hay que pagar?

A1: Como antes, el número de horas que está el coche en el parking.

E: Vale… vamos a llamar a esto ‘el número de horas’. ¿Cómo calcularías el número de euros?

A1: Pues una hora un euro, más 2 por la entrada y si estuviese 30 horas, serían 32.

Después de la mediación, algunos estudiantes oscilaban entre la representación verbal y la representación genérica de la generalización. A5, por ejemplo, no conseguía comprender el concepto de un número desconocido de horas. Cuando se le pidió que calculase el coste sin saber el número de horas, finalmente identificó la relación funcional ‘2+ número de horas’:

E: *x* horas, no sabemos cuántas, pero ponemos *x*. Entonces te digo que sé que eran *x* horas. ¿Cuánto habrá que pagar?

A5: No sé, podría ver los vídeos de seguridad y comprobar cuántas horas lleva el coche allí.

E: Y cuando supieses el número de horas que estuvo el coche en el parking, ¿cómo calcularías cuánto hay que pagar?

A5: Pues siempre un euro por hora, más dos. Si fuese un millón de horas, serían un millón de euros más 2.

Verbal

Siete estudiantes representaron la generalización de manera verbal, dos de ellos sin mediación. Esta representación de la generalización se observó casi exclusivamente en las dos últimas preguntas de la entrevista, cuando el número de horas era indeterminado. A continuación se describe la única excepción.

En las preguntas sobre casos particulares, la alumna A5 representó la generalización de manera verbal. El extracto siguiente ilustra su respuesta a la pregunta sobre el coste para 120 horas:

> E: ¿Qué has estado hacienda hasta ahora, A5?
>
> A5: Porque cuando entramos, me has dicho que cuando entramos al parking hay que pagar 2 euros y después de una hora hay que pagar otro euro, y otro euro, y otro euro, pues añadimos 2 a cada número [en referencia al número de horas].

Sin embargo, a pesar de esta expresión de una generalización verbal en respuesta a las preguntas sobre casos particulares, la alumna se resistió a aceptar el concepto indeterminado de 'cualquier número de horas' y la letra que representaba esta idea.

Dos estudiantes representaron las generalizaciones verbalmente sin mediación específica de la entrevistadora en la octava pregunta, mientras que otros requirieron ayuda para expresar sus ideas o comprender las preguntas.

El tipo de mediación utilizado con mayor frecuencia en relación con las representaciones verbales de las generalizaciones fue la de sugerencia de procesos (M2). Como se indica en la Tabla 5.1.2, cuatro de los siete estudiantes que expresaron una representación verbal por primera vez lo hicieron tras recibir una mediación de tipo M2. Se pidió a los estudiantes que explicasen y confirmasen su razonamiento y asumiesen una posición en tanto que se les preguntó sobre el procedimiento utilizado o que utilizarían o bien se les pidió que organizasen sus ideas para definir qué podían hacer.

Después de que la entrevistadora repitiese información (M5) y sugiriese procesos (M2), la estudiante A3 progresó desde no saber qué responder a representar la generalización de manera verbal, respondiendo que añadiría 2 al número de horas de parking.

Se observó una relación visible de la mediación con la transición de la generalización genérica a verbal en las dos últimas preguntas. Cuando se le pidió al estudiante A6 que generalizase cuánto costaría ‘cierto número de horas’, el alumno ofreció un ejemplo específico (183 horas), señalando que ese número tendría que incrementarse en 2 (generalización genérica). La entrevistadora reformuló la pregunta (M4), y le preguntó cómo explicaría las tarifas del parking a otras personas. Aunque al principio se mostró algo confuso, al final el alumno recurrió a la representación verbal de la generalización, con la respuesta: ‘Bueno, el número de horas que estás en el parking son un euro [cada una], pero luego tienes que añadir dos euros porque es lo que cobran al entrar’.

La estudiante A8, tras explicar que ‘entonces sumo las horas que ha estado el coche en el parking y añado 2’, pasó a utilizar números concretos después de una mediación de tipo M2 (en la que la entrevistadora le preguntó cómo calcularía cuánto costaría ‘un número de horas’). De este modo, esta estudiante progresó de una representación verbal a una representación genérica de la generalización. Resulta de especial interés que, en las dos últimas preguntas, cinco de los siete estudiantes que recurrieron a una representación verbal de la generalización, también utilizaron una representación genérica (véase Tabla 5.1.2).

Simbólica

En sus explicaciones, tres de los cuatro estudiantes (A3, A7 y A8) que representaron la generalización de manera simbólica demostraron comprender el uso de las letras para representar la relación funcional subyacente cuando se les presentó la expresión algebraica. El cuarto estudiante (A6) utilizó la notación simbólica sugerida para anotar la relación funcional por sí mismo. Los cuatro estudiantes representaron la generalización simbólica en la última pregunta. Las letras introducidas para expresar cantidades indeterminadas eran, en su mayoría, *n*, *x*, *y*, o *z*.

Después de expresar la relación funcional verbalmente en la pregunta anterior, la estudiante A7 explicó que era lo mismo que antes, ‘porque, serían esas *x* horas, como aquí [señala los resultados anteriores], excepto que en lugar de un número, sería *x*’. Cuando se le preguntó cómo lo escribiría, la alumna replicó: ‘añades los 2 euros de entrada a *x* y tienes la respuesta’. Aunque no logró escribir la expresión $x + 2$, la aceptó como válida cuando la entrevistadora se la propuso, respondiendo que era lo mismo pero ‘resumido en números y *x*’.

La representación simbólica de las generalizaciones se asoció a las mediaciones de tipo M2 (sugerencia de procesos), M4 (cambio de rumbo) y M5 (repetición de información). Con el tipo M2, la entrevistadora sugirió a los estudiantes encontrar una manera de calcular el resultado utilizando la letra propuesta. Con el tipo M4, se redirigieron las respuestas de los estudiantes, proponiendo la expresión $x + 2$, por ejemplo, y preguntándoles si significaba lo mismo que ellos estaban diciendo. En otro ejemplo de este tipo de mediación, se pidió a los estudiantes que formulasen la expresión para la cantidad a pagar después de cambiar la letra que representaba las horas de *n* a *x* (u otras). En la mediación M5, la entrevistadora reformuló el significado de la letra o su papel en la situación.

A la estudiante A3, tras exhibir una representación verbal de la generalización en respuesta a la octava pregunta, se le pidió que calculase cuánto costaría el parking si el número de horas fuese *x* (pregunta 9). A3 basó su respuesta en la respuesta anterior: ‘Bueno, ya lo he hecho aquí. Porque añades 2 a la cantidad de horas que sea’. Dicho de otro modo, la estudiante comprendió que independientemente de la representación utilizada para ‘cualquier número de horas’, bastaba con añadir 2. Aunque decía no saber cómo expresar esa idea, A3 reconoció la expresión $x + 2$ cuando la entrevistadora la escribió. Cuando esta le preguntó sobre cambiar x por n, la estudiante explicó que ‘entonces sería n más 2’.

En otro caso, cuando la entrevistadora introdujo la letra x y le preguntó la cantidad que debía pagar, el estudiante A6 respondió ‘bueno, si tienes x horas y le añades 2, a todas las horas que has estado allí le añades 2. Por ejemplo, si estás ahí 10 horas, añades 2 y si estás 3 horas, añades 2’. Cuando se le mostró la expresión $x + 2$, el estudiante la aceptó como una representación válida de la cantidad a pagar. Tras cierta confusión inicial sobre el cálculo del coste para z horas y después para n horas, A6 se dio cuenta de que el coste sería $n + 2$ o $z + 2$.

Como ya se ha indicado, la estudiante A8 asoció x al numeral romano, aunque más tarde realizó una generalización verbal. La entrevistadora sugirió el uso de la letra z y repitió la pregunta sobre el cálculo del coste, a lo que la alumna respondió ‘el número que sea z, más 2’. Después, cuando se le preguntó si la expresión $z + 2$ significaba algo, A8 respondió que sí, porque z podía ser cualquier número, más 2.

Ninguno de los demás estudiantes generalizó con símbolos. Tres de ellos no atribuyeron ningún tipo de significado al uso de las letras o rehusaron combinarlas con operaciones numéricas. Por el contrario, cuando se le pidió al estudiante A4 (que había mostrado dificultades expresando la idea), que calculase el resultado utilizando la letra n, este respondió que debería considerarse como un número y que el resultado sería ‘n 2’. La respuesta se interpretó como referencia a la apariencia del resultado: para números con unidades entre el 0 y el 7, añadir 2 no cambiaría la columna de las decenas, así que representó el resultado utilizando *n* como dígito de las decenas y un número para las unidades (*n*1, *n*2, *n*3, *n*4, *n*5 … *n*9).

Discusión

Según los resultados indicados anteriormente, los ocho estudiantes entrevistados reconocieron y representaron la relación funcional subyacente en la tarea y fueron capaces de expresar esa comprensión al justificar sus respuestas. Todos representaron la generalización de manera numérica en las primeras siete preguntas con casos particulares, aunque a algunos de ellos se les cuestionó (M3 y M4) y corrigieron los errores o adoptaron otros enfoques. Los estudiantes reconocieron la relación funcional con menos dificultad a medida que iban trabajando los casos particulares. Cuando fueron capaces de representar la generalización numéricamente con cifras menores de 100, no tuvieron dificultad en representar la generalización con cifras mayores.

Aunque siete de los ocho estudiantes generalizaron verbalmente, todos menos uno requirieron algún tipo de ayuda (principalmente mediante la sugerencia del proceso) para hacerlo. En la mayoría de los casos, que la representación que hiciese el estudiante fuese verbal o genérica estuvo vinculado con la mediación de la entrevistadora. Por ejemplo, cinco de los seis estudiantes que representaron la generalización de manera genérica por primera vez, recibieron la mediación de la entrevistadora, y cinco de los siete estudiantes en el caso de la representación verbal (véase Tabla 5.1.2). En las dos últimas preguntas, cinco estudiantes utilizaron representaciones tanto verbales como genéricas, lo que indica que no hubo prevalencia de ninguno de los dos tipos de representación de la generalización sobre la otra cuando se trataba con cantidades indeterminadas. Como señaló Radford (2018), si bien los estudiantes son capaces de reconocer las variables y la relación funcional entre ellas, su capacidad de expresar verbalmente estos conceptos es limitada. No obstante, se observó que recurrían a otras fuentes (e.g., expresiones verbales de indeterminación o ejemplos genéricos), lo que demuestra su capacidad de pensamiento algebraico y de expresar relaciones funcionales sin utilizar el simbolismo algebraico.

La representación simbólica de la generalización se observó en cuatro estudiantes que comprendieron el uso de letras y de enunciados algebraicos para expresar relaciones funcionales aunque no utilizasen un lenguaje algebraico por ellos mismos. Con una única excepción, la entrevistadora cuestionó a estos estudiantes (M4, cambio de rumbo), les informó (M2, sugerencia de procesos) o les ayudó (M5, repetición de información) para motivar la representación de la generalización. Los otros cuatro estudiantes tuvieron dificultades para comprender el papel de las letras o incluso se negaron a utilizarlas. Estos resultados son consistentes con los presentados por Molina et al. (2018) en un estudio anterior con el uso de letras y con los mismos participantes un año antes: algunos estudiantes tendían a asignar valores fijos a las letras en función de su posición en el alfabeto o no lograban considerarlas cantidades indeterminadas. Los autores describieron las mismas reacciones iniciales con estudiantes de tercer grado, cuando se les propuso el uso de letras para representar cantidades indeterminadas en la relación $y = x + 5$. Los resultados del presente estudio confirman la persistencia de ciertas interpretaciones de las letras, como es de esperar dada la escasa experiencia anterior de los estudiantes con el uso de letras en contextos matemáticos. En otros estudios (Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008), participantes más jóvenes que los estudiantes entrevistados aquí demostraron su capacidad de utilizar letras. No obstante, esos estudiantes más jóvenes habían recibido instrucción previa. En nuestro estudio, a pesar de recibir ayuda específica, solo la mitad de los participantes lograron comprender la noción de simbología en las relaciones funcionales.

En las dos últimas preguntas, que trataban casos generales, los estudiantes interactuaron de manera más dinámica con la entrevistadora y utilizaron más recursos (tales como casos particulares o expresiones verbales que aluden a lo indeterminado) para expresar sus ideas y la relación funcional de manera más general. Otros recursos semióticos (Radford, 2018) como las expresiones numéricas y verbales, también resultaron muy útiles para evaluar los indicios de pensamiento algebraico de los alumnos. Por otra parte, algunos estudiantes representaron la generalización en una categoría determinada en una pregunta y después necesitaron ayuda en otra pregunta para esa misma representación de la generalización, un resultado que podría atribuirse parcialmente al hecho de que la situación propuesta en cada pregunta variaba y planteaba distintos retos.

En el trabajo con casos particulares, los estudiantes requerían mucha menos ayuda que cuando se trabajaron expresiones para valores indeterminados. Se observó que algunas de las dificultades se debían a su falta de experiencia con el simbolismo algebraico y con los recursos expresivos requeridos para formular sus ideas. Uno de los estudiantes representó la relación funcional de manera simbólica y otros explicaron el significado de la expresión que representaba la relación cuando se les sugirió. Como ya propusieron Blanton et al. (2015), el uso que los estudiantes hacen de los distintos tipos de representación para explicar las relaciones funcionales puede considerarse como un medio para guiar su razonamiento, además de una fuente de información sobre su comprensión de estas funciones (Blanton, 2008).

La mediación motivó a los estudiantes a responder y a reforzar sus ideas y los constructos asociados al reconocimiento y la representación de las relaciones funcionales. También permitió la transición entre distintas representaciones de la generalización. La mediación de la entrevistadora fue de gran valor para ayudar a los estudiantes a expresar sus capacidades algebraicas en el contexto de la generalización. La mediación asociada a las acciones de informar-sugerir y desafiar o cuestionar resultó de particular utilidad. La mediación de tipo M2 (sugerencia de procesos) se vinculó con ayudar a los estudiantes a consolidar sus ideas sobre la relación funcional y la operación estudiada. El tipo M4 (cambiar de rumbo) alentó a los estudiantes a centrar su esfuerzo intelectual en la identificación, definición y expresión de la relación funcional. Guio sus representaciones de la generalización de la relación funcional y les ofreció opciones para razonar con mayor efectividad, al tiempo que presentaban explicaciones sobre la relación existente entre las variables.

Conclusiones

Los resultados obtenidos, basados en un estudio realizado en España, corroboran los de estudios anteriores (Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2011; Carraher et al., 2008; Warren, 2006) respecto a que los escolares tienen las capacidades matemáticas y las aptitudes algebraicas necesarias para generalizar las relaciones funcionales. Cuando realizaban una tarea en la que intervenía una relación funcional, los estudiantes fueron capaces de reconocer y representar la generalización de la relación funcional en distintos modos.

El estudio pone de relieve el papel de las funciones, especialmente del pensamiento funcional, como una manera de introducir el razonamiento algebraico y permitir a los alumnos desarrollar las aptitudes necesarias (Blanton y Kaput, 2011), tales como la generalización de las relaciones entre cantidades y la representación y gestión de cantidades indeterminadas en distintas situaciones.

La principal contribución del estudio reside en la propuesta de categorización de representaciones específicas de la generalización y los tipos de mediación del entrevistador en tareas que involucran relaciones funcionales. La implementación de estas categorías permite evidenciar las capacidades de los escolares de generalizar en contextos funcionales.

Los resultados también complementan investigaciones actuales. En Blanton et al. (2015) se caracterizaron distintos niveles de sofisticación en el pensamiento infantil en contextos funcionales en un entorno de enseñanza y aprendizaje. Radford (2001, 2010) definió distintos estratos de generalización algebraica en tareas de patrones en términos del reconocimiento de los aspectos comunes y su representación progresivamente más general. En el presente estudio hemos identificado representaciones de la generalización basadas en el reconocimiento por parte de los estudiantes de la relación funcional subyacente en la tarea y el modo en que expresa esta relación, en ausencia de instrucción previa. También ofrecemos distintas categorías de mediación que favorecen el razonamiento y mejoran las aptitudes del alumno para generalizar, basadas en los resultados obtenidos por Mata-Pereira y da Ponte (2017), Ponte et al. (2013) y Soller (2001).

Este estudio proporciona conocimientos sobre el modo en que la mediación puede ayudar a los estudiantes a representar las generalizaciones. A su vez, ofrece una información útil para el diseño de las tareas y sugiere maneras en que los docentes pueden motivar a sus estudiantes a participar de manera activa y ayudarles a desarrollar su pensamiento funcional. Estos resultados corroboran y complementan las acciones descritas por Warren (2006) para el fomento de la capacidad de generalizar. La mediación del profesor puede alentar a los alumnos a lograr ese objetivo. Por ejemplo, la mediación en forma de cambio de rumbo puede incluir acciones tales como guiar las respuestas de los estudiantes en una dirección distinta, parafrasear las preguntas, proponer distintos tipos de representación (por ejemplo, ilustraciones), sugerir el uso de materiales manipulativos o inventar situaciones hipotéticas que requieren explicaciones y argumentos que demuestran la comprensión de la relación funcional.

Los resultados actuales corroboran algunos de los resultados obtenidos por Blanton (2008) y Blanton y Kaput (2004), que mostraron que los jóvenes son capaces de trabajar y describir situaciones que requieren el pensamiento funcional, así como relaciones entre cantidades covariables. Los autores observaron el progreso y la sofisticación de los alumnos en el uso de las representaciones matemáticas de un grado a otro. En este estudio, las transiciones entre distintas representaciones de la generalización se observaron en un único grado durante una única tarea, en la que los estudiantes avanzaron desde las expresiones verbales de indeterminación a la comprensión y el uso de símbolos para describir y expresar una relación funcional.

Este estudio sugiere una nueva pregunta de investigación: ¿Cómo generalizarían los estudiantes de primaria y cómo progresarían en la formulación de representaciones de una generalización durante varias sesiones en el contexto de una clase? Este análisis también contribuiría a mejorar nuestro conocimiento de la relación de la mediación descrita aquí con la generalización, trasladada a un contexto de mediación del profesor en el aula.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de los estudios doctorales del primer autor, con la ayuda de la Universidad de Costa Rica. Este estudio se desarrolló como parte del proyecto de Investigación y Desarrollo EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad español.

Referencias

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-old's thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*, 511–558.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student´s capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5–23). Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares.

Carraher, D. W, Martínez, M. V. y Schliemann, A. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. ZDM Mathematics Education, *40*, 3–22.

Carraher, D. W, Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2003). *Treating operations as functions*. Paper presented at the Psychology of Mathematics Education - NA XXII, Tucson, AZ.[12]

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. UNO, *54*, 55–67.

[12] Errata. Esta referencia corresponde al siguiente trabajo:

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–Second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and calculus. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–38). Sense Publishers.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University and Paul Chapman Publishing.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. The Open University Press.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277–287.

Mata-Pereira, J. y Da Ponte, J.-P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 169–186.

McEldoon, K. L. y Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the Thirty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Optimizing Student Understanding in Mathematics* (pp. 202). Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6*, *2*(1), 24–40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria* (Vol. BOE N°52, pp. 1-58). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Molina, M., Ambrose, R. y Del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 261–280). Springer.

Pinto, E., Cañadas, M.C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández y A. Bercian (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417–426). SEIEM.

Polya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?*. Trillas.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas [Teacher actions in the conduction of mathematical debates]. *Quadrante*, *22*(1.a), 55–81.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalization in algebra. En M. van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81–88). PME.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*, 37–62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3–25). Springer.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Lawrence Erlbaum Associates.

Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *12*, 40–62.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). NCTM.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, M. Krátka y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377–384). PME.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73–108). Sense Publishers.

5.2. Estudio 2:

Generalisation strategies and representations used by last-year elementary school students

Jason Ureña[a], Rafael Ramírez[b], María C. Cañadas[c] and Marta Molina[d]

[a,b,c]Universidad de Granada, Granada, Spain; [d]Universidad de Salamanca, Salamanca, Spain

Abstract: Recent research has highlighted the role of functional relationships in introducing elementary school students to algebraic reasoning. This paper describes the strategies and representations of generalisation used by a group of 33 sixth-year elementary school students, with no former algebraic training, in two generalisation tasks involving a functional relationship. The strategies applied by the students differed depending on whether they were working on specific or general cases. To answer questions on near specific cases they resorted to counting or additive operational strategies. As higher values or indeterminate quantities were considered, the strategies diversified. The correspondence strategy was the most used and the common approach when students generalised. Students were able to generalise verbally as well as symbolically and varied their strategies flexibly when changing from specific to general cases, showing a clear preference for a functional approach in the latter.

Keywords: algebraic thinking, early algebra, generalisation, strategies, functional relationships, representations.

Introduction

Research on algebraic reasoning at early ages is a fertile field of study with significant implications in light of the breadth with which it has been addressed (Cañadas et al., 2019). Interest in the area has been further prompted by the new century's demands, which call for cultivating the ability to envisage the depth of the structures underlying mathematics (Blanton & Kaput, 2005). The early algebra curricular proposal promotes instruction in and the development of algebraic reasoning by affording an opportunity for deeper and more complex mathematical training from the time children are first schooled (Blanton & Kaput, 2005). The proposal has materialised with the inclusion of algebraic thinking in a number of countries' elementary school curricula (Merino et al., 2013). In the case of Spain the elementary school curriculum indicates that throughout this stage it is intended that students can "describe and analyse situations of change, find patterns, regularities and mathematical laws in numerical, geometric and functional contexts, valuing their usefulness to make predictions" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a, p. 33).

We focus our interest in the functional approach to algebraic thinking that entails studying functions, relationships and change (Kaput, 2008). "Thinking in terms of and around relationships" (Rico, 2007, p. 56), i.e., functional thinking, is acknowledged to be one of the main components of algebraic reasoning (Warren & Cooper, 2005). Functional thinking favours the creation of a space for algebraic reasoning-linked experience, including reasoning, dealing with, generalising and representing the relationships existing between covarying quantities (Blanton et al., 2015; Blanton et al., 2011; Kaput, 2008; Stephens, Ellis et al., 2017).

Within this context, we focus on the strategies and representations that students use when generalising a functional relationship. Current research reveals the interest of in depth studying students' solving strategies in generalisation tasks (e.g., Amit & Neria, 2008; El Mouhayar & Jurdak, 2015), especially in functional contexts (e.g., Merino et al., 2013; Morales et al., 2018). Moss & Beatty (2006) suggest that students find difficult to identify and justify the functional relationships underlying mathematical problems due in part to the strategies used. In elementary education, even in the latter years, applying strategies that would lead to effective generalisation is a challenge for students (Barbosa et al.; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Therefore, more research is needed to better understand the relation between strategies used and the achievement of generalisation. The aim of this paper is to identify students' strategies in two generalization tasks and how they represent the generalization of the functional relationships they recognize within the variables involved. We work with students who are ending elementary education and have not received any formal algebraic instruction yet.

Generalisation and representation

Generalisation plays an instrumental, even a core, part in mathematics (Mason et al., 1989). It lies at the heart of algebra (Mason et al., 2005). In their various approaches to generalisation, most authors stress recognition of regularity, generation of new cases and representation.

Pólya (1989) conceived generalisation to be the generation of new cases based on the regularity identified in a set of elements. Kaput (1999) referred to generalisation as extending reasoning beyond the cases considered by either explaining the similarity present or broadening reasoning by focusing on patterns, procedures and structures and their inter-relationships. Radford (2010) define algebraic generalisation as the ability to recognise regularity in a sequence of elements, realise its validity for all the elements of the same class and consequently formulate an expression to represent it. Stephens, Ellis et al. (2017) distinguish between generalisation as a process and as a product, defining the latter as the result of any of these processes: identifying the regularity across cases, reasoning beyond the cases at issue or broadening the results beyond specific cases.

In this study we assume Kaput's definition of generalisation (1999) applied to the functional context. It involves identifying, evidencing and representing the regularity underlying the task and associating the quantities involved.

One of the highlights of the generalisation process is progressively symbolic representation (Kaput, 2008). Representation is indisputably associated with generalisation and algebraic thinking (Kaput, 2008; Radford, 2018). Such thinking is not expressed exclusively through algebraic symbolism, however, but also in the form of natural language or gesturing, among other ways (Radford, 2018).

We refer here to (external) representations understood as "assertions in natural language, algebraic formulas, graphs or geometric figures, among others, [constituting] the medium whereby individuals exteriorize their mental images and representations to make them accessible to others" (Rico et al., 1997, p. 101). The term representations of generalisation refer to how generalisation is evidenced and externally expressed (Ureña et al., 2019).

On the path to generalising functions, students can use and represent different relationships they identify between the variables. Smith (2008) distinguishes three types of relationships: (a) recursive, that consider the variation of a single variable relating its consecutive values, (b) correspondence, which addresses the relationship between pairs of corresponding values associated with the independent and dependent variable, and (c) covariation, which involves the analysis of how both variables covary, i.e., how the change in one variable affects the other. At the same time, the functional relationships used by students can be characterized in terms of their structure. The structure refers to how the regularity between the variables is organized and expressed (Pinto & Cañadas, 2017). That is, how indeterminate and/or numerical values are operated when the regularity is used or represented.

Previous studies

Generalisation in primary school continues to strengthen as a field of research (Hitt & González-Martín, 2016). Research focuses on how students represent generalisations and the strategies they use to generalise (Kaput, 2008; Morales et al., 2018; Ureña et al., 2019; Warren et al., 2016).

Studies with early elementary and pre-schoolers showed the students were able to identify variables and their relationships, use a variety of representations —including algebraic symbolism— and understand, represent and progress in the expression of functional relationships, after receiving instruction (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008; Warren & Cooper, 2005, 2008). Other authors have also focused on how generalisation is expressed. In a study with students from second (7 to 8 years old) to seventh year (12 to 13 years old), Radford (2018) observed both symbolic and non-symbolic representations of generalisation. He drew attention to the different semiotic systems (such as gesturing, language or symbolism) used to express generalisation, contending that each furnishes a different type of information on the treatment of and inter-relationships between variables and the algebraic structure of the sequences involved in the tasks. In the research by Amit and Neria (2008), talented students (11 to 13 years old) represented functional relationships linked to patterns through verbal representations, algebraic symbolism, and general verbal terms in algebraic expressions as a semi-symbolic representation.

In functional generalisation contexts, Torres et al. (2019) reported that second-year students (7-8 years old), without instruction, tended to use numerical and verbal representations in their answers, without generalising. Merino et al. (2013) also found that fifth graders (10 to 11 years old) mainly used verbal representation to present their reasoning. Pinto and Cañadas (2017, 2019) recognized that both third graders (8 to 9 years old) and mainly fifth graders (10-11 years old), represented verbally the generalisation of functional relationships. Ureña et al. (2019) determined that fourth year (10-11-year-old) students with no prior instruction in representation or functional tasks used a variety of systems (e.g., numerical, verbal, symbolic) to represent generalised functional relationships.

Strategies

The procedures deployed to solve a problem, draw conclusions from a corpus of ideas and establish relationships are known as strategies (Rico, 1997). They inform about students' thinking processes when solving problems.

A variety of strategies applied in generalisation contexts have been described in the literature. Stacey (1989) distinguished four strategies: (a) counting the elements on a figure, (b) direct proportionality, (c) difference between consecutive terms, and (d) application of a linear functional model. Later studies such as Merino et al. (2013), Morales et al. (2018) and Zapatera Llinares (2018) define similar strategies used in generalisation tasks. Two new strategies appeared in Merino et al. (2013)'s study: (a) the use of arithmetic operations unrelated to specific patterns (i.e. regularities) and (b) the repetition of the general statement of the task. It is interesting to notice the distinction made by Zapatera Llinares between a local (for a specific term) and global (for any term) application of the functional relationship connecting the two variables. These studies also report direct answers given without explanation of the process followed.

Previous studies

Stacey (1989) identified instability in elementary students' use of strategies for near (generalising with simple processes such as counting or drawings) and far (entailing more complex processes to determine a general rule or pattern) generalisation, along with a propensity to choose the simplest rather than the most precise option. Barbosa et al. (2012) observed sixth-year students (11 to 12 years old) to perform poorly in generalisation tasks with a visual component; even those earning the highest marks counted or used recursive patterning but did not generalise. Merino et al. (2013) pointed out that fifth year students (10-11 years old) changed strategies such as counting and direct answer in specific cases, to the use of arithmetic operations and, mainly, patterns (structures) in far and general cases. In a similar study with 8- to 12-year-old students, Zapatera Llinares (2018) found that changing from additive strategies for near, to functional strategies (in which they identified and applied a function) for far generalisation, guaranteed successful generalisation. A common finding in various of the mentioned studies was the incorrect use of direct proportionality, primarily in general cases. Amit and Neria (2008) determined that mathematically talented sixth- and seventh-year students (11 to 13 years old) used functional and recursive strategies to generalise linear and quadratic patterns. Especially, functional strategies stood out for their efficiency and scope to generalise. El Mouhayar and Jurdak (2015), also in a generalisation context of linear and quadratic figural patterns, focused on studying how the use of strategies from immediate-near cases to far-n case (understood as pattern generalisation types) varied in students' work across grades 4 to 11 (9 to 17 years old). They also highlighted recursive and functional strategies to be used in all tasks. However, unlike the first, the use of functional strategy tended to grow as the demand for generalisation towards the general case increased.

Methodology

This qualitative, descriptive and exploratory study was conducted with 33 sixth-year (11- to 12-years-old) elementary school students who volunteered to answer a questionnaire as a preliminary for participation in a project designed to stimulate mathematical talent (Ramírez & Cañadas, 2018). We intentionally work with these students because they were adequate to develop the objectives of the study.

The whole questionnaire consisted of five problems that address different contents (functions, operations with numbers, divisibility, plane measurement, and spatial constructions). Here we analyse the answers to the first situation, the "potato seed" problem, which involved generalising two linear functional relationships.

We designed this problem guided by the aim of our study. We reviewed the existing research literature and used the following criteria: the statement of the problem involves verbal and pictorial representation, in the first two specific cases the student is invited to make a pictorial representation of the situation, two tasks are derived from the problem, each task implies a different linear functional relationship, there exists a dependency between tasks and the underlying functional relationships, it follows an inductive organization and the justification of the answers is requested.

Tasks design

The potato seed problem consists in two tasks related to a same context (Figure 5.2.1). In the first task students had to determine the number of squares that could be drawn having seeds as vertices. The second task ask them to find the value of the sum of the orders of all the seeds (the order of a seed is the number of squares that has one of its vertices in that seed). The first functional relationship, which depends on the number of days, is $f(n) = 4n - 6$. The second functional relationship, which associates the sum of the orders with the number of squares, is $h(n) = 4 \cdot (4n - 6) = 16n - 24$.

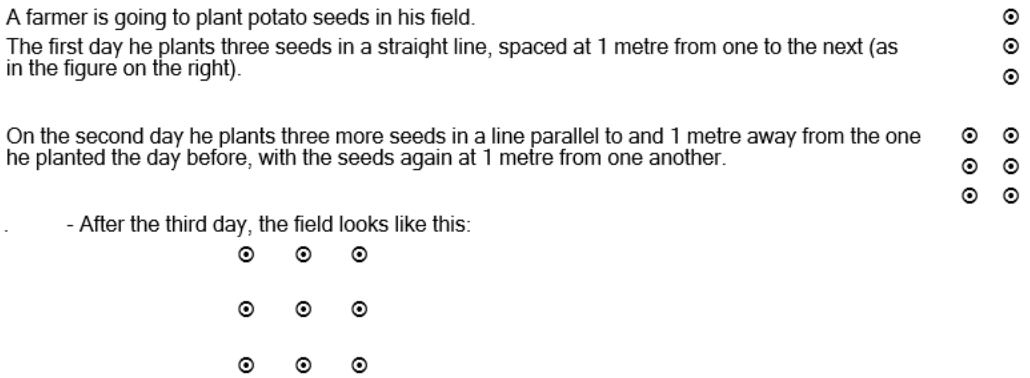


Figure 5.2.1. The potato seed problem

The problem required solving both tasks for 3, 4, 100 and n days. This inductive approach was adopted to help students visualise the underlying regularity and identify and generalise the implicit functional relationships (Ramírez & Cañadas, 2018). In line with Amit and Neria (2008), this organization can promote a transition from a "warm up" case so that the student becomes familiar with the task, a tentative generalisation through the extension of the regularity to another specific case, and an informal generalisation through representation that the student prefers (e.g., verbally) until reaching a formal generalisation with algebraic symbolism.

Analysis

The unit of analysis was defined as each student's full answer to each task. Students' strategies and the way they represented generalisation were analysed. To interpret students' answers, we considered together their pictorial representation of the squares and their written answers. Three sections were distinguished for analysis: near cases-3 and 4, far case-100 and general case-n.

We defined two sets of categories to analyse the data distinguishing type of solving strategies used by students and the representations of generalisation.

Solving strategies

All the categories set out below were determined on the grounds of previous studies (Amit & Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; Merino et al., 2013; Morales et al., 2018; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018), and a preliminary analysis of the data.

- Counting: the result was obtained from the count of some elements in a pictorical representation.
- Additive operationality: the answer was found by explicit or implicit isolated additions not related to operations performed in previous or later responses to the task.
- Multiplicative operationality: the answer was found by explicit or implicit isolated multiplication or division not related to operations performed in previous responses to the task.
- Proportionality: proportional reasoning was used to obtain one of the terms as a product of others. This strategy is separated from the previous one to emphasize the specific reasoning involved.
- Correspondence: a correspondence functional relationship between the associated variables to describe the situation was established and used.
- Direct answer: answers were obtained with no specification of the procedure followed.
- Other: the procedure used could not be classified in any of the above.

Representations of generalisation

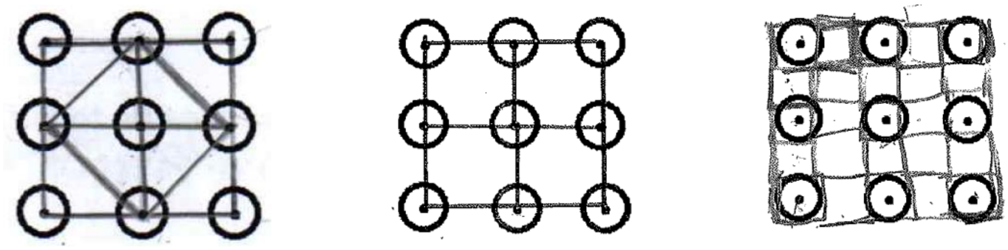
Students were deemed to express generalisation when they represented a general rule relating the variables according to a regularity recognised. We analyse the external written representations students use to express such generalisation. The categories used to classify how generalisation was represented are a reorganization and expansion of the ones defined by Ureña et al. (2019). We selected those expressed by our participants.

- Student does not represent the generalisation.
- Student represents the generalisation. It is divided into three subcategories that are the types of representations of generalisation that we distinguish:
  - Verbal: the detected regularity is expressed through natural language.
  - Symbolic: the detected regularity is expressed by means of algebraic symbolism.
  - Multiple: the detected regularity is expressed using a combination of verbal and symbolic representations.

Results

Only three students (S4[13], S14 and S30) identified all the squares that could be drawn (Figure 5.2.2a). Twenty-seven students only identified the squares that rested on a horizontal row (Figure 5.2.2b). When considering only this latter type of squares, the underlying functional relationships structures are $3n - 4$ for the first task and $4s = 4(3n - 4) = 12n - 16$ for the second. As the other three students (S9, S23 and S28) misinterpreted the geometric description given (Figure 5.2.2c) and furnished information irrelevant to the problem, so they were excluded from the analysis.

[13] For reasons of confidentiality each student was assigned a number preceded by the letter S.



a. All squares b. Squares resting on rows c. Different interpretation

Figure 5.2.2. Geometric representation of the squares

Below we comment separately in the strategies and representations used by the students in the generalisations manifested.

Strategies

In both tasks the students evidenced the use of a diversity of strategies that varied depending on the case involved. Students used the same strategies in both tasks, except counting strategy and additive operationality which were inverted as the most and least frequent strategies between tasks. Correspondence and direct answer were also among the most used. At the same time, stands out a high number of students who do not answer the questions.

Specifically, in 3- and 4-day cases the most used and unused strategies are reversed between the first and second task. Counting is the most frequent strategy in first task and it is not evidenced in the second task, whereas the additive operationality strategy is the most used in the second one. This latter strategy is also indirectly based on counting to first determine the order of each seed before addition is performed. In general, counting did not occur in the final cases in either tasks; in these cases students did not have neither draw any illustrations to support their answers.

Although in 100- and n-day cases more strategies are observed (e.g., proportionality, multiplicative operationality), the correspondence strategy is the most widely used in these cases.

Below we comment separately on the strategies applied by the students in each task.

Task 1. Number of squares

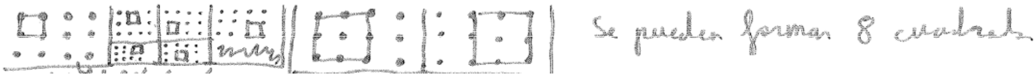
The students applied counting, correspondence, multiplicative operationality, proportionality, and other in the solution of this task. Some students also answered directly. Table 5.2.1 lists the number of students using each type of strategy in the first task, by case and globally.

Table 5.2.1. *Strategies used by students in task 1, by case*

Strategies	3- and 4-day cases	100-day case	n-day case	Cumulative total
Counting	19	0	1	20
Additive operationality	0	0	0	0
Multiplicative operationality	0	3	3	6
Correspondence	0	10	5	15
Proportionality	0	5	3	8
Direct answer	10	7	4	21
Other	0	1	1	2
No answer	1	4	13	18
Total	30	30	30	90

Overall, of the total of 90 productions we analyzed, 18 times the students did not answer, this being more common in n-day case. In the other answers, students most frequently used the direct response followed by counting and correspondence. The least frequent strategy was additive operationality, that was not applied.

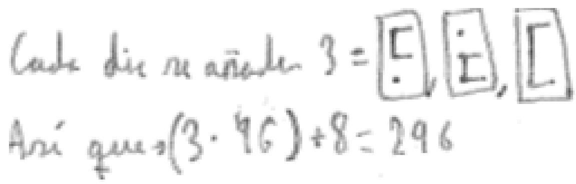
To reply to the questions with near cases (3 and 4- days), most of the students (19) used counting strategy. This strategy was used almost exclusively in these cases. The students represented all the squares comprising the answer (e.g. Figure 5.2.3) and sometimes organized them according their size. This means that the students who applied counting based their answers on their pictorial representation of the squares. Student S20, for instance, replied that in four days there would be “8 squares, six with an area of 1 m^2 and two 4 m^2”.



[Handwritten note: “You can draw 8 squares”]

Figure 5.2.3. S1’s answer, n-day case

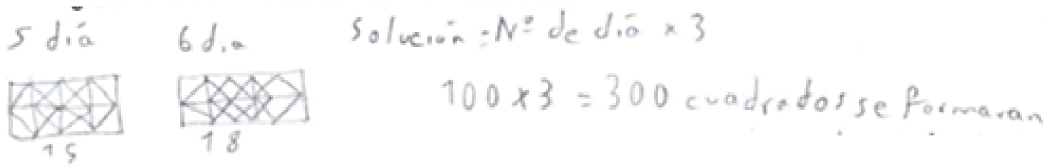
In 100- and n-day cases students’ strategies were more diversified. Students applied the correspondence strategy, proportionality and multiplicative operationality, with the first strategy being the one most widely used. Ten students (S1, S4, S5, S14, S15, S18, S19, S20, S26 and S30) switched from counting to correspondence strategy in the 100-day case. Students using the correspondence strategy established a relationship between the number of days lapsing and the number of squares. For instance, S1 applied the structure $3(n-4)+8$ (Figure 5.2.4). He used the eight squares that could be drawn in the first 4 days as a constant in the functional relationship and defined all other $n-4$ days as the variable term. Analogously, S18 took the five squares formed in the first 3 days as a constant, applying the structure $3(n-3)+5$. S19, S15 and S26 answered similarly.



[Handwritten note: “Three are added each day. So (3·96)+8 = 296”]

Figure 5.2.4. S1’s answer, 100-day case

Three students (S5, S20 and S30) left out the constant term in the formulation of the structure of the functional relationships. S5 said that “you can draw 288 squares, because there are three squares per day” deriving that result by multiplying 3 times 96 . That is, he used the structure $3(n-4)$. The student recognised the regularity but failed to take the number of day 4 squares into consideration. On the other hand, S30 represented a multiplicative structure with operations and words, using the latter as variables: “Solution=Nº of day × 3”, after calculating the squares that could be drawn in the specific cases (Figure 5.2.5). Other students (S4 and S14) identified a total or partial regularity but used less clear structures. S14, for instance, replied that for 100 days “you can draw 200 squares because you can always draw two 1 m^2 squares plus the total number of days, or 102, and two squares less than the total number of days, or 98”. That is, he referred to the structure $n + 2 + n - 2$ wich is the same as $2n$.



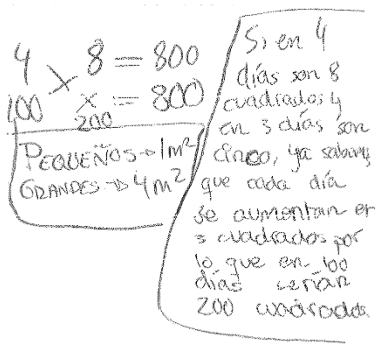
[Handwritten note: day 5 (15); day 6 (18). Solution = No. of days x 3. 100 x 3 = 300 squares]

Figure 5.2.5. S30’s answer, 100-day case

In n-day case, five students (S1, S4, S5, S7 and S14) applied the correspondence strategy. Four (S1, S4, S5 and S14) had applied the same strategy in the preceding case, where the fifth (S7) had used proportionality. Of the other six students who used the correspondence strategy in 100-day case, four (S19, S20, S26 and S30) failed to answer in the general case, despite their previous representation of structures. S18 replied directly with no clear connection to the previous data and S15 used counting.

To a lesser extent proportionality and multiplicative operationality strategies were applied in 100- and n-day cases whilst additive operationality was not used in this task. Five students (S3, S6, S7, S11, S22) applied proportionality in 100-day case and three (S3, S22, S11) in the general case. These students applied a known formula unrelated to the data in the problem and to their prior results. By way of example, S7 used the eight squares she deemed could be drawn after 4 days (Figure 5.2.6). Other three students (S10, S12 and S33) used multiplicative operationality in 100-day case. S10 for instance divided

“100:2=50 because you can draw two squares every day”. In contrast, S12 doubled the 100 days to find 200 squares and S33 divided 300 by 4, in what we interpret to be dividing the total number of seeds by the number of vertices in a square. In n-day case S10 and S12 resorted to the same procedure while other student, S24, assigned the letter a value of 50 and divided by 4 to find the solution. Finally, in n-day case one student (S15) applied counting strategy, drawing and counting the squares based on the fifth day’s data without evidence of why he selected that specific number of days to answer.



[Handwritten note: Small = 1 m^2; large=4 m^2. If in 4 days there are 8 squares and in 3 days there are 5, we know that with each day there are 3 more, so after 100 days we’d have 200 squares]

Figure 5.2.6. S7’s answer, 100-day case

Task 2. Sum of orders

In the second task the students used correspondence, multiplicative operationality, proportionality, direct response and others, as in the previous task. In this case additive operationality was also applied. The strategies used by the students to solve the second task are shown in Table 5.2.2.

Table 5.2.2. *Strategies used by students in task 2, by case*

Strategies	3- and 4-day cases	100-day case	n-day case	Cumulative total
Counting	0	0	0	0
Additive operationality	24	3	0	27
Multiplicative operationality	0	1	2	3
Correspondence	0	7	6	13
Proportionality	0	2	2	4
Direct answer	3	4	5	12
Other	0	2	3	5
No answer	3	11	12	26
Total	30	30	30	90

In this task, almost a third of the students did not answer to the 100-day and n-day cases., In their answers they more frequently used the additive operationality, correspondence and direct answer strategies, respectively.

In 3- and 4-day cases the additive operational strategy is the most used (24 students). This strategy as well as the counting strategy, and unlike the other strategies, depended on a visual component. The students who used the additive operational strategy added both implicitly and explicitly. For instance, S12 took the squares found in the 4-day case, numbered each seed and assigned an order to each of them as shown in Figure 5.2.7. He then summed all the quantities to find the respective solution.

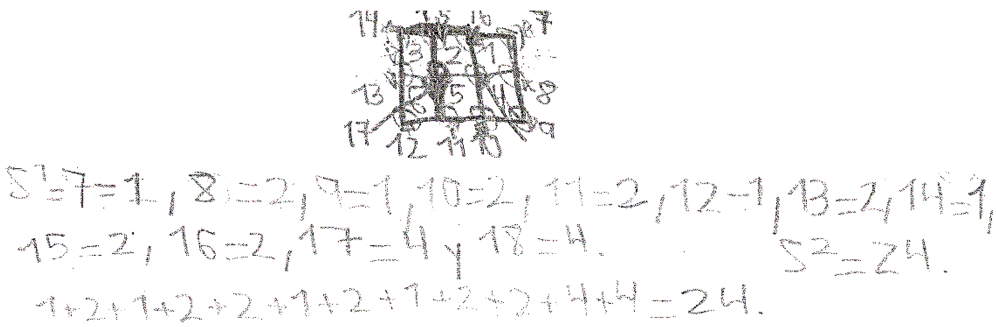
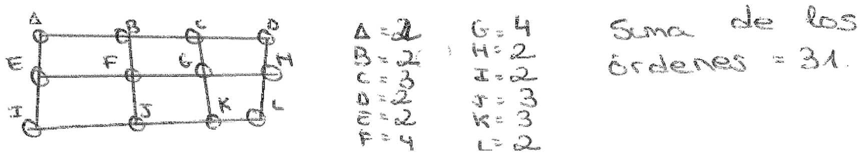


Figure 5.2.7. S12’s answer, 4-day case

Students who specified the order of each seed and then found the total were interpreted to add implicitly, given the arrangement of the data (see Figure 5.2.8).



[Handwritten note: sum of orders = 31]

Figure 5.2.8. S3's answer, 4-day case

As in task 1, in 100- and n-day cases the strategies used were more varied and differed from those deployed in 3- and 4-day cases, nonetheless, the no answer rate was high for the last two cases.

The correspondence strategy prevailed among the students who answered to the 100- and n-day cases. Seven (S1, S4, S7, S12, S14, S24 and S30) applied the correspondence strategy to 100-day case, changing from the additive operational strategy used in the preceding cases. By way of example, S1 expressed the relationship between the number of squares and the result of the sum of the orders by contending that "each square has four so (4·296) = 1184". According to his answers to the task, he followed the structure $4s$, where s is the number of squares obtained. S7 y S24 used the same correct structure. The rest of the students used other structures. S30, for example, represented the structure "$Day \times 9$", consistently with the result of the previous 4-day case. Of the seven students who applied this strategy in 100-day case, all except S30 who did not respond, used the correspondence in n-day case with the same structure.

A small number of students applied the proportional or multiplicative operational strategies in this task (Table 5.2.2). In the 100 and n-day cases, S3 and S11 used proportionality, while in 100-day case S15 used multiplicative operationality, which both he and S5 adopted in n-day case. S15, for instance, associated the number of squares for 100 days with the number of vertices in a square answering '800 because there are 200 squares and each square has four vertices', drawing no connection between his answer and the previous variables and results.

Representations of generalisation and associated strategy

In all these cases students representing generalisation used the correspondence strategy when solving the task. They established a relationship between variables which they generalised and represented. As shown in Table 5.2.3 they used different representations to express the generalisation. The representations of generalisation in both tasks took place in the answers to the questions about cases 100 and n-day.

Table 5.2.3. *Students representing generalisation*

	Task 1		Task 2	
	100-day case	n-day case	100-day case	n-day case
Identifies a regularity but does not represent	2(S4, S15)		4(S4, S12, S14, S24)	1(S24[0])
Identifies a regularity and represents				
Verbal	7(S1, S5, S14, S18, S19, S20, S26)	3(S4[1], S5[0], S7)	2(S1, S7)	2(S4[1], S7[0])
Symbolic		1(S1[1])		1(S1[1])
Multiple	1(S30)	1(S14[1])	1(S30)	2(S12[1], S14[1])
Total	11 (S1, S4, S5, S7, S14, S15, S18, S19, S20, S26, S30)		7 (S1, S4, S7, S12, S14, S24, S30)	

Note. [0]= The student used the same representation of the generalisation between 100-day case and n-day case. [1]= The student used a different representation of the generalisation in last both cases.

As shown in Table 5.2.3, although some students did not represent generalisation, they did show the recognition of a regularity consistent with the solutions they previously obtained. This is observed mainly in case 100 in both tasks. They numerically expressed the relationship between the quantities corresponding to each variable when indicating the operations performed to reach the answer. For example, in the answer to 100-day case in the second task, S24 wrote that the result of the sum of the orders was 244. This result was obtained from the multiplication 64×4, where 64 was the number of squares that they formed in 100 days. That is, he used the structure $4s$, where s is the number of squares. These students then represented the generalisation in n-day case. The exceptions are S15 who in the first task uses counting in the general case, and S24 who in the second task maintains the same form of numerical expression.

Below we comment on the use of each type of representations of generalisation exhibited in both tasks.

Verbal representation

Of the exhibited representations, the verbal representation of the generalisation stood out as the most frequent in both tasks and mainly in the 100-day case. In the first task in 100-day case seven students (Table 5.2.3) represented the generalisation verbally and three in n-day case. They verbalized the indeterminacy of the variables and the generalisation of a functional relationship between the number of days (independent variable) and the squares (dependent variable).

Most of the students that represented the generalisation verbally expressed that "each day increases by three squares" referring to the relationship between the number of squares (dependent variable identified in the problem) that could be drawn and the number of days (verbally expressed independent variable). Two students (S1 and S5) proposed this verbal expression and used structures such as $3(n-4)+8$ (S1, Figure 5.2.4) or $3(n-4)$ (S5). S20 wrote the equivalent verbal representation "because every day we get two 1 m^2 squares and one 4 m^2 square" and applied the structure $3(n-4)$. In n-day case S4, S5 and S7 represented generalisation verbally with very similar expressions to those exposed. The variety of structures under similar verbal expressions reflected a limited precision of verbal representations of generalisation. Nonetheless, all responses in 100-day case are accompanied with their calculations, a clue to understanding the structure of the functional relationship to which they referred (see

Figure 5.2.4, for instance). We base our interpretation of their perception of generalisation on the grounds of the consistency of the answer with prior results.

In the second task, the verbal representation of the generalisation was manifested by S1 and S7 with expressions such as "the number of squares by 4" that were always related to the correct structure $4s$, both in 100- or n-day cases. In n-day case S4 used another verbal expression "every day increases by 16" that was associated with the structure $16n + 4$ applied in 100-day case.

Symbolic representation

The symbolic representation of the generalisation was used exclusively in n-day case and only by S1 in both tasks. By using algebraic symbolism, he represented the independent variable and the functional relationship that he identified. In the first task S1 described the regularity as "you can draw $(n \cdot 3)$ because three can be drawn every day". That expression was consistent with the verbal representation he provided in the 100-day case answer, even though he failed to apply the structure $3(n - 4) + 8$ determined there (see Figure 5.2.4). In the second task he wrote the structure "$(n \cdot 3) \cdot 4$" which operates the number of squares $(n \cdot 3)$ found in 100-day case with the value of the sum of the orders by multiplying by 4.

Multiple representation

The multiple representation of generalisation is the second most used by students in both tasks with a slight majority in the n-day case of the second task (two students) (Table 5.2.3). This representation was characterized by involving the verbal representation of the variables as general terms and using numbers connected with arithmetic operations to indicate the relationship between the variables in a semi-symbolic expression. For example, S30 used this representation in 100-day case in both tasks. In first one he wrote the structure "$Day \times 9$" while in the second tasks expressed the structure "$Solution = Nº\ of\ day \times 3$". In the first task S14, who represented verbally in 100-day case, switched to multiple representation in the n-day. In the following excerpt his expression of the regularity perceived lacked clarity to reveal the structure $n + 2 + n - 2$.

> You can draw double the number of squares as on the day the seeds are planted. The number for day +2 is the number of squares that have an area of 2 m2. The number for day -2 is the number of squares with an area of 1 m2.

For the second task, S12 and S14 went from not representing generalisation, although they recognize a regularity in 100-day case, to multiple representation in n-day case. For example, S12 represented "$(The\ 'n'\ on\ the\ day \times 2) \times 2 - 4 + (the\ 'n'\ on\ the\ day \times 4 - 4)$" to obtain the sum of the orders.

Discussion and conclusions

This article reports on last-year elementary school students' problem-solving strategies and their ways of representing generalisation in a context of functional thinking. They were observed to deploy a variety of strategies, exhibiting flexibility to switch approaches between working on specific and general cases and to consistently use the same strategy in last cases. However, only a small number of students proved able to establish relationships between variables and represent the general rule governing the functional relationships underlying their solutions.

Strategies

This study supplements previous research on the strategies used by elementary school students in functional generalisation contexts, by describing the strategies deployed by sixth-year students without formal algebraic training. It characterizes the strategies used in specific and general cases and highlights the most often applied in representing generalisation of functional relationships.

In near cases the students used two different strategies depending on the task, both were related with a visual component. Counting was predominantly used in the first task while additive operational was applied in the second one, however, the latter also involved counting to obtain the order of each seed before adding. The use of such strategies might be due to the inclusion of a visual representation in the problem and to the way the tasks were posed: in the second task students were asked to find a sum, which prompted them to use addition in light of the small number of data involved. In near cases the application of these strategies is consistent with results reported in other studies with elementary school students (e.g., Barbosa et al., 2012, Merino et al., 2013; Zapatera Llinares, 2018).

In the same vein, generally the students did not resort to more specific cases than the two proposed. The use of pictorial representations is observed almost exclusively in these cases when the student is invited to make them. To answer the final cases and to represent the generalization the main resources on which they base their reasoning were the numerical answers obtained in previous questions and the numerical expressions used to get the numerical computations. This result suggests a focus on the numerical rather the visual elements of the tasks and answers (Amit & Neria, 2008; Barbosa et al., 2012), which may be consequence of the type of learning experiences they have lived.

In 100-day case student strategies were more diverse. As the term was not a low number, neither consecutive or close to the previous ones, students could not continue using counting or operationality strategies and, as a consequence, the search of other procedures was promoted. Here as in n-day case, the correspondence strategy prevailed among the few students replying to the case. This strategy corresponds to the functional approach reported in other studies (e.g., Amit and Neria, 2008; El Mouhayar & Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006; Stacey, 1989) but in our case only involved the correspondence relationship.

One of the primary contributions of this study is the relationship identified between the strategies used by last-year elementary school students and the ways they represented the generalisation. The correspondence strategy was the sole approach found to be associated with the representation of generalisation. The flexibility exhibited to switch strategies between specific and general cases was key in addressing the problem posed. Switching to the correspondence strategy in the latter cases was an indication that other strategies were impractical in such cases, as students applied functions consistently in the last two cases. The study revealed the scope of the correspondence strategy, allowing to represent the generalisation or show the recognition of a regularity. That would suggest that the correspondence strategy is the one best suited to establishing relationships between data, ensuring coherence with prior answers and the problem posed. We agree that the use of this strategy was motivated by the proposal of distant cases and the cognitive demand in the transition from specific and familiar cases to cases that required more efficient and advanced strategies to solve and generalise (El Mouhayar & Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006).

In the first task fewer students used the correspondence strategy in the n-day case than in the 100-day case (Table 5.2.1), even after generalising in the latter, perhaps because they deemed they had completed the task or because they failed to understand the meaning of the alphanumerical symbolism.

We identified more diversity in the structures of functional relationships in the first task attributable to the fact that the functional relationship was more complex than in the second task (with multiplicative structure $4s$). We found that the diversity of structures, the modifications in the structures from one to another case, as well as the use of structures that do not fully correspond to the proposed tasks or the students' own results, may be due to errors in calculation or a trend focused on responding rather than refining responses. Another reason is the difficulty of the tasks that involved modelling non familiar situations (Lepak et al., 2018).

One finding likewise reported by other authors (Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018) was the inappropriate use of proportionality, attributable to the incorrect over-generalisation of learned knowledge (Stacey, 1989). By contrast, some strategies identified in prior studies were not detected here. Despite being a common generalisation approach, recursive strategy (e.g., Amit & Neria, 2008; Carraher et al., 2008; Stacey, 1989) were not used by these sixth-year students, perhaps due to the near absence of consecutive cases and the potential of students in the search for efficient strategies.

Three groups of strategies were identified based on the coherence between the cases of each task as students progressed from case to case. The first group (direct answer and additive and multiplicative operational) consisted in procedures or reasoning applied to specific or isolated cases. In the second group (correspondence) students reasoned based on prior data, extending their reasoning to more general cases. In the third (proportionality and other) students applied reasoning associated with prior formulas or knowledge unrelated to the nature of the data in the problem posed or applied a strategy based exclusively on the data found in the immediately preceding case to find the answer to the case at hand.

Representations of generalisation

The representations of generalisation of functional relationships evidenced by sixth-grade students is another of the contributions of this research. We identified three representations considering the written nature of the task presented: verbal, symbolic and multiple representations. In this study, we reorganised the representations of generalisation proposed by Ureña et al. (2019) according to if the student evidences the recognition of a regularity and represents the generalisation (verbally, symbolically or multiple) or does not represent it.

An interesting result is that some of the students who used the correspondence strategy showed evidences of having detected and used a regularity although they did not represent the generalisation. It is an important finding that calls the attention towards cases in which students might be working with the functional relationships in an implicit way. This result could be due to the numerical nature of the case in question (100-day case) since most of these students represented generalisation in the n-day case (Table 5.2.3).

Generalisation was represented by more students in the first than in the second task, perhaps due to the inductive organization of the problem and the dependence that could be seen between the responses of the second task with those of the first task, in which the failure to answer or to correctly answer a case rendered it nearly impossible to identify regularity. Eleven students represented generalisation in the first task, seven in the second and five in both (Table 5.2.3).

Generalisation was most often represented verbally in both tasks, predominantly in 100-day case. This result coincides with other investigations that recognize in primary school the use of verbal (and numeric) representations in general cases (e.g., Pinto &

Cañadas, 2019; Torres et al., 2019; Ureña et al., 2019). It is attributable both to the comfort and familiarity with these representations (Merino et al., 2013), their reduced use of pictorial representation and their inexperience with other types of representations.

The symbolic representation was exhibited by one student in both tasks and only in n-day case. Multiple representation was also shown by few students. The students who represented the generalisation were able to identify, work with and represent indeterminate variables and hence express the functional relationship perceived. In multiple representation they used words as variables in algebraic expressions. We could recognize this last representation as a previous step to represent generalisation symbolically.

From the results we highlight the flexibility of sixth grade students to use different representations and change them between one case and another. The variety of representations corroborate students' algebraic thinking (e.g., Amit & Neria, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018; Ureña et al., 2019). Each expression of generalization shows in a different way the variables, their relationships and the conceptual deepness with which they have been approached (Radford, 2018). Unlike symbolic or multiple representation, where the variables are explicit and the structure of the functional relationship is evident, in the verbal representation or in the responses of the students who do not represent but use the correspondence strategy, these are implicit.

As expected, students found it easier and were more prone to work with specific (where more students answered the questions) than general cases. The explanation may lie in the cognitive skills required to extend reasoning and procedures and deal with indeterminacy in form of a letter. Other reasons could be that the tasks involved demands associated with inter-cases dependency, the connection with the visual component from which students generalise information, and their limited experience with generalisation problems such as the one proposed. In n-day case one student even explicitly contended indeterminacy of the independent variable to be inconceivable, whilst others assigned the letter a fixed numerical value and solved from that perspective. Similar results have been reported for younger students (Molina et al., 2018; Ureña et al., 2019). Such evidence reinforces the idea to foster generalisation with tasks involving familiarisation with indeterminacy and its representations as a preamble to formal algebra instruction.

Unlike Ureña et al's (2019) fourth-year students, none of the sixth-year elementary schoolers used the generic representation generalisation. Ureña et al. (2019) found that representing the independent variable as "any" or "any number" prompted students to use generic examples. In their study outside mediation also induced participants to represent generalisation. The absence of such expressions in the wording of the cases used here may have contributed to students not representing generalisation in that way. However, we identified evidences of the multiple representation that were not evidenced by the fourth graders. We could conjecture that multiple representation is associated with more mathematical knowledge and experiences. Similar representations were highlighted by Amit and Neria in 11-13 years old mathematically talented students. Other authors (Blanton & Kaput, 2004; Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008; Warren & Cooper, 2005, 2008) reported younger students' ability to understand, represent functional relationships of varying complexity and even prove their reasoning with more specific cases. Those students had received instruction dealing with such content. The students in this study, further to the elementary school curriculum, were only expected to be able to identify patterns and regularities (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014a). That supports the idea that students of different ages are prone to functional thinking but need reinforcement and guidance to develop it fully. In the context of early algebra, then, this study is believed to furnish information on how students reaching the end of elementary school generalise and express functional relationships with no prior explicit training in those areas.

The instruction becomes essential to guiding students' experience, for it helps them organize their thoughts to find the right problem-solving strategies (Stacey, 1989). We highlight the need to provide spaces in which students learn and progressively develop increasingly advanced strategies to develop mathematical competences, including generalisation. This study also reports on the importance of analysing the procedures deployed and the inter-data relationships established, factors associated with the habit of checking one's answers. Consistently with other studies (Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989), the students participating here did not verify the generalisation defined, a failure possibly attributable to their scant experience in this regard.

In another vein, while able to express generalisation, students failed to represent their reasoning clearly and methodically possibly due to lack of appropriate verbal skills. Other studies reported that students who identified variables and their inter-relationships were scantly able to express them clearly (Radford, 2018; Ureña et al., 2019). In our study that was attested to by the sparsity and even ambiguity of students' explanations. In this sense, the development and strengthening of students' communication skills for the adequate and accurate expression of their ideas and reasoning becomes also relevant (Barbosa et al., 2012).

In light of our findings and the importance of furthering algebraic reasoning beginning in elementary school, the study suggests that a number of issues (e.g., flexibility in the use of solving strategies, greater and better development of generalisation tasks in functional contexts and pre-algebra studies prior to formal instruction in secondary school) should be explored and attended in greater depth to promote spaces that motivate students to identify and represent generalisation in different ways.

Acknowledgments

This study was developed within the Spanish project of Research and Development with reference code EDU2016-75771-P, financed by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness. This work is part of the doctoral studies of the first author supported by Universidad de Costa Rica.

References

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 273-293.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoines y A. B. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2., pp. 135-142). PME.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3(5), 412-446.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C., Blanton, M., L., & Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 469-478.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 553-569.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and calculus. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 3-38). Sense Publishers.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Lepak, J. R., Wernet, J. L., & Ayieko, R. A. (2018). Capturing and characterizing students' strategic algebraic reasoning through cognitively demanding tasks with focus on representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 57-73.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente* [Thinking mathematicaly]. Labor.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University y Paul Chapman Publishing.

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización [Representations and patterns used by fifth grade students in a generalization task]. *Edma 0-6, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria* (Vol. 52, pp. 1-58). Author.

Molina, M., Ambrose, R., & del Río, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade Spanish students. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 261-80). Springer, Cham.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context]. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo [Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: A comparative study]. In J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pólya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* [How to solve it?]. Trillas.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Ramírez, R., & Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente [Nomination and attention to mathematical talent by the teacher]. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, 23-30.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria [Considerations about secondary education mathematics curriculum]. In L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., & Puig, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* [Mathematical education in secondary education]. Editorial Horsori.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico [Second graders' structures and representations used in a functional approach of algebraic thinking]. In J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Sense Publishers.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje [How primary education students solve problems of generalization of patterns. A learning trajectory]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87-114.

5.3. Estudio 3:

Generalización de estudiantes en un contexto funcional: estrategias y representaciones

Ureña, J.[a], Ramírez, R.[a], Molina, M.[b] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

Resumen: El pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico, centrado en la generalización y representación de relaciones entre cantidades covariantes. En este trabajo describimos las estrategias para generalizar de estudiantes de último curso de primaria (11 años) y primeros cursos de secundaria (12 y 13 años) y cómo representan la generalización. Llevamos a cabo un estudio descriptivo y exploratorio en el que analizamos las respuestas de 313 alumnos a una tarea escrita de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar. La mayoría de los estudiantes que generalizan, usan la estrategia de correspondencia. Ellos emplean las representaciones verbal, simbólica o múltiple al generalizar. En secundaria los estudiantes representan relaciones funcionales con estructuras más diversas y complejas.

Palabras clave: estrategias, generalización, pensamiento algebraico, relaciones funcionales, representaciones.

Introducción

La investigación sugiere que la capacidad de generalizar y representar las generalizaciones, identificar estructuras algebraicas, la mejora del significado de variable y la conciencia sobre la relación dinámica entre estas, son elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2018; Warren et al., 2016). En esta línea, el enfoque funcional del álgebra destaca como medio para abordar la generalización de relaciones funcionales entre cantidades que covarían, su representación y el razonamiento con esas representaciones (Blanton et al., 2011). En relación a la relevancia de la generalización, nuestra contribución en este trabajo es relativa a dos objetos de estudio: las estrategias para generalizar y las representaciones de generalización. Estos han sido foco de atención en diferentes estudios previos (e.g., Morales et al., 2018; Ureña et al., 2019; Warren et al., 2016).

Los estudiantes en los últimos cursos de primaria y primeros de secundaria identifican y establecen relaciones funcionales (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Stacey, 1989) y hay resultados de las representaciones que emplean (e.g., Pinto y Cañadas, 2019; Ureña et al., 2019). Sin embargo, no hemos identificado en la literatura estudios que profundicen en las estrategias empleadas para generalizar y las respectivas representaciones de la generalización. En este trabajo profundizamos en ambos aspectos: (a) las estrategias para generalizar y (b) la identificación y representación de la generalización, bajo esas estrategias, observable en la expresión y manipulación de las cantidades indeterminadas/variables y de la relación entre estas. El análisis que proponemos con estudiantes de último curso de educación primaria y de los primeros cursos de educación secundaria constituye un aporte de la investigación al permitir contrastar la influencia de las experiencias educativas y la formación algebraica de los alumnos. En particular, nos planteamos dos preguntas de investigación: ¿qué estrategias se vinculan con la generalización en contextos funcionales? y ¿cómo representan los estudiantes sus generalizaciones?

Estrategias

Las estrategias son los procedimientos que permiten dar solución a un problema, obtener conclusiones a partir de un cuerpo de conceptos y establecer relaciones (Rico, 1997). Estas permiten comprender y describir los razonamientos de los estudiantes en la resolución de problemas. Su estudio es especialmente relevante dada la disminuida atención que se les presta durante la formación de los alumnos (Lepak et al., 2018).

Hay una variedad de estrategias asociadas a la generalización. Stacey (1989) distingue cuatro estrategias: (a) conteo de elementos de una figura, (b) proporcionalidad directa, (c) diferencia entre términos consecutivos y (d) planteamiento de un modelo funcional lineal (i.e. uso de una función lineal $f(x) = mx + b, b \neq 0$). Zapatera Llinares (2018) reconoce cuatro estrategias, coincidiendo la proporcionalidad y la estrategia funcional con Stacey (1989). La tercera estrategia es la respuesta directa en que el estudiante obtiene el resultado sin que el proceso sea explícito. En la estrategia aditiva (de tipo recursivo), un patrón de crecimiento (diferencia) se suma iteradamente al valor de un término obtenido para determinar el valor de otro término deseado. Akkan (2013) y Güner et al. (2013) consideran las siguientes estrategias de generalización: (a) conteo; (b) recursividad; (c) proporcionalidad; (d) explícita, consistente en la representación simbólica de una relación funcional; (e) contextual, que implica el uso de un conocimiento aprendido (e.g., la progresión aritmética); (f) múltiplo de la diferencia y (g) estimar y probar una regla sin atender a si se adapta o no a la situación. Merino et al. (2013) aporta dos nuevas categorías: (a) el uso de operaciones aritméticas sin relación con patrones específicos (i.e. regularidades) y (b) la repetición del enunciado de la tarea.

Los trabajos sobre generalización de patrones con alumnos en los últimos cursos de primaria (de 11-12 años, generalmente sin formación algebraica) o en los primeros cursos de secundaria (de 13-15 años con cierta formación algebraica) reflejan un empleo de estrategias diversas y destacan dificultades para aplicar estrategias adecuadas para generalizar (e.g., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Barbosa et al. (2012) reconoce el bajo rendimiento de estudiantes de sexto curso de primaria (11-12 años) y el uso de estrategias como el conteo y la recursividad (diferencia), sin que generalicen los patrones visuales. Zapatera Llinares (2018) identifica que el cambio a la estrategia funcional en los casos de generalización lejana (que implican procesos más complejos para generalizar) garantizó éxito a estudiantes de tercer a sexto curso (8-12 años) para generalizar un patrón lineal. Stacey (1989) distingue inestabilidad en el uso de estrategias entre casos para generalización cercana y generalización lejana en estudiantes de primaria y secundaria (9-13 años) sin experiencia en resolución de problemas de generalización. También reconoce una inclinación de los estudiantes a usar métodos sencillos en los casos generales, derivando en cambiar estrategias eficaces, como el modelo funcional, a estrategias no adecuadas como la proporcionalidad. En contraste, estudiantes con experiencia en resolución de problemas de generalización fueron más estables aplicando un modelo funcional para generalizar. En la generalización de patrones lineales y no lineales, Amit y Neria (2008) distinguen el uso de dos estrategias para generalizar en estudiantes matemáticamente talentosos de 11-13 años: la recursiva y la funcional. En la primera, el valor de un término se basa en del término anterior y se caracteriza por su limitado alcance a casos particulares no distantes. La segunda consiste en establecer una relación funcional que involucra las variables y constantes reconocidas. Akkan (2013) describe cómo estudiantes de 10-15 años usan estrategias de conteo o aditivas, en casos particulares cercanos, sin llegar a generalizar. Otras estrategias que usaron para generalizar (patrones lineales y cuadráticos en secuencias de números o figuras) implicaron establecer relaciones entre variables. Esto se dio en menor medida y conforme aumentó el curso. Güner et al. (2013) reconoció la misma tendencia para generalizar (patrones numéricos y visuales) en estudiantes de séptimo y octavo curso (11 a 13 años).

Generalización y su representación

La generalización cumple un papel trascendental en la matemática: se considera la raíz del álgebra (Mason et al., 2005). Diferentes concepciones de generalización coinciden en el reconocimiento de una regularidad, la generación de nuevos casos particulares y su representación. Pólya (1989) concibe la generalización como la generación de casos nuevos según la regularidad detectada en un conjunto de elementos. Generalizar es extender el razonamiento más allá de los casos considerados, ya sea explicitando la similitud presente o bien ampliando el razonamiento hacia los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones entre estos (Kaput, 1999). Según Radford (2010), la generalización algebraica es identificar una regularidad en algunos elementos de una secuencia, que luego es generalizada a todos, y usarla en la elaboración de una expresión que los representa. Stephens, Ellis et al. (2017) diferencian la generalización como proceso y como producto. El producto se obtendría de tres procesos: (a) identificar la regularidad en un conjunto de elementos, (b) razonar más allá de los casos en cuestión y (c) ampliar los resultados más allá de los casos particulares.

En este trabajo partimos del enfoque funcional del álgebra escolar, cuyo concepto matemático central es la función (Yerushalmy, 2000). El pensamiento funcional es “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 211). El pensamiento funcional promueve el razonamiento, manipulación, generalización y representación de relaciones que se establecen entre cantidades covariantes (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

En este estudio asumimos la definición de generalización de Kaput (1999), antes citada, aplicada al contexto funcional. Entendemos las representaciones de la generalización como los modos en que la generalización es evidenciada y expresada (Ureña et al., 2019). Estas implican el uso de variados tipos de representaciones (e.g., lenguaje verbal, gráficos, representaciones simbólicas), combinaciones de estas y también de otros sistemas semióticos como el gestual (Radford, 2018).

Los estudiantes pueden usar y representar distintas relaciones entre las variables que identifican en la ruta hacia la generalización de funciones. Smith (2008) propone tres tipos de relaciones: (a) patrones recursivos, que atienden a la variación de una sola de las variables y sus valores se obtienen a partir de otros determinados previamente, (b) relación de correspondencia, que aborda la correlación entre pares de valores correspondientes asociados a la variable independiente y la dependiente y (c) relación de covariación, que implica el análisis de cómo ambas variables covarían, en otras palabras, cómo el cambio en una variable afecta a la otra. Las relaciones funcionales de correspondencia utilizadas por los alumnos pueden ser caracterizadas en términos de su estructura. La estructura refiere a cómo se organiza y expresa la regularidad entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017). Esto es, cómo se operan los valores indeterminados y/o numéricos al ser empleada o representada la regularidad.

Investigaciones desarrolladas en contextos de generalización abarcando distintos cursos, distinguen matices en las representaciones de generalización de los estudiantes. En los primeros cursos escolares, los estudiantes identifican la dependencia entre variables y progresan en el uso de representaciones conforme aumenta el curso, cuando son instruidos. También generalizan y representan diferentes relaciones funcionales (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008). Radford (2018) en un estudio longitudinal desde segundo curso (7-9 años) hasta séptimo (12-13 años), resalta el empleo de variedad de sistemas semióticos (e.g., gestos, lenguaje natural, símbolos) en la expresión de la generalización. Él llama a reflexionar sobre la información que refleja cada sistema respecto a la relación entre las variables. Con estudiantes de cursos superiores de sexto a octavo (10-15 años) y familiarizados con tareas que involucran patrones, Akkan (2013) identifica que los alumnos se sexto se inclinan hacia el uso de representaciones numéricas. Por otro lado, los alumnos de séptimo y octavo con mejor rendimiento académico generalizan empleando diferentes representaciones, entre estas el simbolismo algebraico.

En contextos funcionales de generalización, Torres et al. (2019) distinguen que estudiantes de segundo curso (7-8 años) sin instrucción utilizan representaciones numéricas o verbales e identifican relaciones funcionales al trabajar con casos particulares, sin llegar a generalizarlas. Pinto y Cañadas (2017, 2019) observan que estudiantes en tercer curso (8-9 años) y en mayor medida los de quinto curso (10-11 años), generalizan relaciones funcionales expresándolas principalmente mediante la representación verbal. Los estudiantes de quinto presentan mayor consistencia en el seguimiento de una misma estructura, siendo menos las estructuras utilizadas que en tercer curso y más eficaces para generalizar. Por otro lado, Ureña et al. (2019) determinan que estudiantes de cuarto curso (10-11 años) representan la generalización de formas variadas (e.g., numérica, verbal, simbólica), destacando el uso de ejemplos genéricos y distinguiendo si la representación de la relación funciona es implícita o explícita.

Metodología

Planteamos un estudio de naturaleza descriptiva y exploratoria. Participaron 313 estudiantes (11-13 años): 33 de sexto de educación primaria, 167 de primero de secundaria y 113 de segundo de secundaria. Estos estudiantes participaron de forma voluntaria y resolvieron un cuestionario como prueba de ingreso en un programa de estímulo del talento matemático. El cuestionario consta de cinco tareas que abordan distintos contenidos (e.g., funciones, operaciones con números, divisibilidad, medida en el plano y construcciones espaciales). En este trabajo consideramos la primera de dichas tareas.

Tarea

Analizamos las respuestas a la "tarea del agricultor" (Figura 5.3.1) que implica la generalización de una relación funcional lineal (Ramírez y Cañadas, 2018). Requiere determinar y justificar la cantidad de cuadrados que se forman si los puntos marcados sobre una cuadrícula constituyen sus vértices, cuando han transcurrido 3, 4, 100 y n días. Con esta organización se pretende que los alumnos tomen conciencia sobre la regularidad subyacente e identifiquen y generalicen relaciones funcionales implícitas (Ramírez y Cañadas, 2018). La función que relaciona el número de días y el número de cuadrados es $y = 4x - 6$.

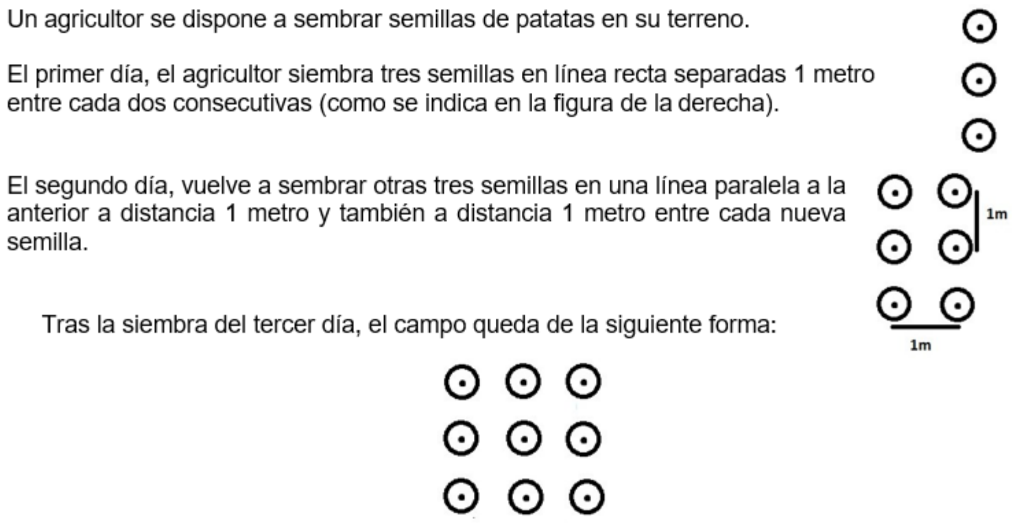


Figura 5.3.1. Situación del agricultor

Análisis

Como unidad de análisis consideramos conjuntamente las respuestas a los cuatro casos propuestos (3, 4, 100 y *n*), pudiendo ser correctas o no. Analizamos las estrategias que han permitido a los estudiantes generalizar y cómo representan la generalización.

Para el análisis de la información y la presentación de los resultados, designamos a cada estudiante por la letra E y un número del 1-313 así como un subíndice numérico que refiere al curso (6=6EP, 1=1ESO, 2=2ESO). Por ejemplo, el estudiante $E110_1$ refiere al estudiante número 110 y está en primer curso de secundaria.

Categorías de análisis

Hemos definido dos categorías para el análisis de los datos, acordes con los dos focos de este trabajo: las estrategias de resolución empleadas por el estudiante y las representaciones de generalización empleadas.

Las categorías relativas a estrategias proceden de los antecedentes expuestos (Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; Merino et al., 2013; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Definimos a continuación todas ellas:

- Conteo: el resultado se extrae del conteo de los elementos que componen la solución.
- Operatoria aditiva: se determina la solución aplicando explícita o implícitamente sumas aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en respuestas previas o posteriores.
- Operatoria multiplicativa: se determina la solución aplicando explícita o implícitamente multiplicaciones o divisiones aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en respuestas previas o posteriores.
- Correspondencia: se establece y hace uso de una relación funcional de correspondencia entre las variables asociadas para describir la situación planteada.
- Proporcionalidad: se aplica el razonamiento de proporcionalidad para obtener una respuesta como producto de otra. Esta estrategia se separa de la operatoria multiplicativa para hacer énfasis en el razonamiento específico involucrado.
- Progresión aritmética: la solución se obtiene aplicando la fórmula de progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)d$, en la que a_n es el valor general de la progresión, a_1 el valor del primer término de la progresión y d la diferencia entre valores consecutivos.
- Recursividad: la respuesta se obtiene sumando la diferencia entre soluciones consecutivas al valor del caso anterior.
- Respuesta directa: hay solución, pero no informa del procedimiento seguido.
- Otra: refiere a procedimientos no clasificables en las categorías previas y que no aplican a la situación planteada ni a los datos presentados en la tarea u obtenidos por el estudiante.

Para establecer las categorías relativas a representaciones de la generalización, consideramos que un estudiante representa la generalización de una relación funcional cuando expresa una regularidad subyacente a la tarea. Partimos de las categorías definidas por Ureña et al. (2019), de las cuales seleccionamos las manifestadas por nuestros participantes.

- No representa la generalización.
- Representa la generalización. Distinguiendo tres subcategorías que son los tipos de representaciones de generalización que distinguimos:
    - Representación verbal de la generalización: la regularidad detectada es expresada por medio de lenguaje natural que refiere a las cantidades indeterminadas relacionadas y sus relaciones.
    - Representación simbólica de la generalización: la regularidad detectada es expresada utilizando simbolismo algebraico para representar las cantidades indeterminadas y sus relaciones.
    - Representación múltiple de la generalización: la regularidad detectada es expresada utilizando varias representaciones (una combinación de representaciones verbales y simbólicas).

Resultados

Organizamos los resultados en dos secciones: (a) las estrategias vinculadas con la generalización y (b) las representaciones de la generalización empleadas por los alumnos.

Estrategias vinculadas con la generalización

En la Tabla 5.3.1 indicamos el número de estudiantes que usaron cada estrategia para cada uno de los casos por los que se les pregunta y distribuidos según el curso.

Tabla 5.3.1. *Estrategias empleadas por los estudiantes*

	Casos 3 y 4			Caso 100			Caso n		
Estrategias	6EP	1ESO	2ESO	6EP	1ESO	2ESO	6EP	1ESO	2ESO
Conteo	19	74	73	0	0	0	1	3	0
Operatoria aditiva	0	1	0	0	4	1	0	0	1
Operatoria multiplicativa	0	0	0	3	15	7	3	4	1
Correspondencia	0	0	0	10	36	25	5	31	24
Proporcionalidad	0	0	0	5	30	21	3	10	8
Progresión aritmética	0	0	0	0	0	2	0	0	1
Recursividad	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Respuesta directa	10	63	20	8	23	19	5	12	7
Otra	2	9	9	3	12	6	3	11	7
No responde	2	20	11	4	47	32	13	96	62
Total	33	167	113	33	167	113	33	167	113

Observamos diferencias en el uso de las estrategias según el caso al que refieren las preguntas y el curso. Las estrategias de progresión aritmética y recursividad casi no son aplicadas. Estas se utilizan solo en secundaria en los casos finales. De igual forma las estrategias operatorias aditiva y multiplicativa también son usadas por una cantidad reducida de estudiantes. La segunda se emplea en todos los cursos en los dos casos finales, principalmente en el caso 100. Mientras que la operatoria aditiva se usa en menor medida y sólo por estudiantes de secundaria.

Respecto al uso mayoritario de las estrategias, en los casos particulares 3 y 4 se usan principalmente la respuesta directa y el conteo. En los casos 100 y n detectamos mayor diversidad de estrategias, identificándose como la más frecuentes la correspondencia y la proporcionalidad, sobresaliendo la primera. Destaca el mayor uso de la estrategia de correspondencia por alumnos de primaria cuando abordan el caso 100 (un 30%, frente a un 21,56% de primer curso y un 23% en segundo curso de secundaria) e, inversamente, mayor uso por parte de los alumnos de secundaria en el caso n (un 18,56% en primer curso y un 21,24% en segundo curso de secundaria frente un 15,15% en sexto curso).

Todos los estudiantes que generalizan usaron la estrategia de correspondencia, salvo uno que generaliza planteando una progresión aritmética. Mediante la correspondencia los alumnos representaron la regularidad identificada. Nuestro interés se centra en las estrategias empleadas por los estudiantes para generalizar. Por este motivo, a continuación analizamos con mayor detalle las respuestas de los estudiantes que generalizaron o evidenciaron el reconocimiento de una regularidad aplicando la estrategia de correspondencia.

Distinguimos dos casuísticas en el uso de la estrategia de correspondencia:

a) Regularidad parcial: se utiliza una regularidad basada ya sea en el análisis de la solución a dos casos particulares o en el análisis de la solución de un solo caso particular.

b) Regularidad completa: se usa una regularidad coherente con el análisis de las soluciones a los casos particulares.

En la Tabla 5.3.2 distinguimos las dos formas en que los estudiantes emplean esta estrategia.

Tabla 5.3.2. *Estrategias de correspondencia*

	Curso			
	6EP	1ESO	2ESO	Total
Regularidad parcial	3	15	8	26
Regularidad completa	8	23	18	49
Total	11	38	26	75

Un total de 11 estudiantes de primaria y 26 y 38 en primero y segundo curso de secundaria, respectivamente, emplearon la estrategia de correspondencia en al menos uno de los casos 100 o n. El empleo de la estrategia de correspondencia de acuerdo a una regularidad parcial se traduce principalmente en el uso de relaciones funcionales con estructura multiplicativa $2n$, $3n$ o $4n$. Un estudiante en sexto curso, ocho en primer curso y tres en segundo curso de secundaria plantearon estas estructuras. Estas se derivan del análisis de la solución a los dos primeros casos consecutivos que evidencian un incremento constante en 2, 3 o 4 en el número de cuadrados por día. También se utilizan relaciones funcionales basadas en el análisis de la solución a un solo caso particular, el caso 4. Dos estudiantes en primer curso y tres en segundo curso de secundaria extrajeron de esa solución una estructura que usan de modo genérico en los casos siguientes. $E240_2$, por ejemplo, escribió simbólicamente la estructura $[(n-1)\cdot 2]+\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)$ partiendo de los cuadrados que identificó en 4 días (6 grandes, 2 medianos y 2 pequeños). Esta casuística se manifiesta también mediante otras estructuras que usaron dos alumnos en sexto, tres en primero y dos en segundo. Ellos evidenciaron regularidades parciales poco claras y que no se extraen completamente de las soluciones a ninguno de los primeros casos particulares. Por ejemplo, $E155_1$ en el caso n (Figura 5.3.2) representó simbólicamente los cuadrados interiores como $n\cdot 2-2$, sin embargo, sin conexión con resultados previos, dividió por 4 la estructura anterior para determinar la cantidad de cuadrados grandes. Este procedimiento podría vincularse con la solución al primer caso particular (caso 3) donde cuatro cuadrados pequeños forman uno más grande.

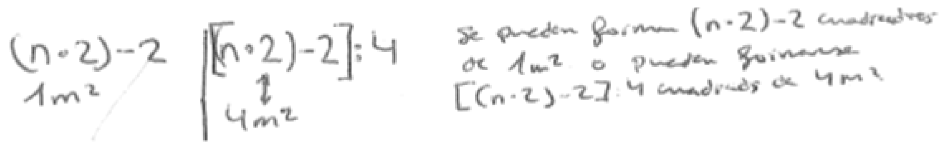


Figura 5.3.2. Respuesta de $E155_1$, caso *n*

La estrategia de correspondencia en la que identifican una regularidad completa es la más utilizada (8, 23 y 18 estudiantes por curso, respectivamente). En esta los estudiantes usaron una relación funcional de correspondencia coherente con las soluciones a los primeros casos particulares. Esto se observa por ejemplo en las respuestas de $E102_1$. En el caso 100 utilizó la relación funcional con estructura $(n-5)\cdot 4+14$ para determinar todos los cuadrados que se forman y la escribió simbólicamente como $(n-5)\cdot 4$ en el caso n. Él partió de 14 cuadrados que se forman en 5 días (Figura 5.3.3).

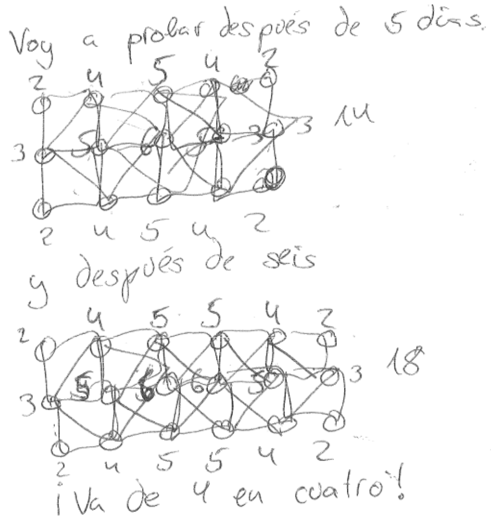


Figura 5.3.3. Casos extra considerados por $E102_1$, caso 100

La correspondencia vinculada con regularidades generales en su mayoría se corresponde con la cantidad de cuadrados que se forman apoyados sobre la base. Esto es apreciable en la estructura $3(n-4)+8$ implícita en la respuesta "cada día se añaden 3, así que $(3\cdot 96)+8$" ($E1_6$), y otras equivalentes como $(n-2)\cdot 3+2$ ($E299_2$) o $3n-4$ (utilizada solo en secundaria). Reconocemos matices en las estructuras de las funciones empleadas. Por un lado, su expresión según el tamaño de los cuadrados (e.g., ver Figura 5.3.4). Y por otro, el uso en secundaria de otras estructuras correspondientes a la identificación de una cantidad aún menor de cuadrados. Cuatro estudiantes de primer curso y uno de segundo curso usaron la estructura $(n-1)\cdot 2$ vinculada al reconocimiento de los cuadrados pequeños interiores. Mientras que otro estudiante, $E204_2$, representó con $n-1$ los cuadrados pequeños que se forman en la fila superior.

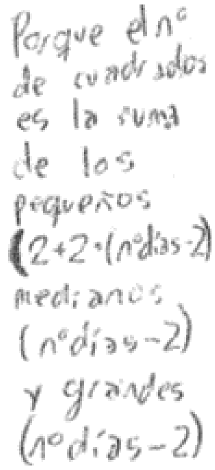

Porque el nº
de cuadrados
es la suma
de los
pequeños
(2+2·(nºdías-2)
medianos
(nºdías-2)
y grandes
(nºdías-2)

Figura 5.3.4. Respuesta $E179_1$, caso 100

Representaciones de generalización

Las generalizaciones de los estudiantes tienen lugar en las respuestas a las preguntas con los casos 100 y n. En ambos casos los estudiantes utilizan representaciones de la generalización verbales, simbólicas o múltiples.

La Tabla 5.3.3 presenta los datos relativos a las categorías de representaciones de generalización distinguiendo el curso de los estudiantes y el caso en que tienen lugar. También indicamos el número de estudiantes que no representan la generalización pero dan evidencia de haber identificado una regularidad.

Tabla 5.3.3. *Representaciones de generalización*

Curso	Caso n No representa	Caso n No representa pero identifica	Caso n Rep. Verbal	Caso n Rep. Simbólica	Caso n Rep. Múltiple	Total
	Caso 100 No representa					
6EP	0	0	1	0	0	1
1ESO	0	0	0	3	0	3
2ESO	0	0	0	1	0	1
	Caso 100 No representa pero identifica					
6EP	1	0	1	0	0	2
1ESO	0	0	0	7	0	7
2ESO	1	0	0	7	0	8
	Caso 100 Representación Verbal					
6EP	4	0	1	1	1	7
1ESO	7	0	7	10	0	24
2ESO	1	0	4	10	0	15
	Caso 100 Representación Simbólica					
6EP	0	0	0	0	0	0
1ESO	0	0	0	1	0	1
2ESO	0	0	0	2	0	2
	Caso 100 Representación Múltiple					
6EP	1	0	0	0	0	1
1ESO	0	0	0	3	0	3
2ESO	0	0	0	0	0	0

Como se aprecia en la Tabla 5.3.3, en el caso 100 todos salvo cinco alumnos evidenciaron el reconocimiento de una regularidad coherente con las respuestas a los primeros casos particulares, aunque dos estudiantes de sexto, siete en primero y ocho en segundo no representaron la generalización. Ellos expresaron numéricamente la relación entre cantidades asociadas a las variables que emplearon para resolver los casos propuestos. Por ejemplo, $E85_1$ respondió que se forman $98 + 99 \cdot 2 = 296$ cuadrados empleando la estructura que representó simbólicamente en el caso n como $nº\, de\, cuadrados = (n-2) + (n-1) \times 2$. Posteriormente al responder al caso n, de entre estos estudiantes, los de secundaria representaron la generalización simbólicamente y uno en sexto curso lo hace verbalmente.

En las siguientes secciones describimos las representaciones de la generalización empleadas por los estudiantes distinguiendo por separado cada tipo según las categorías establecidas.

Representación verbal

La representación verbal de la generalización en los tres cursos se usa con más frecuencia en el caso 100 (7 estudiantes en sexto, 24 en primero y 15 en segundo). Esta representación de la generalización se emplea en menor medida en el caso n, por tres, siete y cuatro estudiantes por curso, respectivamente, aunque el tipo de expresiones son similares a las dadas en el caso 100. De estos alumnos, todos los de secundaria y uno en sexto curso emplearon la representación verbal de la generalización en ambos casos.

Una de las representaciones verbales de la generalización más común es del tipo “cada día se añaden 3 [cuadrados]”. Esta representación comprende el uso de relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diversas. Ejemplificando, $E1_6$ (Figura 5.3.5) utilizó en el caso 100 la estructura $3(n-4)+8$, mientras que $E214_2$ determinó que se forman 285 cuadrados obtenidos al efectuar la multiplicación $95 \cdot 3$, es decir, refiere a la estructura $3(n-5)+11$, sin considerar la constante 11. En secundaria esas representaciones verbales se vincularon con relaciones funcionales con estructura multiplicativa $3n$, $2n$ o $4n$.

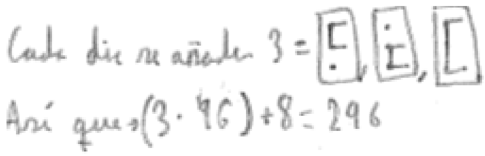


Figura 5.3.5. Respuesta de $E1_6$, caso 100

En secundaria observamos representaciones verbales de la generalización más fieles a la estructura de la relación funcional que usan. $E98_1$, por ejemplo, reconoció que en 100 días hay “$x = 2 + 98 \cdot 3 = 296$ porque me he dado cuenta de que cada día hay tres cuadrados más que el día anterior, entonces he pensado que como hay 2 cuadrados en 2 días habrá que sumarle 3 durante 98 días”. La estructura de la relación funcional en la respuesta del estudiante es $2 + (n - 2) \cdot 3$. E208$_2$ expuso, por otra parte, que "siempre son los días por $3 - 4$ y esos son los cuadrados", refiriendo a la estructura $3n - 4$.

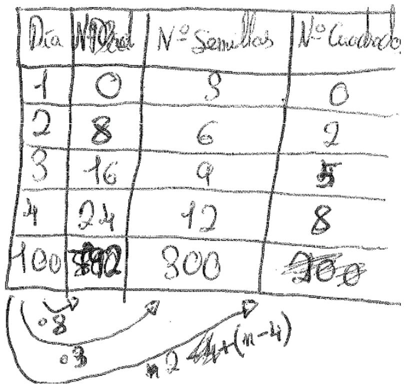
La representación verbal de la generalización es utilizada en menor medida para describir otras relaciones funcionales que no son coherentes con los cálculos y resultados dados por el estudiante (un estudiante por curso). Por ejemplo, E117$_1$ generalizó correctamente que "por día van aumentando 2 cuadritos chicos y 1 grande". Sin embargo, este estudiante determinó que se forman 200 y 50 cuadrados respectivamente, reflejando el empleo de la relación funcional $2n + n \div 2$, sin conexión con la representación verbal y otros resultados previos.

Representación simbólica

La representación simbólica de la generalización se observa principalmente en el caso n. La exhibieron 24 estudiantes en primero, 20 en segundo y 1 en sexto.

El único estudiante de primaria que representó la generalización de forma simbólica (E1$_6$) escribió "se forman $(n \cdot 3)$ porque cada día se forman 3". Aunque es coherente con la representación verbal mostrada en el caso 100, cambió la estructura desde $3(n - 4) + 8$ que aplicó en el caso previo (Figura 5.3.5).

En secundaria esta representación engloba una diversidad de estructuras. E292$_2$, por ejemplo, escribió la estructura $2n + (n - 4)$ con base en la tabla que elaboró en el caso 100 (Figura 5.3.6). También se representan simbólicamente otras estructuras equivalentes para los cuadrados que se apoyan sobre la base como $(n - 2) + (n - 1) \cdot 2$ (E85$_1$), $n \cdot 3 - 4$ (E114$_1$) o $(n - 4) \cdot 3 + 8$ (E245$_2$), así como estructuras que representan todos los cuadrados que se pueden formar, por ejemplo, $(n - 4) \cdot 4 + 10$ (E301$_2$) o $2 + 4(n - 2)$ (E179$_1$).



Día	[illegible]	Nº Semillas	Nº Cuadrado
1	0	3	0
2	8	6	2
3	16	9	5
4	24	12	8
100	792	300	[illegible]

Figura 5.3.6. Tabla de E292$_2$, caso 100

La representación simbólica de la generalización también se manifiesta en el caso 100 exclusivamente en secundaria. Un estudiante de primer curso y dos de segundo emplearon la misma representación que en el caso n (ver Figura 5.3.7).

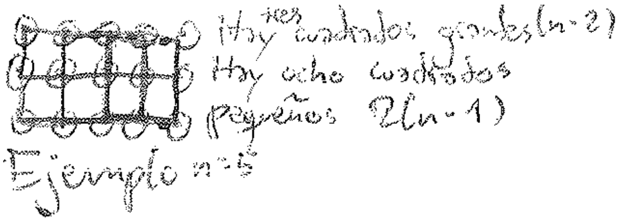


Figura 5.3.7. Respuesta E272$_2$, caso 100

En línea con esta representación de la generalización, siete alumnos de cada curso de secundaria llaman la atención al pasar de no representar la generalización en el caso 100, aunque identificaron una regularidad, a representarla simbólicamente en el caso n. Por otro lado, otros 10 estudiantes en cada curso de secundaria y uno en primaria pasaron de la representación verbal de la generalización a la simbólica entre el caso 100 y n.

Representación múltiple

La representación múltiple de la generalización se manifiesta al utilizarse la representación verbal para las variables como términos generales y emplearse números conectados con operaciones aritméticas para indicar la relación entre las variables (e.g., ver Figura 5.3.4). En primaria dos estudiantes usaron esta representación. E30$_6$ planteó en el caso 100 la expresión $Solución = N^{o} de\ día \times 3$. Mientras que E14$_6$ pasó de la representación verbal de la generalización en el caso 100 a múltiple en el caso n (Figura 5.3.8). En secundaria tres estudiantes en primer curso emplearon la representación múltiple como lo hace E103$_1$ en la expresión $(número\ de\ días\ \times 4) - 4 = 296$. En el caso n todos ellos representaron la generalización simbólicamente siendo coherentes con la estructura de la relación funcional. En el caso final sustituyeron la representación verbal de la variable por la letra n. E103$_1$, por ejemplo, escribió la estructura de la relación funcional como $n \times 3 - 4$.

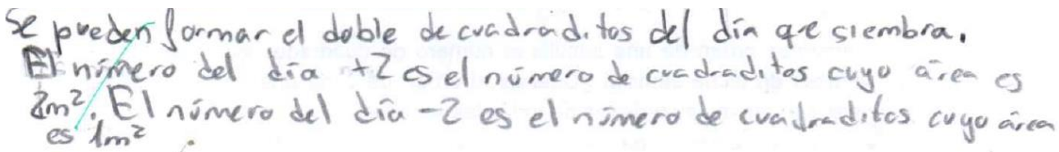


Figura 5.3.8. Respuesta de E14$_6$, caso *n*

Discusión y conclusiones

En esta investigación describimos las estrategias para generalizar y las representaciones empleadas por un grupo de último curso primaria (sin conocimiento algebraico formal) y dos cursos de secundaria (quienes inician su formación algebraica). Ellos resuelven una tarea de generalización en un contexto funcional del álgebra escolar.

Los estudiantes emplearon diversas estrategias en la resolución de la tarea (e.g., respuesta directa, conteo, proporcionalidad, correspondencia). Entre todas sobresale la estrategia de correspondencia por vincularse casi exclusivamente con la generalización en los casos 100 y n.

Las representaciones de generalización son las mismas (verbal, simbólica y múltiple) en todos los cursos, aunque evidenciamos cambios en las estructuras y la coherencia entre la representación de la generalización y la estructura empleada, según el curso y caso involucrado (caso 100 o caso n). En los tres cursos se aplica principalmente la estrategia de correspondencia siguiendo regularidades generales. Es en secundaria donde en mayor medida los estudiantes representaron simbólicamente la generalización siguiendo una misma estructura de un caso a otro. También reconocemos que en secundaria se plantean en mayor medida relaciones funcionales con estructuras multiplicativas siguiendo regularidades parciales que no aplican a la tarea. Identificamos similitudes en las estructuras y las representaciones de generalización empleadas en los dos cursos de secundaria lo cual puede ser debido a que ambos grupos de estudiantes habían iniciado ya su formación algebraica.

Por otro lado, reconocemos que la tarea propuesta promovió el uso, reconocimiento y representación (no necesariamente de forma algebraica convencional) de las variables y sus relaciones, sin dejar de lado el acercamiento de los estudiantes a las funciones, reforzando así los resultados de otros trabajos (e.g., Amit y Neria, 2008; Blanton et al., 2011; Lannin et al., 2006; Warren et al., 2016).

Estrategias vinculadas a la generalización

Esta investigación refleja el alcance de la estrategia de correspondencia para generalizar, en consonancia con los resultados de otros estudios (e.g., Amit y Neria, 2008; Güner et al., 2013; Zapatera Llinares, 2018). Dicha estrategia se corresponde con estrategias funcionales descritas en otras investigaciones (e.g., Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; Lannin et al., 2006; Zapatera Llinares). Estas coinciden en el uso o representación de relaciones funcionales entre dos variables, que hemos acotado como relaciones funcionales de correspondencia (Smith, 2008) de acuerdo con nuestros resultados. Definido esto, como en otros trabajos (e.g., Stacey, 1989; Amit y Neria, 2008), destacamos el uso de la estrategia de correspondencia (i.e. estrategia funcional de correspondencia) en los casos que invitan a generalizar (100 y n). Concordamos con Lannin et al. (2006), en que su empleo se motiva por la propuesta de casos distantes y la demanda cognitiva en el salto desde los casos particulares cercanos (con los que el estudiante tiene familiaridad) a casos que requieren de un tratamiento diferente y de estrategias más eficaces para resolver y generalizar. Coincidimos con otras investigaciones (e.g., Amit y Neria, 2008; Zapatera Llinares, 2018) en que el empleo de la estrategia de correspondencia además de informar sobre la flexibilidad de los estudiantes para cambiar de estrategia de acuerdo a las exigencias de los casos involucrados también ha sido clave para representar la generalización.

Llama la atención un mayor uso de la estrategia de correspondencia en el caso 100 por estudiantes de primaria e inversamente mayor uso por estudiantes de secundaria en el caso n. Esto se puede atribuir a la variedad de estrategias que usan los estudiantes de secundaria en el caso 100 y al hecho de que muchos no responden o lo hacen directamente. En el caso n esto se invierte ya que los estudiantes de secundaria tendieron a usar la misma estrategia de correspondencia que en el caso 100, mientras que en primaria muchos no respondieron posiblemente debido a la presencia de la letra a la que no están habituados.

Consideramos un aporte del trabajo la diferenciación de dos tipos de estrategias de correspondencia de acuerdo con la regularidad seguida en el uso de una estructura. La estrategia de correspondencia según una regularidad completa se emplea con más frecuencia. Y se caracteriza por el uso consistente de la regularidad percibida a lo largo de la tarea. Aunque reconocemos también que las estructuras en ocasiones se escriben de forma incompleta entre un caso y otro (evidenciado en coeficientes numéricos incorrectos u omitidos).

Por otro lado, en la estrategia de correspondencia que aborda regularidades parciales, las relaciones funcionales tienen estructuras que no se corresponden a la tarea ni a los resultados obtenidos en todos los casos particulares. Esta última estrategia comparte similitudes con estrategias de generalización como "múltiplo de la diferencia" y "estimar y probar" identificadas en otras investigaciones (Akkan, 2013; Güner et al., 2013). La primera estrategia se observa en el planteamiento de las relaciones funcionales con estructura multiplicativa como $2n$ o $3n$, mientras que la segunda es apreciable en la predicción vaga de una regla sin atención a su precisión o validez.

Los cambios en las estructuras obtenidas de regularidades completas entre un caso y otro, así como el uso de estructuras que no se corresponden del todo con la tarea propuesta o con los propios resultados de los alumnos (i.e. siguiendo regularidades parciales) se pueden deber a errores de cálculo o a un énfasis en responder más que en precisar las respuestas. Estos resultados reflejan a su vez que los estudiantes no tienen el hábito de la prueba, como destaca en otros trabajos (e.g., Akkan, 2013; Stacey, 1989). Otras razones son la poca experiencia de los alumnos con contextos funcionales de generalización y la propia dificultad de la tarea que implica modelar una situación no familiar a los estudiantes (Lepak et al., 2018).

Estrategias como el conteo, recursividad y proporcionalidad, reconocidas como estrategias de generalización (e.g., Akkan, 2013; Güner et al., 2013; Lannin et al., 2006), no se relacionaron con la generalización en este trabajo. El disminuido uso de la recursividad, se justifica desde el diseño de la tarea en el que se evitó la propuesta de varios casos consecutivos con esta finalidad y de acuerdo a los resultados de otros trabajos (e.g., Carraher et al., 2008; Morales et al., 2018). El conteo se relega a los dos primeros casos particulares donde los estudiantes realizaron dibujos. En cuanto a la proporcionalidad, como en otros estudios (e.g., Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018), distinguimos su uso inadecuado achacable por un lado a una sobregeneralización de conocimientos aprendidos (Stacey, 1989) o al deseo de eficiencia para resolver la tarea (Lannin et al., 2006).

Por último, valoramos que las estrategias usadas por los alumnos brindan indicios sobre su formación y experiencias, así como la dificultad que supone el uso de estrategias adecuadas para generalizar, complementando así los hallazgos de otros estudios (e.g., Barbosa et al., 2012; Moss y Beatty, 2006; Stacey, 1989). Al mismo tiempo, la información que reflejan las estrategias podría considerarse como un recurso importante en el diseño de tareas que se orienten al desarrollo de los componentes esenciales del pensamiento algebraico.

Representaciones de generalización

Otro de los principales aportes de este trabajo radica en las representaciones de generalización evidenciadas por estudiantes de último curso de primaria y por estudiantes de primeros cursos de secundaria. Reconocemos tres representaciones de generalización: verbal, simbólica y múltiple. Son interesantes las diferencias en las estructuras generalizadas y representadas, siendo estas más variadas en secundaria.

En este trabajo aportamos una reorganización de las representaciones de generalización propuestas por Ureña et al. (2019) de acuerdo a si el estudiante representa la generalización o bien no la representa pero evidencia el reconocimiento de una regularidad.

Resulta interesante que en el caso 100 algunos estudiantes, mayoritariamente en secundaria, aunque no representaron la generalización, exhibieron haber reconocido una regularidad con base a la solución a los casos previos. El resultado puede deberse a la naturaleza numérica del caso en cuestión ya que la mayoría de estos alumnos representó simbólicamente la generalización en el caso n.

La representación verbal de la generalización es la más frecuente en el caso 100 en todos los cursos, mientras que en el caso n es la simbólica. La representación múltiple, por otro lado, es observada sólo en el caso 100. Los resultados sugieren que cuando se cuestiona a los estudiantes por casos particulares, incluso lejanos, priorizan el uso de representaciones verbales o múltiples reservando el uso de simbolismo algebraico para los casos en que desde la tarea se les demanda.

En la representación verbal de la generalización observamos la formulación de algunas expresiones que, aunque parecen referir a una estrategia recursiva al aludir al incremento constante entre soluciones consecutivas, se vinculan con relaciones funcionales de correspondencia con estructuras diversas. La representación verbal, aunque aborda la indeterminación de las variables, no siempre se corresponde con la estructura utilizada. Mientras que en la representación múltiple y simbólica queda explícito el manejo de la indeterminación de las cantidades y es evidente la estructura que describe la relación funcional entre estas. De esta observación extraemos la limitación, de algunos estudiantes, para expresar verbalmente de forma precisa y ordenada sus razonamientos a pesar de identificar las variables y las relaciones, como advierten otros trabajos (e.g., Radford, 2018; Ureña et al., 2019). Este resultado invita a prestar atención a las formas de expresión verbal de los estudiantes y a fortalecer la comunicación para el planteamiento claro de ideas (Barbosa et al., 2012). En el caso general n la generalización también se representa verbalmente. En sexto este hallazgo coincide con otros estudios que reconocen la tendencia de los estudiantes de primaria a emplear principalmente representaciones verbales (o numéricas) en sus producciones (e.g., Merino et al., 2013; Pinto y Cañadas, 2017; Torres et al., 2019; Ureña et al., 2019). En secundaria, aunque esta representación también se emplea, su uso disminuye en el último caso donde la mayoría la cambió por la representación simbólica de la generalización.

Observamos la representación simbólica de la generalización principalmente en el caso n y, casi exclusivamente, en secundaria. Este resultado es con claridad una consecuencia de la familiaridad de estos estudiantes en el uso de las letras. Otro aspecto que sobresale en secundaria es la representación simbólica de estructuras más diversas y complejas. Coincidimos en que, conforme aumenta el curso, los alumnos muestran más destreza en el uso flexible de variedad de representaciones por su experiencia formativa y desarrollo cognitivo (Akkan, 2013; Blanton y Kaput, 2004; Radford, 2018). Esto permite concluir que, si bien el empleo de la estrategia de correspondencia asociada al uso de relaciones funcionales no se ha visto condicionada por la edad ni la instrucción, las representaciones de generalización sí.

Finalmente, en la representación múltiple de la generalización los estudiantes emplearon palabras a modo de variables en expresiones cuasi algebraicas. Esta representación la podríamos reconocer como un paso previo a representar simbólicamente la generalización o incluso como una representación semisimbólica (Amit y Neria, 2008). La mayoría de los estudiantes que la usaron representaron simbólicamente la generalización sustituyendo la palabra general por la letra n cuando es propuesta.

Los resultados nos permiten resaltar la riqueza y flexibilidad en el uso de representaciones (no sólo simbólicas convencionales) para organizar y externar sus razonamientos. Coincidimos con más estudios en el reconocimiento de la variedad de recursos semióticos y de representaciones que validan el pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Amit y Neria, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018; Ureña et al., 2019). Cada representación empleada evidencia de forma distinta las variables, sus relaciones y la profundidad con que se abordan (como argumenta Radford, 2018). En las producciones de los estudiantes que no representan la generalización, pero emplean la estrategia de correspondencia, quedan implícitas la regularidad identificada, las variables y la relación entre estas.

En comparación con otros trabajos desarrollados en diversos cursos (e.g., Akkan, 2013; Barbosa et al., 2012; Ureña et al., 2019; Zapatera Llinares, 2018), también queda en evidencia un mejor desenvolvimiento con casos particulares cercanos que con particulares distantes o generales, donde pocos generalizan y la mayoría no responde (Tabla 5.3.1).

Por otro lado, dada la variedad de soluciones a la tarea, sobresale una reducida uniformidad en el reconocimiento de la regularidad, y en la identificación y representación de los cuadrados que se forman. También, al igual que en el trabajo de Barbosa et al. (2012), a pesar del componente visual de la tarea, pocos estudiantes (y sólo en secundaria) hicieron uso de este recurso más allá de los casos particulares propuestos. Estos hallazgos informan sobre la disminuida familiaridad de los estudiantes con este tipo de tareas de generalización y el reto que suponen en primaria y los primeros cursos de secundaria.

Coincidimos con Warren et al. (2016) en la identificación de dificultades algebraicas similares a las encontradas en otros estudios. Estas se relacionan con el uso eficiente y adecuado de las representaciones, la identificación de regularidades vinculadas a la variación, el cambio entre representaciones y dificultad para organizar y representar la estructura ligada a la regularidad. Contribuimos al cuestionamiento sobre la introducción formal del álgebra hasta el inicio de la secundaria, dados los hallazgos de otras investigaciones en *early algebra* (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Blanton et al., 2015;

Carraher et al., 2008). Estas muestran desde los primeros cursos la habilidad de los estudiantes para comprender y manipular la notación de variables en forma de letra como cantidad indeterminada. También ponen de manifiesto su habilidad para representar y generalizar relaciones funcionales de diversa complejidad, cuando han sido instruidos en esas temáticas. Consideramos que más allá de la idea del condicionamiento de la abstracción propia del álgebra o el desarrollo cognitivo de los estudiantes, probablemente lo que ha incidido en los resultados y dificultades que mostramos, son las reducidas oportunidades para enfrentarse a situaciones algebraicas desde cursos anteriores (Blanton et al., 2011; Stephens, Ellis et al., 2017; Zapatera Llinares, 2018). Acentuamos la idea de Stacey (1989) que la instrucción cumple un rol fundamental en la guía de los estudiantes para la organización de sus ideas, la búsqueda acertada de estrategias para resolver problemas y la exploración de recursos para expresarse.

Consideramos que una limitación del estudio es la reducida cantidad de estudiantes de primaria que ha participado en el estudio. Por otro lado, la información recogida proviene de estudiantes con interés en desarrollar su formación matemática. En una línea complementaria interesaría ampliar la investigación con datos provenientes de otros medios con estudiantes de más cursos y con diferente perfil académico.

Agradecimientos

Este trabajo es parte de los estudios doctorales del primer autor apoyado por la Universidad de Costa Rica. Este trabajo se ha realizado en los proyectos con referencia EDU2016-75771-P y EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE), financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders's efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema*, *27*(47), 703-732.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Barbosa, A., Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(3), 273-293.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines y A. B. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (Eds.). (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Güner, P., Ersoy, E. y Temiz, U. (2013). 7th and 8th grade students' generalization strategies of patterns. *International Journal of Global Education*, *2*(4), 38-54.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Lepak, J. R., Wernet, J. L. y Ayieko, R. A. (2018). Capturing and characterizing students' strategic algebraic reasoning through cognitively demanding tasks with focus on representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 57-73.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University and Paul Chapman Publishing.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6*, *2*(1), 24-40.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y genralización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolamo, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pólya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?.* Trillas.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Ramírez, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 79,* 23-30.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid, España: SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Sense Publishers.

Yerushalmy, M. (2000). Problems solving strategies and mathematical resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *43,* 125-147.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 87-114.

Capítulo 6. Conclusiones

En este último capítulo de la tesis exponemos las conclusiones que obtenemos de la investigación realizada. Para este efecto se consideran los principales resultados y conclusiones de cada uno de los tres estudios y las relaciones entre los mismos. El capítulo consta de tres apartados. En el primero describimos el logro de los objetivos específicos de investigación, además de destacar los aportes del trabajo y posibles implicaciones para la instrucción. En el siguiente apartado describimos las principales limitaciones que reconocemos en los tres estudios realizados. Finalmente planteamos posibles líneas futuras de investigación como ampliación o complemento al trabajo realizado.

6.1. Logro de los objetivos de la investigación

El trabajo que realizamos se enmarca en la línea de pensamiento algebraico desde el enfoque funcional del álgebra escolar. El objetivo general que orienta la investigación es explorar y describir las estrategias y manifestaciones de generalización de estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria al resolver tareas de generalización en las que hay implícitas relaciones funcionales. El contenido focal en que nos centramos es la generalización.

Reconocemos que las tareas funcionales de generalización propuestas en los estudios sirvieron, como se pretendía, para que los alumnos establecieran relaciones entre cantidades covariantes y representaran su respectiva generalización mediante representaciones variadas, permitiéndoles exponer su pensamiento funcional. En general, los estudiantes de los distintos cursos tuvieron un mejor desenvolvimiento en los casos que involucran valores específicos cercanos que en los que implican valores específicos distantes/lejanos o generales, donde pocos generalizaron y la mayoría no respondió a las cuestiones. Estos resultados son consistentes con otros trabajos (e.g., Akkan, 2013; Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). También llama la atención que, aunque se podría presuponer en los estudiantes de sexto curso y primeros cursos de secundaria habilidades para generalizar (estudio 2 y estudio 3), la mayoría de ellos no representa la generalización, incluso habiendo sido introducidos al álgebra en secundaria. Como se profundiza en los apartados siguientes, consideramos que estos resultados se pueden deber a una reducida experiencia con tareas de generalización, la demanda de extender o cambiar los razonamientos y procedimientos entre los casos (específicos a generales) requerida por la tarea o el abordaje de la indeterminación de las cantidades. En el estudio 2 y estudio 3, principalmente, también pueden haber influido la interdependencia entre los datos o la utilización de representaciones pictóricas desde las cuales los estudiantes debían generar y extraer información. En este caso una ilustración inadecuada o una habilidad pobre de visualización influiría en los resultados que determinan y las estrategias que emplearían para resolver, como reconocen otros trabajos (e.g., Lannin et al., 2006).

Como aporte general, la investigación realizada ha permitido profundizar en la generalización como componente fundamental del álgebra particularmente en lo referente a formas de representar la generalización en contextos funcionales. Su abordaje desde el *early algebra* con alumnos de primaria que no han sido instruidos en contenidos algebraicos y también con estudiantes de los primeros cursos de secundaria que recién inician su formación algebraica formal constituye una fortaleza de la investigación. A su vez describimos las estrategias que emplearon los estudiantes y que se relacionan con la generalización y cómo la mediación docente contribuyó en la generalización. El trabajo permite así, no sólo destacar las habilidades algebraicas de diferentes grupos de estudiantes, sino también comparar resultados y reflexionar sobre los contrastes que se aprecian. Los hallazgos y conclusiones generales más importantes se describen en los siguientes apartados dando respuesta a cada uno de los cuatro objetivos específicos.

6.1.1. Objetivo 1

Describir las representaciones de generalización manifestadas por estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria en la resolución de tareas funcionales de generalización

El primer objetivo se abordó transversalmente en toda la investigación, siendo las representaciones de generalización uno de los focos de los tres estudios realizados.

La investigación realizada nos permite reconocer en total cinco representaciones de generalización exhibidas por estudiantes de primaria o primeros cursos de secundaria: numérica, genérica, verbal, simbólica y múltiple. Estas representaciones se han observado a lo largo de la investigación independientemente de la tarea y de si esta ha sido presentada verbalmente (en una entrevista) o por escrito (en un cuestionario). Sí detectamos influencia del tipo de caso (específico o general) al que dieron respuesta los estudiantes. Esto significa que, por ejemplo, mientras que la representación numérica se aprecia principalmente en casos que involucran valores numéricos específicos, la simbólica es más común en los casos generales que involucran la letra como representación de una cantidad indeterminada. A su vez, percibimos que también influyeron la formación algebraica de los alumnos y el apoyo externo que recibieron. Recordamos que en el estudio 1 fueron retroalimentados y motivados constantemente, a diferencia de los otros dos estudios en los que la resolución de las tareas fue individual.

La *representación numérica* de la generalización es evidenciada en el estudio 1 por todos los estudiantes de cuarto curso de primaria. Esta es utilizada casi exclusivamente en casos en los que la variable independiente tomó valores específicos.

Desde nuestra postura, reconocer esta representación de generalización es importante. Podría considerarse que aún no hay generalización, sin embargo, se ha mostrado que los estudiantes han percibido lo general en un conjunto de casos específicos. En este sentido valoramos que en tareas funcionales de generalización la propuesta de un conjunto amplio de casos específicos que involucren diferentes valores numéricos puede motivar la manifestación de la representación numérica de la generalización. En el estudio 2 y el estudio 3 describimos resultados similares de otra forma. En sexto curso de primaria y principalmente en secundaria, identificamos situaciones en las que los estudiantes en el caso específico 100 manifestaron el reconocimiento de una regularidad sin representar la generalización verbal ni simbólicamente. Ellos representaron implícitamente, usando una expresión numérica, una relación funcional entre las cantidades variables de la tarea en ese caso específico. Estos hallazgos pueden deberse a la naturaleza numérica del caso al que dieron respuesta, ya que la mayoría de estos estudiantes luego usaron otras representaciones de generalización en casos más generales (e.g., la verbal en sexto curso y la simbólica en secundaria).

Los resultados permiten también mostrar que la representación numérica de la generalización no es requisito previo para la manifestación de otras representaciones de generalización que involucran la indeterminación de las variables. Aunque reconocemos el valor de esta por comprender una representación familiar, especialmente en primaria (Merino et al., 2013), y que contribuyó a mostrar el reconocimiento y expresión de una regularidad, previamente al trabajo con casos generales.

La *representación genérica* de la generalización la exhibieron únicamente estudiantes de cuarto curso. En los casos generales (que involucran la indeterminación en forma de expresión verbal o de letra) expresaron la relación funcional que identificaron utilizando para explicarla valores específicos a modo de ejemplo genérico. El uso de esta representación de generalización puede haberse debido a varias razones. Una de estas es que la inclusión en la tarea de expresiones generales como "cualquier número" podría ser interpretada como una invitación a usar un número específico, a causa de la diferencia de significados entre la matemática y el lenguaje ordinario (Mason y Pimm, 1984). Otra es la practicidad que engloba el uso de un ejemplo concreto para explicar cuestiones generales. Consideramos que la ausencia de expresiones verbales indeterminadas como "para cualquier valor" y de intervenciones docentes a los estudiantes podrían haber incidido en la ausencia de esta representación de la generalización en los otros dos estudios. Los resultados del estudio 2 y estudio 3 parecen indicar que, cuando expresan la generalización, los estudiantes de sexto curso y los de secundaria se inclinan por el uso de representaciones que refieren de forma general a la relación funcional por medio de las representaciones de generalización verbal, simbólica o múltiple.

La *representación verbal* de la generalización es manifestada en todos los cursos. Mediante la misma los estudiantes expresaron de forma general la relación funcional empleando lenguaje natural. En primaria es ampliamente utilizada en comparación con otras representaciones de generalización. En cuarto curso las representaciones de generalización verbal y genérica fueron utilizadas principalmente en las cuestiones generales y en proporciones similares, coincidiendo con los resultados reportados por Ramírez et al. (2020) con estudiantes de la misma edad. En contraste, la representación verbal es la más ampliamente usada por los estudiantes de sexto curso, con mayor presencia en el caso 100 que en el caso *n*. Los resultados sugieren que conforme aumenta el curso los estudiantes son más capaces de expresar en términos generales la regularidad que reconocen desde los casos específicos. A su vez, en consonancia con otros trabajos, estos también nos permiten reconocer el uso extendido de las representaciones verbales (y numéricas) en el aula de primaria, en cuestiones que invitan a generalizar (e.g., Torres et al., 2019) o para expresar la generalización (e.g., Akkan, 2013; Ayala-Altamirano y Molina, en prensa; Merino et al., 2013; Pinto y Cañadas, 2019; Ramírez et al., 2020; Zapatera Llinares, 2018). Esto es achacable a la comodidad y familiaridad de los estudiantes de primaria con dichas representaciones (Merino et al., 2013), su falta de experiencia con otros tipos de representaciones (e.g., simbólica algebraica) y, en el caso del estudio 1, también a la mediación de la entrevistadora.

En secundaria, al igual que en sexto curso, la representación verbal es utilizada mayormente en el caso 100 y en menor medida en el caso general *n* donde más bien se inclinan hacia la representación simbólica de la generalización. Por otro lado, rescatamos que no hubo grandes diferencias en las representaciones verbales de generalización entre los estudiantes de sexto curso y los de secundaria. El estudio 2 y el estudio 3 también muestran que, aunque algunos estudiantes de sexto curso y de secundaria fueron capaces de expresar la generalización, fracasaron en coordinar la representación verbal con la estructura empleada. Esto revela una disminuida atención a la exactitud de las expresiones verbales planteadas o falta de desarrollo de competencia en el uso de esta representación en contextos matemáticos. Sin duda esto se relaciona también con la ambigüedad propia de la representación verbal (Molina, 2014). En secundaria se observan algunas expresiones generales más acordes con la relación funcional que utilizan.

Aunque en el estudio 1 todos los estudiantes de cuarto curso utilizaron la estructura esperada y expresiones verbales coherentes con la misma, probablemente debido a la familiaridad con la situación planteada, la sencillez de la estructura de la relación funcional involucrada y la mediación de la entrevistadora, también mostraron dificultades para expresar oralmente sus ideas y argumentaciones. La investigación también evidencia escasez de explicaciones e incluso ambigüedad en las mismas. Sobresale así una limitación en algunos estudiantes para expresar de forma precisa sus razonamientos a pesar del reconocimiento de las variables y la relación funcional entre estas, como indican más investigaciones (e.g., Radford, 2018), siendo esto más perceptible en las producciones escritas que en las orales, como reflexiona Ayala-Altamirano y Molina (en prensa). Atribuimos estas dificultades a una posible falta de desarrollo de habilidades verbales, un disminuido entrenamiento en la expresión de sus ideas o a reducidas oportunidades de comunicación en el aula de matemática. Los resultados indican, tanto en primaria como en secundaria, la necesidad y relevancia del desarrollo, promoción y fortalecimiento de las habilidades de comunicación para la expresión adecuada y precisa de razonamientos (Barbosa et al., 2012). Además, sugieren la oportunidad de introducir lenguaje específico que ayude a los estudiantes describir las regularidades de forma general (Warren, 2006).

La *representación simbólica* de la generalización también es mostrada en todos los cursos, con mayor frecuencia en secundaria como consecuencia de la familiaridad de estos alumnos con el uso de letras. En el estudio 1, gracias al espacio de discusión oral y la mediación de la entrevistadora, diferenciamos dos matices. Por un lado, estuvo la escritura de la estructura de la relación funcional por medio de simbolismo algebraico y, por otro, la comprensión de la estructura cuando fue propuesta, siendo más frecuente esta segunda. En los otros cursos sólo se observa el primer matiz dada la naturaleza escrita de la tarea.

En sexto curso sólo un estudiante usó la representación simbólica de la generalización y exclusivamente en el caso *n* (estudio 2). Sin embargo, en la primera tarea, él representó una estructura más simple que la que utilizó en casos previos. Esto nos revela una posible dificultad para articular una coordinación entre las estructuras usadas y su representación general que no es exclusiva a primaria ni a la representación simbólica, como se reconoció antes en la representación verbal de la generalización.

En secundaria esta representación de generalización es aplicada en mayor medida en el caso *n* y siguiendo generalmente una misma estructura entre un caso y otro, como recoge el estudio 3. También sobresale la representación simbólica de estructuras más complejas y diversas, algunas equivalentes entre sí, en comparación con las de los estudiantes de sexto curso. Como apunta Mason et al. (2005), en su caso en secuencias generalizables de figuras, la forma en que un estudiante construye las figuras podría sugerir una estructura implícita que le fue útil para expresar la generalidad. En este caso, desde nuestros resultados, asumimos complementariamente que la estructura que ha usado el estudiante revela también cómo construyó su base para generalizar. En este sentido, la variedad de estructuras equivalentes en secundaria, adecuadas según la regularidad reconocida, muestran el desarrollo de múltiples formas de entender, plantear y usar la regularidad.

Reconocemos una última representación de generalización, la *representación múltiple*. Esta consiste en la combinación de la representación verbal y simbólica. Los estudiantes usaron la representación verbal para las variables como términos generales y las conectaron con números mediante operaciones aritméticas para mostrar así la relación entre las variables. La representación múltiple es aplicada sólo por una cantidad reducida de estudiantes de sexto curso de primaria y primer curso de secundaria. Reflexionamos que esta representación revela en estos estudiantes el alcance de una madurez algebraica para expresar la generalización de forma general, previa a la experiencia con el álgebra formal. En primaria es observada en el caso 100 y el caso *n*. En secundaria ocurre únicamente en el caso 100; quienes la aplican luego representan simbólicamente la generalización en el caso general sustituyendo el término general por la letra *n*. Los resultados sugieren que cuando los estudiantes son cuestionados por casos específicos, incluso lejanos, priorizan representaciones de la generalización verbales o múltiples dejando la representación simbólica para los casos en que se les solicita desde la tarea. Esta representación no convencional la podríamos reconocer como un paso anterior a la representación simbólica o como una representación semisimbólica (Amit y Neria, 2008).

Un rasgo importante a destacar es que cada representación de generalización muestra de forma diferente las variables, sus relaciones y la profundidad conceptual con la que han sido abordadas (Radford, 2018). Mientras que en la representación simbólica y múltiple quedan explicitadas las variables y la estructura de las relaciones funcionales, en la representación numérica, verbal o genérica, estas son más implícitas.

A su vez la investigación permite concluir que, si bien el establecimiento y uso de relaciones funcionales no se ha visto condicionado por el curso o edad de los estudiantes, las representaciones de generalización que exhiben sí como se ha expuesto en los párrafos anteriores.

La evidencia de variedad de representaciones destaca el pensamiento algebraico de los alumnos (e.g., Amit y Neria, 2008; Kaput, 2008; Radford, 2018). Esta investigación muestra diversas representaciones que utilizaron estudiantes de distintos cursos de primaria y de secundaria para organizar y representar la generalización de relaciones funcionales, resaltando también su flexibilidad para cambiar entre estas según cambia el caso al que dan respuesta. Esta flexibilidad para representar la generalización se aprecia de forma distinta en los estudios. Mientras que en el estudio 1 un estudiante pudo exhibir más de una representación de generalización por cuestión, gracias principalmente a la mediación de la entrevistadora, en el estudio 2 y estudio 3 se aprecia en el cambio de un caso a otro.

Por otra parte, el estudio 1 destaca que estudiantes de primaria dieron a las letras interpretaciones distintas a la de representación de una cantidad indeterminada. Algunos le asignaron valores específicos o se resistieron a usarla por no poder concebir su indeterminación. Llama la atención que Molina et al. (2018) reconocieron significados similares en este mismo grupo de estudiantes un año antes, lo que nos permite confirmar la persistencia de ciertas interpretaciones de las letras que atribuimos a su reducida experiencia en el uso de las mismas en situaciones matemáticas así como a la comprensión y manipulación de la indeterminación. La literatura reporta situaciones parecidas en primaria (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Cañadas et al., 2016) e incluso en secundaria (e.g., Küchemann, 1981; McGregor y Stacey, 1997). En nuestra investigación también identificamos interpretaciones análogas en sexto curso y en secundaria (estudio 2 y estudio 3), sin embargo, no hemos ahondado en estas por no formar parte del foco de investigación.

Concordamos con Warren et al. (2016) en el reconocimiento de una serie de dificultades algebraicas similares a las expuestas en la literatura. Las mismas se asocian a la identificación de regularidades, la dificultad para organizar y representar las estructuras asociadas a la regularidad, el uso adecuado y eficiente de representaciones y el cambio de una representación a otra. A su vez, la variedad de soluciones a las tareas en el estudio 2 y el estudio 3 evidencian una reducida uniformidad en la identificación de regularidades. Los resultados reflejan así una experiencia limitada de los alumnos con situaciones de generalización como las propuestas y el desafío que supone generalizar en primaria y los primeros cursos de secundaria.

Como rescatamos en el Capítulo 1 de este trabajo, otros estudios muestran que estudiantes más jóvenes son capaces de identificar variables y la relación entre estas, comprenden y usan la notación de variable en forma de letra como representación de cantidades indeterminadas o generalizan y representan relaciones funcionales diversas, cuando son instruidos y preparados en estos contenidos (e.g., Blanton y Kaput, 2004;

Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008; Stephens, Fonger et al., 2017; Warren y Cooper, 2005). Nuestros resultados en el marco del *early algebra* (estudio 1 y estudio 2), en ausencia de instrucción, también sugieren que estudiantes de diferentes edades son propensos al pensamiento funcional, sin embargo, requieren formación académica para su desarrollo. A partir de esto contribuimos al cuestionamiento del aplazamiento del álgebra hasta la escuela secundaria (Brizuela y Blanton, 2014). Reflexionamos en que más allá del desarrollo cognitivo de los estudiantes o la abstracción que supone el álgebra, lo que puede haber incidido en las dificultades que detectamos y los resultados que recabamos recae también en las experiencias formativas a las que los estudiantes han sido expuestos y una reducida oportunidad para trabajar con situaciones algebraicas significativas desde cursos previos (Blanton et al., 2011; Brizuela y Blanton, 2014; Stephens, Ellis et al., 2017; Zapatera Llinares, 2018). Según propone Mason et al. (2005), los estudiantes poseen el potencial para pensar algebraicamente y la capacidad para generalizar y expresar generalizaciones, sin embargo, requieren que sea explotado y desarrollado. En este sentido como implicaciones para la instrucción la investigación exhorta a profundizar, tanto en primaria como en secundaria, en un mejor y más amplio desarrollo de tareas y de espacios de generalización en contextos funcionales en los que los estudiantes se familiaricen con identificar variables, establecer relaciones entre las mismas, comprender y manipular cantidades indeterminadas, argumentar y validar conjeturas, emplear representaciones variadas y que también susciten el desarrollo y uso de diferentes recursos para expresar sus ideas y razonamientos.

Los resultados a su vez complementan otras investigaciones actuales. Por ejemplo, Radford (2001, 2010) plantea estratos de generalización algebraica en tareas que involucran patrones según el reconocimiento de lo común seguido por su representación progresivamente más general y considerando los sistemas semióticos (e.g., fórmulas, gestos, lenguaje hablado, dibujos) que utilizan los estudiantes para dar sentido. Blanton et al. (2015), por otro lado, dentro del contexto funcional del *early algebra* caracterizan niveles de sofisticación en el tratamiento de relaciones funcionales y su generalización, en un ambiente de instrucción.

El estudio de las representaciones de generalización constituye una contribución del trabajo en cuanto no se centra de forma exclusiva en la generalización o el mero empleo de representaciones externas. Resulta fundamental retomar que expresar la generalización es parte esencial del pensamiento algebraico (Kaput, 2008) y mejora con práctica y experiencia (Mason et al., 2005). Existe una variedad de representaciones, unas más convencionales que otras, pero igualmente válidas, que puede involucrar el estudiante en la expresión de relaciones funcionales generales (Mason et al., 2005). El uso de las mismas puede ser progresivo hasta llegar al empleo de representaciones cada vez más convencionales (e.g., simbolismo algebraico) (Kaput, 2008). En concordancia con lo anterior, los estudiantes involucrarán representaciones que les son familiares, y que a la vez les son prácticas de acuerdo con lo que se les plantea en las cuestiones. Esto justifica que unas representaciones de generalización fueron más comunes en un curso que en otro o en alguna cuestión concreta. Con base en lo expuesto, el trabajo aporta un contraste entre representar la generalización y simplemente representar. Las representaciones de generalización refieren a un uso particular de la representación. Las definimos como las formas en que la generalización de relaciones funcionales es evidenciada y expresada. Estas se concretan en la expresión implícita o explícita de la relación funcional involucrada que se reconoce entre las cantidades variables de la tarea, ya sea cuando toman un valor específico o indeterminado (e.g., refiriendo a valores específicos, por medio de ejemplos genéricos, a través de expresiones verbales que refieren a cantidades indeterminadas, usando simbolismo algebraico, o combinaciones de estas). A partir de esta diferenciación, es que las representaciones de generalización definidas no se correspondan necesariamente con un tipo de representación externa. Tal es el caso, por ejemplo, de la representación genérica, que lejos de ser una representación externa (aunque involucra representaciones numéricas o verbales), la entendemos como un modo de representación de la generalización.

Aquí definimos y sistematizamos un conjunto de categorías de representaciones de generalización que han sido operativas para caracterizar las manifestaciones de generalización de los estudiantes. Esta categorización constituye uno de los aportes de la investigación. Recordamos que para su definición inicial (estudio 1) partimos de los estratos de generalización algebraica de Radford (2001, 2010) y la diferenciación que hacen Mason y Pimm (1984) entre las concepciones de general, específico y genérico. Conforme avanzó el trabajo las categorías iniciales se ampliaron (estudio 2 y estudio 3).

Otra de las contribuciones de la investigación reside en los matices en las representaciones de generalización usadas por estudiantes de distintos cursos, tanto de primaria como de primeros cursos de secundaria. Como mostramos, las mismas cambian según el curso, siendo también unas más frecuentes que otras. La variedad de estudiantes y cursos nos permitió enriquecer los hallazgos de la investigación y a la vez contrastarlos dada su diferente formación escolar, capacidad algebraica y experiencias formativas recibidas. Desde los hallazgos de la investigación coincidimos en que conforme aumenta el curso, los estudiantes son más hábiles y flexibles en el uso de distintas representaciones previsiblemente por su desarrollo cognitivo y formación académica (e.g., Akkan, 2013; Blanton y Kaput, 2004; Radford, 2018).

6.1.2. Objetivo 2

Describir las estrategias que emplean estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria para resolver tareas funcionales de generalización

Este objetivo es considerado en el estudio 2 y el estudio 3, con estudiantes que finalizan primaria y también con estudiantes de primer y segundo curso de secundaria.

La investigación refleja que el uso de las estrategias que identificamos varía según el caso (específico o general) involucrado en las cuestiones que responden.

Las estrategias más ampliamente utilizadas en los casos específicos cercanos fueron el conteo en el caso de la primera tarea en todos los cursos (estudio 3) y la operatoria aditiva (que también implicó un uso previo del conteo) en el caso de la segunda tarea con los estudiantes de sexto curso (estudio 2). Lo que caracterizó la aplicación de ambas estrategias fue su relación con un componente visual. Es decir, las ilustraciones dadas o realizadas fueron la base para su aplicación, como destacan otros trabajos en los que el conteo se define sobre dibujos (e.g., Barbosa et al., 2012; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989). En general estas estrategias prácticamente no son utilizadas en los siguientes casos (100 y *n*), así que su uso puede haberse debido tanto a la introducción de representaciones visuales en la propia situación propuesta, la solicitud de realizar ilustraciones de la situación y a los valores pequeños de los casos. El uso de estas estrategias en casos específicos cercanos es consistente con los resultados reportados en otras investigaciones (e.g., Barbosa et al., 2012; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Merino et al., 2013; Zapatera Llinares, 2018).

En conexión con lo anterior, en general los estudiantes no recurrieron a más casos específicos cercanos que los propuestos. A pesar del carácter visual de la tarea, solo una cantidad reducida de estudiantes de secundaria realizó dibujos más allá de los casos específicos en los que se les solicitó. Las ilustraciones podrían haber constituido un apoyo para generalizar y resolver las cuestiones, como sugieren otros trabajos (e.g., Barbosa et al., 2012). No insinuamos que se esperara que realizaran una ilustración para casos que involucraran valores como el 100, sino que posiblemente les hubiera ayudado el hecho de experimentar con más casos de inferior magnitud. En los tres cursos el principal recurso que parecen haber usado los alumnos para responder y representar la generalización en los casos finales de la tarea fueron las expresiones numéricas utilizadas en los casos previos y los resultados numéricos obtenidos (con pocas excepciones en secundaria como se muestra en el estudio 3). Los hallazgos sugieren, por tanto, que los estudiantes se enfocaron más en lo numérico que en los elementos visuales de las tareas (Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012). Este hecho puede ser resultado del tipo de experiencias de aprendizaje que han vivido y llama la atención sobre la necesidad de promover el uso de otros recursos que pueden ser de utilidad al estudiante en la resolución de tareas.

A partir del caso 100 las estrategias utilizadas son más variadas. En el momento en que este caso no involucró un valor numérico pequeño ni consecutivo o cercano a los anteriores, las estrategias que utilizaron antes (conteo u operatorias) dejaron de ser prácticas y se vieron motivados a aplicar nuevos procedimientos. En este sentido el mismo diseño de la tarea fue fundamental para incitar a los estudiantes a buscar estrategias más eficientes para resolver las cuestiones y orientarlos hacia la generalización. En el estudio 2, en sexto curso, las estrategias utilizadas apenas variaron en las dos tareas propuestas, las más frecuentes son las mismas en los casos finales.

En el caso específico 100 y el caso general *n* la estrategia más frecuente fue la estrategia de correspondencia, siendo casi la única vinculada con las representaciones de generalización de los estudiantes. Esta estrategia se corresponde con la aproximación funcional informada por otros investigadores (e.g., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006; Ramírez et al., 2020; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Nosotros hemos delimitado esta estrategia por el nombre de *correspondencia* ya que nuestros participantes únicamente usaron relaciones funcionales de correspondencia (Smith, 2008). El cambio a la estrategia de correspondencia y su uso consistente en los dos últimos casos (100 y *n*) reveló que otras estrategias no eran prácticas. A su vez, confirmamos que el empleo de esta estrategia parece haber sido promovido por la propuesta de casos distantes y el salto desde casos específicos cercanos a casos que requerían otro procesamiento y el uso estrategias más eficaces y avanzadas para resolver y generalizar (El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006).

En el caso de la primera tarea, hubo una diferencia en la proporción de estudiantes por curso que aplicó la estrategia de correspondencia, como apunta el estudio 3. Mientras que en el caso 100 es mayor el porcentaje de alumnos que la usa en primaria que en secundaria (tanto en primer como en segundo curso donde los porcentajes son similares), ocurre lo opuesto en el caso *n*, donde la usan más los estudiantes de secundaria. Achacamos el resultado a que ante la demanda del caso 100, los estudiantes de secundaria diversificaron más las estrategias y un gran número de ellos no respondió o lo hizo directamente. Y aunque en el caso *n* asciende el número de estudiantes que en secundaria no responden, la mayoría de los estudiantes que en el caso 100 usaron la estrategia de correspondencia tendieron a usarla también en el caso *n*. En primaria, por otro lado, su uso disminuye en el último caso, incluso después de que representaran la generalización en el caso 100, lo que atribuimos a la presencia de la letra con la que no están habituados, como mencionamos en las conclusiones del apartado 6.1.1.

El razonamiento proporcional es la siguiente estrategia más utilizada en los casos finales, principalmente en el caso 100. Como en otros trabajos reconocemos su uso inapropiado (e.g., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Zapatera Llinares, 2018). Atribuimos su empleo a la sobregeneralización de conocimientos aprendidos (Stacey, 1989) o el deseo de usar una estrategia eficiente para resolver la tarea (Lannin et al., 2006). En este sentido la investigación invita a reflexionar sobre el conocimiento que los estudiantes tienen sobre estrategias para resolver problemas (particularmente relacionados con la generalización), el desarrollo de la conciencia crítica aplicada en cómo y cuándo son válidas o sobre la practicidad y utilidad de las mismas así como la necesidad de familiarización con situaciones de generalización.

En contraste con la literatura, a pesar de que la recursividad es un abordaje común para generalizar como se ha mostrado en trabajos con estudiantes de primaria y secundaria (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Cañadas et al., 2016; Carraher et al., 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989), prácticamente no es empleada por nuestros participantes. Asumimos que se debió al diseño de la tarea donde, a la luz de otras investigaciones (e.g., Carraher et al., 2008; Morales et al., 2018), se evitó la propuesta de casos consecutivos que promovieran esta aproximación.

La investigación contribuye al acervo de investigación sobre las estrategias que emplean estudiantes de primaria y de secundaria en tareas de generalización (e.g., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; Güner et al., 2013; Morales et al., 2018; Ramírez et al., 2020; Stacey, 1989; Zapatera-Llinares, 2018), especialmente en un contexto funcional. Los hallazgos exhiben una variedad de estrategias que utilizaron los alumnos (e.g., conteo, operatorias aditiva y multiplicativa, proporcionalidad, recursividad, progresión aritmética, correspondencia) y cómo su uso dependió de los casos involucrados (específicos o generales). La descripción de las estrategias que emplearon los estudiantes para responder las tareas funcionales de generalización es entonces uno de los aportes del trabajo.

Para finalizar, aportamos una agrupación de las estrategias según la conexión y coherencia que parecen haber evidenciado los estudiantes entre los casos y sus soluciones. Esto se relaciona con nuestro foco de investigación y se conecta a su vez con los objetivos de investigación 1 y 3. El primer grupo (conteo, estrategias operatorias, respuesta directa) comprendió procedimientos aplicados a casos específicos y aislados. En el segundo grupo (correspondencia, recursividad) los estudiantes razonaron tomando en consideración datos previamente obtenidos, extendiendo sus razonamientos a casos más generales. Por último, el tercer grupo (proporcionalidad, progresión aritmética) consistió en estrategias que principalmente involucraron una fórmula explícita (e.g., regla de tres, fórmula de la progresión aritmética) evidenciando consistir mayoritariamente en la aplicación de conocimientos aprendidos y que, en el caso de la tarea o lo resultados previos, no aplicaban del todo.

6.1.3. Objetivo 3

Identificar las estrategias que permiten a estudiantes de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria generalizar relaciones implícitas en tareas funcionales de generalización

El presente objetivo de investigación va de la mano con el Objetivo 1 y el Objetivo 2. De forma análoga al objetivo precedente, el tercer objetivo es abordado en el estudio 2 y el estudio 3.

Entre todas las estrategias que los estudiantes utilizaron para resolver las diferentes cuestiones de las tareas, prácticamente la única relacionada con la generalización fue la estrategia de correspondencia. Sólo se identificó una excepción: un estudiante de segundo curso de secundaria utilizó adecuadamente la fórmula de la progresión aritmética para representar simbólicamente la generalización de la regularidad que reconoció en la primera tarea. Aunado a lo mencionado en el apartado 6.1.2 respecto a la estrategia de correspondencia, los resultados muestran el alcance de la misma para generalizar y expresar (implícita o explícitamente) la generalización en contextos funcionales, complementando los hallazgos de otros estudios que destacan las estrategias de tipo funcional en tareas de generalización (e.g., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006; Ramírez et al., 2020; Zapatera Llinares, 2018). A la vez permiten evidenciar la versatilidad de los alumnos para cambiar de estrategia según cambian las exigencias de las cuestiones y los valores de los casos que se les proponen. En este tipo de tareas los hallazgos sugieren que esta es la estrategia que mejor se adapta al establecimiento de relaciones generalizadas entre los datos.

Asimismo, identificamos que los estudiantes de secundaria usaron más variedad de estructuras de relaciones funcionales que los estudiantes de primaria. Aunque algunas de estas estructuras no eran consistentes entre los propios resultados de los estudiantes o con las tareas, en general estas tendían a ser coherentes con una regularidad identificada por ellos. Llama la atención que en estudios previos desarrollados en el contexto funcional del *early algebra* con estudiantes de tercero y quinto curso de primaria, Pinto y Cañadas (2017, 2019) reconocen que los estudiantes menores utilizaron más estructuras, pero menos eficientes para generalizar en contraste con los de quinto curso. En comparación con nuestros resultados podemos intuir que conforme aumenta el curso, los estudiantes son más hábiles para usar y representar estructuras más útiles en términos de la generalización de la regularidad que siguen. En la investigación no obviamos el hecho de que en sexto curso participaron menos estudiantes pudiendo influir en la variedad de evidencias que obtenemos de ellos.

Al profundizar en el uso de esta estrategia, en el trabajo proponemos una diferenciación de dos tipos de relaciones de correspondencia según la regularidad que siguieron los estudiantes y su relación con la generalización. La más usada fue la estrategia de correspondencia según una regularidad completa. La misma se caracterizó por el uso consistente, a lo largo de la tarea, de una regularidad reconocida. Sin embargo, en ocasiones, las estructuras respectivas fueron escritas de forma incompleta entre un caso y otro (observable en coeficientes numéricos distintos u omitidos).

También distinguimos la estrategia de correspondencia según una regularidad parcial. En ese caso los estudiantes utilizaron, en general, estructuras que no se correspondieron del todo con la tarea o con las soluciones a todos los casos específicos. Ellos reconocieron una regularidad coherente con el análisis de la solución a un solo caso específico o a dos con atención en el incremento constante y aplicaron una relación funcional. Resultados que podrían englobarse en otras estrategias reportadas en la literatura fueron codificados como parte de esta subcategoría de la estrategia de correspondencia. Tal es el caso de las estrategias de "diferencia" o "múltiplo de la diferencia" (Akkan, 2013; Stacey, 1989) reconocidas en el uso de estructuras multiplicativas como *2n* o *3n*. Aunque podría pensarse que esta casuística consiste en la expresión de una recursividad a través del uso de la diferencia común, ellos no recurrieron al valor del caso precedente (de la variable dependiente) para obtener el valor del caso consecutivo siguiente o de otros. Usaron una relación entre las dos variables. Por otro lado, en contraste con investigaciones previas, esta segunda casuística definida puede relacionarse con la estrategia "estimar y probar" (Akkan, 2013), en cuanto a la predicción vaga de una regla sin un detenimiento en su validez y exactitud.

En conexión con lo anterior, valoramos que los cambios en las estructuras que observamos entre un caso y otro o el empleo de estructuras que no se correspondían con la tarea o entre soluciones (i.e. siguiendo regularidades parciales) pueden haberse debido a errores de cálculo o a un énfasis en responder a las cuestiones más que en precisar las soluciones. Otras de las posibles razones son una disminuida experiencia de los estudiantes con contextos funcionales de generalización y la propia dificultad de la tarea que implicó la modelación de una situación no familiar (Lepak et al., 2018). Complementariamente los estudios ponen en relieve que los estudiantes no verificaron sus generalizaciones como sobresale en otros trabajos, factor que se asocia con el hábito de la prueba (e.g., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989). Resaltamos así la importancia de analizar los procedimientos que son aplicados y las relaciones que se establecen entre los datos, estando esto vinculado a su vez con la verificación de conjeturas como parte del proceso de razonamiento inductivo para llegar a generalizar (Cañadas y Castro, 2007, Pólya, 1989). Aunque llama la atención la falta de verificación de las generalizaciones, esto también puede deberse a la falta de práctica y conocimiento de los estudiantes al respecto, quienes pueden asumir que para dar respuesta a una cuestión basta con determinar una posible solución.

En línea con lo expuesto en el párrafo anterior, la instrucción y mediación docente cobran importancia en la organización y guía de los razonamientos de los estudiantes, como revela el estudio 1 y según se profundiza en el siguiente apartado 6.1.4. Como reflexiona Stacey (1989), aunque el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas en sí mismo puede no ser relevante, la enseñanza de estas puede dotar de vocabulario para discutir sobre procesos matemáticos y contribuir a orientar y ordenar experiencias matemáticas. En correspondencia con los resultados, sólo una cantidad reducida de estudiantes logra representar la generalización y en los casos finales es elevado el número de alumnos que no responden. A partir de esto, las estrategias que utilizaron los estudiantes pueden informar sobre su formación, conocimientos y las dificultades que suponen emplear estrategias adecuadas para generalizar, complementando y reforzando los resultados de otras investigaciones (e.g., Barbosa et al., 2012; Moss y Beatty, 2006;

Stacey, 1989). A la vez, esta información puede ser un referente para la toma de decisiones en el proceso de instrucción de los estudiantes y para el diseño de tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico.

En relación con el objetivo precedente (apartado 6.1.2), queda patente que no todas las estrategias empleadas por los alumnos condujeron a la generalización. Concluimos así que el principal aporte de la investigación en el actual objetivo es la identificación de las estrategias por medio de las cuales generalizan estudiantes de último curso de primaria y de los primeros cursos de secundaria. En este sentido, la profundización en el uso de la estrategia de correspondencia y su matización es una contribución de la investigación.

6.1.4. Objetivo 4

Analizar cómo la mediación docente del entrevistador ayuda a estudiantes de primaria a generalizar y representar la generalización de la relación involucrada en una tarea funcional de generalización

El último objetivo que nos proponemos en la investigación es trabajado en el estudio 1 con estudiantes de cuarto curso que participan de una entrevista semiestructurada mientras resuelven una tarea funcional de generalización.

En la mayoría de las ocasiones en que un alumno manifestó alguna representación de generalización por primera vez, la entrevistadora realizó mediaciones. Los resultados permiten resaltar entonces las mediaciones que fueron de particular utilidad para generalizar (especialmente con relación a las representaciones de la generalización verbal, genérica, y simbólica).

Definimos seis tipos de mediación en términos de las acciones llevadas a cabo por la entrevistadora para contribuir y guiar el razonamiento matemático hacia la generalización y su respectiva representación: reafirmación, sugerencia de procesos, corrección, cambio de rumbo, repetición de información y aclaración.

Las mediaciones de sugerencia de procesos y cambio de rumbo fueron las principales mediaciones relacionadas con las representaciones verbal, genérica y simbólica de la generalización. Por medio de la sugerencia de procesos se incentivó a los estudiantes a explicar, justificar o confirmar los procedimientos que seguían o podían seguir para dar solución a las cuestiones. El cambio de rumbo les ofreció nuevas oportunidades para razonar de forma más efectiva y, a la vez, les ayudó a externar y enfocarse en el reconocimiento y representación de la relación funcional involucrada. La mediación de repetición de información también se relacionó con la representación simbólica de la generalización y consistió en repetir o replantear el significado de la letra y su rol en la situación planteada, lo que nos permite corroborar una vez más la falta de familiaridad de los estudiantes de primaria con las letras y su uso como representación de cantidades indeterminadas.

En comparación con la literatura identificamos que estas mediaciones comprendieron acciones docentes descritas por otros autores para contribuir al aprendizaje de la matemática (Anghileri, 2006), cuando los alumnos cometen errores (e.g, Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Santagata, 2005) o que particularmente contribuyeron a los estudiantes a generalizar y establecer relaciones funcionales (e.g., Cusi y Sabena, 2020; Warren, 2005, 2006), entre estas: retomar resultados previos, repetir las cuestiones, preguntas guía para evidenciar la relación entre variables, replanteamiento de preguntas, solicitud de explicaciones sobre los resultados, parafrasear y orientar mediante otras ideas o situaciones accesibles al estudiante.

Los resultados concluyen la importancia de la mediación por alentar a los alumnos a responder y afianzar sus constructos y razonamientos en relación con el reconocimiento y representación de relaciones funcionales, promoviendo también la transición entre diferentes representaciones de generalización. Como muestra el estudio 1, todos los estudiantes de cuarto curso pudieron representar la generalización, por otro lado, en el estudio 2 y estudio 3 con estudiantes mayores esto no ocurrió. Podríamos pensar que estos resultados se debieron en parte al acompañamiento y asistencia que tuvieron los estudiantes en el primer estudio. En este sentido, y como se aprecia también en otros trabajos (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, en prensa; Cusi y Sabena, 2020), los ambientes de interacción son ricos al favorecer el uso de distintos recursos para expresar la regularidad, en parte porque los estudiantes son motivados a construir argumentaciones y a ir más allá de sus razonamientos iniciales.

En correspondencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, el trabajo permite enriquecer, desde el enfoque funcional del álgebra escolar, la investigación que contempla implícitamente (e.g., Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Carraher et al., 2008) o explícitamente (e.g., Dekker y Elshout-Mohr, 2004; Mata-Pereira y da Ponte, 2017; Warren, 2005, 2006) intervenciones docentes en situaciones matemáticas o que específicamente involucran la generalización.

Nos parece pertinente reforzar y apoyar la conjetura de Warren (2006) que sugiere que tanto la propuesta de experiencias como la adecuada guía de los docentes asisten a los estudiantes en su formación algebraica. Consideramos que la información que aportamos puede tener implicaciones para la instrucción por indicar acciones que los docentes pueden efectuar para favorecer el pensamiento funcional de los estudiantes y espacios en los que participen de forma activa. A su vez, sugerimos que estas también pueden ser impulsadas entre los mismos estudiantes en un proceso de retroalimentación y monitoreo continuo entre ellos, como ocurre en otro tipo de acciones sugeridas en la literatura, por ejemplo, en las intervenciones de proceso de Dekker y Elshout-Mohr (2004).

La principal contribución de la investigación respecto a este objetivo consiste en la identificación y la propuesta de un conjunto de tipos de mediación, particularmente efectuadas por un entrevistador, que asistieron a los estudiantes en la resolución de una tarea funcional de generalización e intervinieron en la justificación, construcción y expresión de sus generalizaciones. Estas han sido operativas para caracterizar las principales acciones efectuadas por el entrevistador y a la vez sintetizan y comprenden aportes de variadas investigaciones desarrolladas en contextos distintos.

6.2. Limitaciones de los estudios

El trabajo de investigación desarrollado ha permitido responder a los objetivos de investigaciones que nos planteamos. Sin embargo, también implicó hacer frente a limitaciones de distinta naturaleza. Algunas de estas se describen en los párrafos que siguen.

Los estudiantes que forman parte del trabajo han sido seleccionados intencionalmente. Como suele ocurrir en investigaciones cualitativas, los resultados se ven condicionados por las características particulares de ellos y no puedan ser generalizables.

En conexión con lo anterior, los resultados del estudio 2 y estudio 3 provienen de estudiantes que voluntariamente resolvieron una prueba de acceso a un programa estímulo de talento matemático. Si bien es cierto que esto no suponía que ellos fueran matemáticamente talentosos, asumimos una actitud positiva y posibles habilidades matemáticas, implicando rasgos distintivos en los participantes.

A lo largo de la investigación, determinamos información relevante sobre el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria, sin embargo, consideramos que trabajamos con una cantidad de estudiantes reducida. Incluso en los dos estudios finales, aunque estamos satisfechos por trabajar con una población amplia, la cantidad de estudiantes de primaria es menor que la de los estudiantes de secundaria. Este hecho puede hacer que la cantidad de hallazgos entre los cursos sea menor en unos que en otros restringiendo también la posibilidad de hacer comparaciones o determinar matices en los resultados.

La gran cantidad de estudiantes que en las tareas del estudio 2 y estudio 3 no generalizan, no responden o lo hacen directamente, nos hace suponer que estas fueron complejas para los participantes, limitando los resultados que obtenemos.

La limitada capacidad de los estudiantes para usar el lenguaje verbal ha supuesto ser un condicionante en la obtención de evidencias sobre las estrategias que aplicaron y sus manifestaciones de generalización.

Una recolección de datos con diferentes instrumentos podría haber enriquecido aún más los hallazgos de la investigación. Al contrastar la información que recolectamos entre los diferentes estudios pudimos corroborar la riqueza de información que se puede obtener en un espacio de acompañamiento e interacción con los estudiantes. En este sentido, por ejemplo, habría sido de interés aplicar algunas entrevistas a los estudiantes que participan en el estudio 2 y el estudio 3 para complementar la información recibida.

6.3. Futuras líneas de investigación

El trabajo que realizamos también sugiere algunas líneas de investigación que quedan abiertas y que podrían ser abordadas a futuro.

En una futura investigación, a través de instrumentos que impliquen interacción con el estudiante (e.g., entrevistas, grupos focales), sería de especial interés profundizar en aspectos sobre las cuales no hemos tenido información. Algunas interrogantes que emergieron de la investigación son, por ejemplo, por qué los estudiantes cambian de estructura al avanzar en la resolución de la tarea o cómo corroboraron (si lo hicieron) los resultados que proponen y las relaciones que plantean entre los datos.

El primer estudio reveló que, aunque algunos estudiantes de cuarto curso no llegaron a escribir la representación simbólica de la relación funcional que generalizaron sí la comprendieron y explicaron cuando se les propuso. A partir de esto puede ser de interés contrastar las representaciones de generalización de estudiantes de primaria y secundaria antes y después de que se les propongan estructuras de relaciones funcionales, cómo las entienden y qué significados les atribuyen. Esto permitiría enriquecer la investigación desde otras perspectivas.

Un estudio final centrado en el análisis de las respuestas de los alumnos que fueron identificados como con talento matemático sería interesante para contrastar los resultados con el resto de los alumnos y brindar así otro enfoque de lectura de los hallazgos.

En la aplicación de cada estrategia se pueden encontrar más matices. De forma que los modos en que las estrategias son utilizadas puede constituir otra línea de trabajo.

Consideramos de interés ampliar el estudio de la mediación docente en contextos funcionales, ya que fue el área menos explorada en la investigación. Dado que hemos analizado la mediación llevada a cabo durante una entrevista, nos cuestionamos cómo las mediaciones identificadas se pueden transformar en acciones docentes en un contexto real de clase, qué otras pueden emerger y sus implicaciones en las generalizaciones de los estudiantes.

El componente visual de las tareas en los estudios finales no es muy explorado por los estudiantes cuando no se les induce a ello. Llama la atención desarrollar trabajos en los que se estudie la influencia de las representaciones que se involucran en las tareas de generalización (e.g., verbales, pictóricas, numéricas) y las representaciones de generalización que exhiben.

Finalmente, consideramos interesante ahondar en algunos elementos que llegamos a analizar en el desarrollo de los estudios, pero quedaron pendientes en esta memoria. Entre estos las representaciones de generalización y las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes de secundaria en la segunda tarea y las diversas interpretaciones que los estudiantes de primaria y secundaria dieron a la letra como representación de una cantidad indeterminada.

Referencias

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders's efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema*, *27*(47), 703-732.

American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American psychological association* (7ma ed.). Autor.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Apostol, T. M. (2006). *Calculus, I* (2da ed., Vol. 1). Reverté.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *Australian Curriculum. Mathematics: Sequence of content F-10*. https://www.australiancurriculum.edu.au

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (en prensa). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*, 1271-1291.

Barbosa, A., Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(3), 273-293.

Barrantes, H. (2001). *Introducción a la matemática*. EUNED.

Barrantes, R. (2007). *Investigación: Un camino al conocimiento, un enfoque cuantitativo y cualitativo*. EUNED.

Bastable, V. y Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.

Becker, J. R. y Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). PME.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for teaching and learning. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for teaching and learning* (pp. 3-14). Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines y A. B. Fugslestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología*, *14*, 37-57.

Cañadas, M. C., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking / Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 469-478.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*, 55-67.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Confrey, J. (2005). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Cambridge University Press.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Conference Committee.

Cusi, A. y Sabena, C. (2020). The role of the teacher in fostering students' evolution across different layers of generalization by means of argumentation. *RECME-RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 93-105.

Dekker, R. y Elshout-Mohr, M. (2004). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(1), 39-65.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Sense Publishers.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). The nature of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Patterns and formulas. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 89-100). Sense Publishers.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela francesa* (pp. 118-144). Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

El Mouhayar, R. y Jurdak, M. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 553-569.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(1), 31-43.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 289-296). University of Helsinki.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Grinnel, R. M. y Unrau, Y. A. (2018). *Social work research and evaluation: Foundations of evidence-based practice* (11va ed.). Oxford University Press.

Güner, P., Ersoy, E. y Temiz, U. (2013). 7th and 8th grade students' generalization strategies of patterns. *International Journal of Global Education*, *2*(4), 38-54.

Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2016). Generalization, covariation, functions, and calculus. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–38). Sense Publishers.

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función por estudiantes de sexto curso de primaria. *PNA*, *14*(3), 204-225.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education. Research issues in the learning and teaching of algebra.* (Vol.4, pp. 167-194). NCTM.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A estructural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education. Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.

Kilpatrick, J., Swaford, J. y Bradford, F. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102-119). John Murray.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Leiß, D. y Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM*, *37*(3), 240-245.

Lepak, J. R., Wernet, J. L. W. y Ayieco, R. A. (2018). Capturing and characterizing students' strategic algebraic reasoning through cognitevely demanding tasks with focus on representations. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 57-73.

Lloyd, G., Herbel-Eisenmann, B. y Star, J. S. (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in grades 6-8*. NCTM.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Ediciones Pirámide.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for teaching and learning* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Labor.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University y Paul Chapman Publishing.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. The Open University Press.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-287.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Mata-Pereira, J. y da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186.

McEldoon, K. L. y Rittle-Johnson, B. (2010). Assessing elementary students' functional thinking skills: The case of function tables. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Optimizing Student Understanding in Mathematics* (p. 202). Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

McGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014a). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria* (Vol. BOE N°52, pp. 1-58). Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014b). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Vol. BOE N°3, pp. 169-546). Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas*. MEP.

Ministry of Education Singapore. (2012). *Mathematics syllabus: Primary one to six. Singapur.* Curriculum Planning and Development Division.

Mitchelmore, M. C. (2002). The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge. En D. Edge y Y. B. Har (Eds.), *Mathematics education for a knowledge-based era. Proceedings of the Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education* and the Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education (Vol. 1, pp. 157-167). Association of Mathematics Educators.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: Indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Molina, M., Ambrose, R. y Del Rio, A. (2018). First encounter with variables by first and third grade spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 261–280). Springer.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez y I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*(4), 441-465.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

Ontario Ministry of Education and Training (2005). *The Ontario curriculum, grades 1-8: Mathematics, revised*. Ontario, CA: Queen's Printer.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de educación primaria en un contexto funcional del álgebra escolar* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pinto, E., Cañadas, M.C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández y A. Bercian (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417–426). SEIEM.

Pólya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas.

Ponte, J. P. da, Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-81.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalization in algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). PME.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 1-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Ramírez, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Ramírez, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, 23-30.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A. y Puig, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori.

Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, *21*(5), 491-508.

Shílov, G. E. (2004). ¿Qué es una función? *Sigma*, *25*, 137-147.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, E. (2011). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throught the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). NCTM.

Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *12*(1), 40-62.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.

Stephens, A. C., Fonger, N. L., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M. L., Knuth, E. y Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á.

Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). NCTM.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). PME.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, M. Krátka y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). PME.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Sense Publishers.

Wilhelmi, M. R. (2017). Didáctica del álgebra. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). SEIEM.

Yerushalmy, M. (2000). Problems solving strategies and mathematical resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 125-147.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(1), 87-114.

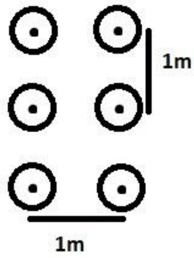
Anexos

Anexo 1

Tarea completa propuesta en el estudio 2 y el estudio 3

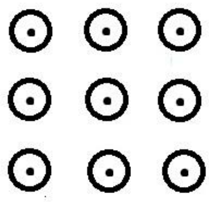
Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patatas en su terreno.

El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).



El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla.

1. Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



    a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices en el tercer día? Dibújalos en el campo anterior y calcula el área de cada uno de ellos.

    b) Llamamos orden de una semilla al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas? ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

2. El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día,

    a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices? Dibújalos en el campo del cuarto día y calcula el área de cada uno de ellos.

    b) ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas? ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

3. Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas

   a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices? ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

   b) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

4. Si han pasado “n” días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices? ¿Qué área tienen cada uno de esos cuadrados?

   b) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?