



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

**EMat** Escuela de  
Matemática

CADENA DE MARKOV CON POBLACIÓN ABIERTA  
APLICADA AL SEGURO OBLIGATORIO DE  
AUTOMÓVILES

por

Isaac Felipe Zúñiga Arias

TRABAJO FINAL DE GRADUACIÓN  
PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
LICENCIATURA EN CIENCIAS ACTUARIALES  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
NOVIEMBRE, 2023

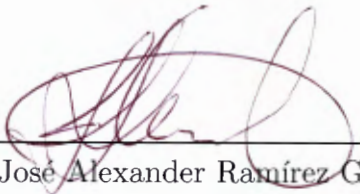
Trabajo Final de Graduación

**Cadena de Markov con Población Abierta Aplicada al Seguro  
Obligatorio de Automóviles**

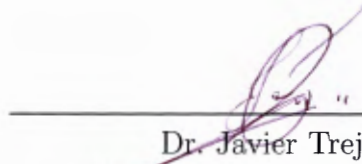
por

Isaac Felipe Zúñiga Arias

Universidad de Costa Rica



Dr. José Alexander Ramírez González  
Director del Trabajo Final de Graduación



Dr. Javier Trejos Zelaya  
Presidente del Tribunal Examinador



Dr. Juan José Víquez Rodríguez  
Miembro de tribunal



Licda. Ifigenia Fallas Pizarro  
Miembro de tribunal



Mag. Esteban Bermúdez Aguilar  
Miembro de tribunal



Bach. Isaac Zúñiga Arias  
Postulante

© ISAAC FELIPE ZÚÑIGA ARIAS

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS, 2023

El presente trabajo fue realizado bajo la modalidad de Tesis de Graduación, con el título “Cadena de Markov con Población Abierta aplicado al Seguro Obligatorio de Automóviles”, y es propiedad de su autor Isaac Felipe Zúñiga Arias. De conformidad con la Ley No. 6683 sobre Derechos de Autor y Derechos Conexos, las expresiones, sujetas a esta Ley contenidas en este documento no pueden ser reproducidas de manera total o parcial sin previo permiso del autor. La violación a esta normativa por parte de cualquier persona física o jurídica será denunciada para su respectiva sanción.



Dedicado a toda mi familia; cada momento, esfuerzo y amor incondicional. Por su apoyo e interés en mi y mi futuro. Esto es para ustedes.



# AGRADECIMIENTOS

Al director de la Tesis, José Alexander Ramírez, por su guía y recomendaciones durante todo este proceso.

A los lectores, Juan José Víquez y Esteban Bermúdez por sus importantes aportes y todo el tiempo invertido.

Al Instituto Nacional de Seguros, por otorgar los datos, entender una necesidad y subsanarla.





# RESUMEN

En el presente documento se propone la utilización de una Cadena de Markov con población abierta aplicado sobre el denominador de la tarifa de riesgo del Seguro Obligatorio Automotor. Dado que el seguro funciona como régimen de reparto, este distribuye los gastos futuros sobre los vehículos que pagarán el derecho de circulación. Esto resalta la necesidad de conocer hoy cuáles son los vehículos que pagarán en el futuro, lo que conlleva a no solo estudiar la dinámica estocástica de pago dentro del país, sino conocer el ingreso de vehículos nuevos o no inscritos que año con año adquieren el seguro. De aquí el hecho que el modelo propuesto sea de población abierta para considerar el ingreso sistemático de vehículos nuevos conforme a la demanda nacional. Para este fin se propone utilizar modelos autoregresivos y de media móvil con covariables que proyecten el flujo hacia adentro de vehículos considerando la influencia del mercado.

La dinámica estocástica de pago se encuentra intrínsecamente descrita por la cantidad de periodos atrasados que cada vehículo acumula, cuando un vehículo tiene, en el  $n$ -ésimo periodo de cobro, cero periodos de atraso acumulados, quiere decir que al final del periodo tal vehículo se encontró al día y por lo tanto pagó en el  $n$ -ésimo periodo. Si la cantidad de periodos acumulados es mayor a cero implica

que el vehículo no solo no pagó en el  $n$ -ésimo periodo sino que dependiendo de la magnitud de los periodos acumulados pudo no haber pagado en periodos anteriores.

Esta situación describe una cadena de Markov para la variable de periodos de atraso donde la transición es clara, si un vehículo paga su contador de periodos atrasado se reinicia y toma el valor cero. En caso contrario, el contador agrega un periodo más al acumulado anteriormente. Esto justifica las transiciones entre estados, donde cada estado es la cantidad de periodos atrasados acumulados en un periodo específico.

La metodología describe el ajuste de las probabilidades de transición, la manera en la cual se incorpora el ingreso de nuevos vehículos a la cadena y una evaluación predicativa sobre los modelos candidatos para proyectar estas nuevas poblaciones. Además, se implementa la simulación estocástica derivada del modelo y se calcula el CVaR como medida de riesgo. Lo anterior ha sido aplicado a datos reales proporcionados por el Instituto Nacional de Seguros. Finalmente, se analizan las limitaciones y recomendaciones sobre la utilización del modelo propuesto, así como describir futuras posibles publicaciones para variaciones en la implementación.

# ÍNDICE GENERAL

Acta de defensa	ii
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Índice de figuras	xiii
Índice de cuadros	xv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación . . . . .	3
1.2. Planteamiento . . . . .	5
1.3. Objetivos . . . . .	8
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Definición de la Cadena de Markov . . . . .	12
2.2. Distribución de $A_n$ y $V_j^n$ . . . . .	13
2.3. Esperanza de $V_j^n$ con Población Abierta . . . . .	16
2.4. Modelación de Vehículos Nuevos $Z_t$ . . . . .	17
2.5. Vehículos Puestos al Día . . . . .	24
2.6. Medidas de Riesgo . . . . .	25
<b>3. Metodología</b>	<b>29</b>
3.1. Estimación de la Cadena de Markov . . . . .	29
3.1.1. Población y Distribución Inicial . . . . .	30
3.1.2. Probabilidad de Transición . . . . .	30
3.2. Ajuste de la Probabilidad de Transición . . . . .	31

3.3.	Enfoque Learning/Testing para el Modelo SARIMAX . . . . .	35
3.3.1.	Tratamiento de Covariables . . . . .	40
3.4.	Simulación Estocástica . . . . .	41
<b>4.</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>45</b>
4.1.	Sobre el Conjunto de Datos . . . . .	45
4.2.	Aplicación de Modelo SARIMAX . . . . .	49
4.2.1.	Análisis Univariado . . . . .	49
4.2.2.	Análisis de Covariables . . . . .	55
4.2.3.	Conjunto de Modelos Candidatos . . . . .	56
4.2.4.	Enfoque Predictivo . . . . .	57
4.2.5.	Rendimiento del Modelo Seleccionado . . . . .	59
4.2.6.	Proyección Definitiva . . . . .	60
4.3.	Implementación de la Cadena de Markov . . . . .	62
4.3.1.	Enfoque Predictivo . . . . .	64
4.3.2.	Cantidad de Simulaciones . . . . .	69
4.3.3.	Periodo de Condonación 2022 . . . . .	72
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>75</b>
5.1.	Limitaciones . . . . .	76
<b>6.</b>	<b>Anexos</b>	<b>79</b>
6.1.	Resultados de Proyección . . . . .	80
<b>A.</b>	<b>Optimización por Enjambre de Partículas</b>	<b>83</b>
A.1.	Descripción del Problema . . . . .	84
A.2.	Descripción Formal . . . . .	87
A.3.	Pseudocódigo del Algoritmo . . . . .	88
A.4.	Convergencia y Estabilidad . . . . .	89
<b>B.</b>	<b>Medidas de Dependencia</b>	<b>93</b>
B.1.	Autocorrelación Cruzada . . . . .	97
B.2.	Autocorrelación Parcial . . . . .	98
B.3.	Estimador de Durbin-Watson . . . . .	101
<b>C.</b>	<b>Inferencia sobre la Cadena de Markov</b>	<b>105</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Diagrama de transiciones para estados de la Cadena de Markov . . . . .	7
4.1. Cantidad de vehículos pagados por periodo de cobro . . . . .	48
4.2. Descomposición de la serie de vehículos nuevos . . . . .	50
4.3. Serie de vehículos nuevos diferenciada . . . . .	51
4.4. Normalidad para los residuos de la serie de vehículos nuevos diferenciada una vez . . . . .	52
4.5. ACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada con $s = 12$ y $s = 6$ retrasos . . . . .	53
4.6. ACF y PACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada una vez . . . . .	53
4.7. ACF y PACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada cada 12 retrasos . . . . .	54
4.8. Función de autocorrelación cruzada para $\pi_t$ y $\kappa_t$ . . . . .	55
4.9. Comparativo sobre datos de control de modelos candidatos . . . . .	57
4.10. Comparativo de errores para el enfoque predictivo . . . . .	58
4.11. Comparativo de la proyección y observación del modelo idóneo . . . . .	60
4.12. Proyección de vehículos nuevos definitiva . . . . .	60
4.13. ACF de los residuos para el modelo definitivo . . . . .	61
4.14. Serie anual de vehículos nuevos proyectada . . . . .	61
4.15. Valor óptimo de la función objetivo con PSO. . . . .	63
4.16. Proyección de estados 0, 1, 2 sobre datos de reajuste con $\alpha$ óptimo . . . . .	64
4.17. Proyección sobre datos de control de los estados 0, 1 y 2 de la Cadena de Markov . . . . .	65
4.18. Proyección sobre datos de control de los estados 0, 1 y 2 de la Cadena de Markov . . . . .	67
4.19. Convergencia promedio esperanza SARIMAX . . . . .	70
4.20. Convergencia promedio esperanza de la cadena de Markov . . . . .	71
4.21. Convergencia del CVaR de la cola izquierda para el estado con cero periodos de atraso . . . . .	72

A.1. Dinámica para elementos vectoriales del PSO. . . . .	90
B.1. Ejemplo del ACF para un MA(2) . . . . .	97
B.2. Modelo AR(2) con $\phi_1 = 1,5$ y $\phi_2 = -0,75$ . . . . .	100
B.3. Esquema de umbrales Durbin-Watson . . . . .	103

# ÍNDICE DE CUADROS

4.1. Descripción de variables para la base de datos . . . . .	46
4.2. Estructuras paramétricas ARIMAX . . . . .	55
4.3. Modelos seleccionados con el mejor AIC . . . . .	56
4.4. Modelos seleccionados con el mejor AIC . . . . .	59
4.5. Errores predictivos del modelo idóneo . . . . .	59
4.6. Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el año 2023 . . .	68
6.1. Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el año 2024 . . .	80
6.2. Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el año 2025 . . .	81
B.1. Resumen para la interpretación del ACF y PACF . . . . .	101
C.1. Resultados de las pruebas de hipótesis $\chi^2$ de homogeneidad y pérdida de memoria . . . . .	108

# 1 — INTRODUCCIÓN

El Seguro Obligatorio para los Vehículos Automotores fue creado en el año 1973 y es regulado por la Ley No. 9078 del 26 de octubre del 2012. Desde su creación ha sido un seguro de cobertura limitada la cual se establece de acuerdo con lo normado en el artículo 61 de la Ley de Tránsito por vías Públicas Terrestres y Seguridad Vial, N° 9078 y el artículo 4 del Reglamento de Seguro Obligatorio para Vehículos Automotores. Cubre la lesión y la muerte de las personas, víctimas de un accidente de tránsito, exista o no responsabilidad subjetiva del conductor. Además, ampara la responsabilidad civil por lesiones a las personas como consecuencia de la posesión, uso o mantenimiento del vehículo.

El Seguro Obligatorio Automotor, de aquí en adelante SOA, se fundamenta en un esquema financiero de reparto anual, en donde los ingresos corrientes en primas que aportan los propietarios de vehículos durante el año deberán equilibrar las obligaciones contraídas en el mismo ejercicio (prestaciones en dinero, médico-sanitarias y de rehabilitación).

Actualmente, el proceso de tarifación del SOA consiste en el cálculo de una prima comercial específica para cada uno de los siete tipos que se encuentran en el parque vehicular, estos son los vehículos particulares, motocicletas y bicimotos,



vehículos de carga pesada, de carga liviana, taxis, buses y vehículos de equipo especial. El cálculo de la prima comercial parte de una prima de riesgo que se define intuitivamente como la cantidad de siniestros entre la cantidad de vehículos para un tipo de vehículo fijo. Esto garantiza una prima equitativa y diferenciada en donde los siniestros asignados a un tipo de vehículo se ven subsanados directamente por los pagos únicos de prima fija durante el año.

La tarifación actual y la mayoría de modelos basados estrictamente en series de tiempo pueden presentar una serie de limitaciones a la hora de ser puestos en producción. En la mayoría de casos los modelos tienden a no recrear la dinámica estocástica intrínseca del pago. Por otro lado, muchas de las consecuencias observadas en el pago se derivan de efectos proyectados sin interacción entre ellos mientras que la realidad dicta un origen común, lo que puede llevar a contradicciones entre modelos. Esto resta así confianza a los resultados finales. El modelo presentado en este trabajo logra capturar esas dependencias utilizando estados dentro de una cadena de Markov, lo que resulta ser una excelente estrategia para obtener varios resultados consistentes entre ellos.

Las cadenas de Markov se han utilizado en gran variedad de aplicaciones, por ejemplo, han sido utilizadas para calcular costos esperados de un determinado inventario,<sup>1</sup> para proyectar dinámicas complejas en análisis actuariales<sup>2</sup> de empresas con grandes planillas como se describe en [Viquez et al., 2018] o de orden demográfico como en [Morales Garay and Castro Esquivel, 2017] para regímenes de pensiones. Para capturar la dinámica intrínseca, en este trabajo se describirá

---

<sup>1</sup>En el capítulo 2 de [Kulkarni, 2011].

<sup>2</sup>La utilidad de las cadenas de Markov ha sido fundamental para la labor actuarial como se observa históricamente desde [Bowers, 1997].

el proceso real de pago para los vehículos que adquieren el derecho de circulación. Se analizarán los datos que recorren este proceso y conformarán la dinámica estocástica, para que eventualmente esta pueda ser modelada mediante una cadena de Markov con población abierta.

## 1.1. JUSTIFICACIÓN

Se podría describir el proceso de modelación de manera similar a la aplicación del método científico. En particular, en las ciencias actuariales resulta de vital importancia que el modelo se adapte fielmente a la realidad de manera natural. Simultáneamente, el producto final de un modelo tiene como objetivo servir como insumo para la toma de decisiones. Este es el fundamento de la labor actuarial donde, en síntesis, los tomadores de decisiones no solo utilizan los datos históricos para ejecutar su trabajo, sino también su valor esperado y conjunto de posibilidades para el futuro.

Al mencionar conjunto de posibilidades, se considera importante recalcar que, dependiendo de la complejidad de las dinámicas, en muchas ocasiones no basta con obtener solo el valor esperado, pues es necesario estudiar los casos extremos del conjunto, en otras palabras, las colas de su distribución futura. Adicionalmente, la razón por la cual obtener una distribución resulta eficaz radica en el valor específico de la esperanza del modelo, no solo cuando se observan varianzas altas sino en el hecho de que la esperanza no tiene por qué ser una posibilidad en el espacio de eventos.

En razón de lo anterior, se requiere diseñar un modelo que se adapte fielmente

a la realidad, que logre obtener productos fiables para la toma de decisiones y que simultáneamente caracterice la distribución de la dinámica. Basándonos en estos criterios se observará que el modelo propuesto logra con éxito brindar una distribución de la dinámica estocástica.

Adicionalmente, no se debe menospreciar las consecuencias de las decisiones que influyen los resultados de las proyecciones. Para este caso en particular, dado que las proyecciones resultan ser el denominador de la prima de riesgo para el SOA, su valor influye inversamente el precio del seguro. Si bien este seguro no forma parte del paquete tributario como tal, se paga al mismo tiempo que el marchamo, lo cual afecta el desembolso de los ciudadanos que deseen hacer uso del derecho de circulación. De esta manera se afecta a cualquier persona descrita en el ámbito del seguro, entre ellas:

- todas las personas físicas y jurídicas, públicas o privadas, en su condición de propietarias de vehículos automotores que circulen dentro del territorio nacional,
- las personas físicas o jurídicas que se dediquen o tengan para la venta vehículos automotores, nuevos o usados, o ensamblados en la etapa de bien final,
- los propietarios o conductores de vehículos de matrícula extranjera que ingresen provisionalmente al país o los vehículos que sean propiedad de cualquier residente temporal y
- las personas físicas o jurídicas que tengan para la exhibición vehículos automotores destinados a circular dentro del territorio nacional.

## 1.2. PLANTEAMIENTO

La obligatoriedad del seguro radica, en parte, en que cualquier vehículo recién ingresado al país debe estar cubierto. Por lo tanto, es de interés para la administración del seguro cuantificar cuántos vehículos ingresan cada año. Dado que el SOA es de vigencia anual, cualquier vehículo que entre al país por actividades turísticas, o para la venta, deben ser cubiertos por el periodo restante de la vigencia. Las vigencias entre periodos consecutivos comparten el mes de noviembre, esto quiere decir que cada vigencia inicia en noviembre del año anterior y termina en el noviembre del año correspondiente.

Al ingresar al país, el vehículo debe inscribirse en el Registro Nacional<sup>3</sup> entonces en cada periodo únicamente tiene dos opciones, pagar el seguro y el paquete fiscal asociado o no pagar. Se deben tomar en cuenta dos características importantes del sistema: tanto para el Registro Nacional como para el Instituto Nacional de Seguros<sup>4</sup> se mantiene el registro hasta el momento de la desinscripción manual. Esto supone que en caso de que un vehículo tenga daños irreparables o sea abandonado y su registro no sea actualizado mediante orden del propietario, el vehículo seguirá existiendo indefinidamente en las bases de datos y continuará siendo objeto de pago para el permiso de circulación. En otras palabras, acumu-

---

<sup>3</sup>Cada vehículo que ingresa no solo tiene como obligación pagar el SOA, simultáneamente se inscribe en el Registro Nacional Costarricense de acuerdo a la legislación vigente.

<sup>4</sup>El Instituto Nacional de Seguro o INS es una institución pública del gobierno de Costa Rica cuya competencia consiste en brindar el servicio de aseguramiento para todo el país. Aproximadamente; por 84 años el INS tuvo a su cargo el monopolio de la actividad aseguradora, misión que se le encomendó mediante la Ley N<sup>o</sup> 12 del 30 de octubre de 1924. En el año 2008 se emitió la Ley N<sup>o</sup> 8653, denominada Ley Reguladora del Mercado de Seguros. Esta norma establece la apertura a la competencia, es decir, termina con el monopolio estatal del INS y propicia la entrada en el mercado de empresas privadas.

lará periodos de atraso indefinidamente. Es por esto que una de las hipótesis del modelo es que no existirán salidas del sistema, lo que calza directamente con el poco movimiento observado a desinscribir vehículos olvidados.

La dinámica de “pago” o “no pago” resulta ser una decisión con probabilidades estimables, no obstante, cuantos más periodos atrasados tenga un vehículo es natural pensar que tendrá menos posibilidad de pagar debido a que se acumula el paquete fiscal adeudado. El SOA acumula su prima como deuda para cualquier vehículo hasta llegar a los tres periodos de atraso y para los periodos siguientes se acumulan únicamente los últimos tres periodos atrasados y el periodo actual. Es importante recalcar que el pago del SOA no puede ser parcial. Se debe tomar en cuenta que esta dinámica de pago no es muy diferente a la demanda del seguro que apela directamente a cuántos vehículos adquieren su cobertura en el futuro. Las Cadenas de Markov no son herramientas aisladas en este ámbito como se observa en [Bozzetto et al., 2005] donde estas fueron utilizadas para modelar la demanda futura de productos en el mercado asegurador.

En caso de querer poner al día un vehículo se deben pagar todos los periodos adeudados o en su defecto no se realizará ningún pago. Dadas las características discutidas anteriormente, se puede caracterizar cada periodo de atraso acumulado como un estado en donde la cantidad de periodos atrasados se reinician a cero si el vehículo se pone al día con el cobro o acumula uno si no paga. Tal dinámica se ejemplifica en la figura 1.1. Aquí siempre existirá un estado para una alta cantidad de periodos de atraso aún cuando nunca se haya observado en la historia un vehículo con tales periodos acumulados.

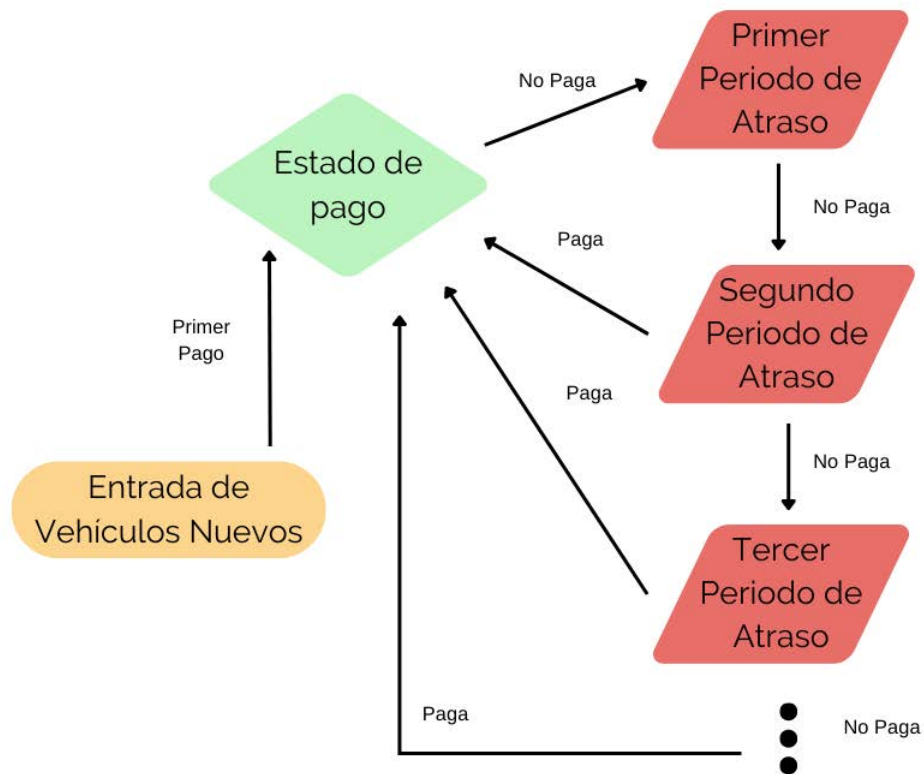


Figura 1.1: Diagrama de transiciones para estados de la Cadena de Markov.

El diagrama de la figura representa las posibles transiciones entre estados. Note que en cada periodo se genera una entrada de vehículos nuevos los cuales caracterizan vehículos recién ingresados al país o vehículos que no han sido inscritos en periodos anteriores. A partir de ahí cada estado tiene la posibilidad de pagar o no en cada periodo, lo que reinicia el conteo de periodos atrasados o agrega uno para el siguiente periodo. De este modo, logramos asociar la dinámica del pago o no pago de cada periodo de atraso como una cadena de Markov discreta

y con infinitos estados donde cada uno resulta tener solo dos posibles transiciones a partir de él. No obstante, como adicionalmente es necesario ingresar cada periodo de vehículos nuevos con el fin de mimetizar el ingreso real observado, es necesario generar nueva población. Así es como podemos concluir que un modelo intuitivamente ideal para la dinámica estocástica de los vehículos que pagan o no el marchamo es una cadena de Markov con población abierta.

Esta no resulta ser una práctica aislada para la labor actuarial. El ejemplo más identificable podría corresponder a los análisis poblacionales para los regímenes de pensiones. Tanto en el ámbito del SOA como para los regímenes de pensiones, los resultados podrían haber estado subestimando la cantidad de ingresos o su varianza, fenómeno que se identifica al cambiar de una población cerrada a una abierta.

### 1.3. OBJETIVOS

#### **Objetivo General:**

Desarrollar un modelo para el Seguro Obligatorio Automotor implementando una cadena de Markov con población abierta.

#### **Objetivos Específicos:**

1. Generar un modelo de cadenas de Markov que, por medio de simulación, logre calcular medidas de riesgo.

2. Implementar estrategias de ajuste consistentes con la realidad de la dinámica estocástica de pago.
3. Ingresar nuevas poblaciones de vehículos por medio de la aplicación de modelos de series de tiempo.





## 2 — MARCO TEÓRICO

En esta sección se exploran las propiedades básicas del modelo estocástico<sup>1</sup> de cadena de Markov para la proyección de la distribución de los vehículos de acuerdo con las posibles transiciones que describen la acción que cada vehículo puede realizar dentro de un periodo de cobro.

Cantidad de periodos atrasados: Esta característica define los estados de la cadena. Es un contador de la cantidad de periodos en los cuales no se ha ejecutado el pago correspondiente del periodo. Actualmente, no se cuentan los periodos de atraso después de los tres periodos para el pago. Esto quiere decir que, cuando se ejecuta un pago de periodo atrasado como máximo, solo se pagan los últimos tres periodos. No obstante, la variable mantendrá el conteo observado dado que a pesar de que periodos mayores no son de pago efectivo, es información necesaria para el análisis de la dinámica.

Cabe mencionar que no existe realmente un periodo límite. En muchas ocasiones se llega a observar hasta treinta periodos de atraso para los cuales en muy escasos escenarios se llega a percibir un pago. Entonces, el modelo se sustenta en

---

<sup>1</sup>Más información sobre procesos estocásticos se puede encontrar en [Itô, 1984]

una variable aleatoria discreta en el espacio de estados<sup>2</sup>  $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ .

## 2.1. DEFINICIÓN DE LA CADENA DE MARKOV

Defina una variable aleatoria  $A_n : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ , siendo la cantidad de periodos atrasados que un vehículo ha tenido en el  $n$ -ésimo periodo. Adicionalmente, se denota por  $V_j^n$  al número de vehículos que en el periodo de cobro  $n$  poseen las características del estado  $j \in \mathcal{E}$ . Se asume que se cumple la propiedad de Markov, es decir,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;

$$\mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = i, A_{n-2}, \dots, A_0] = \mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = i]$$

Adicionalmente, se asume que la cadena es homogénea, entonces;

$$\mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = i] = \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = i].$$

para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Ahora, note que la probabilidad de transición de un estado a otro está delimitada por la posibilidad de que el vehículo esté o no al día. Si en el  $n$ -ésimo periodo se tiene que  $A_{n-1} = i$ , solo existen dos transiciones posibles: si no paga entonces  $A_n = i + 1$  y si paga entonces  $A_n = 0$ . Por lo tanto, si  $\mathbb{B} = \{0, i + 1\}$ ,

---

<sup>2</sup>En este caso, para evitar confusiones se aclara que  $\{0\} \subset \mathbb{N}$ .

entonces  $\{A_{n-1} = i\} \cap \{A_n \notin \mathbb{B}\} = \emptyset$ . Así tenemos que:

$$\mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = i] = 0 \quad \text{si } j \notin \mathbb{B} \text{ y} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P}[A_n = 0 | A_{n-1} = i] = 1 - \mathbf{P}[A_n = i + 1 | A_{n-1} = i], \quad (2.2)$$

para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Por último, de acuerdo con la descripción realizada en la sección 1.2. El sistema no tiende a eliminar fácilmente vehículos, los vehículos tienen un margen amplio de uso dentro de los periodos de aplicabilidad y proyección del modelo por lo que se asume que no existen salidas del sistema. Por lo tanto, cuando un vehículo se encuentre en un estado futuro que durante el periodo histórico nunca fue observado, entonces se asume que no paga. Esto sería si  $\mathbb{D}$  es el conjunto de estados observados en el histórico y  $d > a$ ,  $\forall a \in \mathbb{D}$ , entonces

$$\mathbf{P}[A_n = 0 | A_{n-1} = d - 1] = 0$$

para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

## 2.2. DISTRIBUCIÓN DE $A_n$ Y $V_j^n$

Ahora que se establecieron las posibles transiciones entre los estados resulta más sencillo obtener la distribución de la variable  $A_n$  para eventualmente calcular la esperanza de  $V_j^n$ . Se define la distribución inicial  $\rho_i$  como la probabilidad de encontrarse en el momento cero en el estado  $i$ , esto es  $\rho_i = \mathbf{P}[A_0 = i]$ .

**Lema 2.1.** *La probabilidad de que un vehículo, después de un periodo de pago, se encuentre en el estado  $j$ , es decir, que al año siguiente un vehículo tenga  $j$  periodos atrasados, pagando o no, vendría dado por,*

$$\mathbf{P}[A_1 = j] = \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{E}} \rho_i \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = i] & \text{si } j = 0, \\ \rho_{j-1} \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = j - 1] & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

*Demostración.* Como  $\bigcup_{i \in \mathcal{E}} \{A_0 = i\} = \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A_1 = j] &= \mathbf{P} \left[ \{A_1 = j\} \cap \bigcup_{i \in \mathcal{E}} \{A_0 = i\} \right] \\ &= \mathbf{P} \left[ \bigcup_{i \in \mathcal{E}} \{A_1 = j\} \cap \{A_0 = i\} \right] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbf{P} \left[ \{A_1 = j\} \cap \{A_0 = i\} \right] \\ &= \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbf{P}[A_1 = j, A_0 = i] & \text{si } j = 0, \\ \mathbf{P}[A_1 = j, A_0 = j - 1] & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad \text{utilizando lo discutido en (2.1).} \\ &= \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{E}} \rho_i \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = i] & \text{si } j = 0, \\ \rho_{j-1} \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = j - 1] & \text{si } j > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.** *La probabilidad de que un vehículo se encuentre en el estado  $i_n$  en el periodo de cobro  $n$ , es decir, que en  $n$  periodos un vehículo tenga  $i_n$  periodos de*

atraso, pagando o no, vendría dado por,

$$\mathbf{P}[A_n = i_n] = \sum_{i_0 \in \mathcal{E}} \cdots \sum_{i_{n-1} \in \mathcal{E}} \prod_{k=1}^n \mathbf{P}[A_k = i_k | A_{k-1} = i_{k-1}] \cdot \rho_{i_0}.$$

*Demostración.* Se probará por inducción: El caso  $n = 1$  es el Lema 2.1. Se asume que se cumple para  $n - 1$  y se probará para  $n$ . Repitiendo los pasos de la prueba del Lema 2.1, pero tomando  $n$  en lugar de 1 y  $n - 1$  en lugar de 0, se obtiene:

$$\mathbf{P}[A_n = i_n] = \sum_{i_{n-1} \in \mathcal{A}} \mathbf{P}[A_n = i_n | A_{n-1} = i_{n-1}] \cdot \mathbf{P}[A_{n-1} = i_{n-1}]. \quad (2.4)$$

Por hipótesis de inducción,

$$\mathbf{P}[A_{n-1} = i_{n-1}] = \sum_{i_0 \in \mathcal{E}} \cdots \sum_{i_{n-2} \in \mathcal{E}} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}[A_k = i_k | A_{k-1} = i_{k-1}] \cdot \rho_{i_0}. \quad (2.5)$$

Si se sustituye la fórmula anterior 2.5 en 2.4, se concluye que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A_n = i_n] &= \sum_{i_{n-1} \in \mathcal{E}} \mathbf{P}[A_n = i_n | A_{n-1} = i_{n-1}] \cdot \sum_{i_0 \in \mathcal{E}} \cdots \sum_{i_{n-2} \in \mathcal{E}} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}[A_k = i_k | A_{k-1} = i_{k-1}] \cdot \rho_{i_0} \\ &= \sum_{i_0 \in \mathcal{E}} \cdots \sum_{i_{n-1} \in \mathcal{E}} \prod_{k=1}^n \mathbf{P}[A_k = i_k | A_{k-1} = i_{k-1}] \cdot \rho_{i_0}. \end{aligned}$$

□

Si bien hasta este punto ya se ha definido la probabilidad de transición y se ha determinado la distribución de  $A_n$ , la cantidad de interés es en realidad la variable aleatoria  $V_j^n$  de manera que sea posible identificar en específico su valor esperado. Tome en cuenta que de una población inicial de vehículos  $V^0$ , la cantidad esperada

de vehículos en el estado  $j$  para el  $n$ -ésimo periodo;  $\mathbb{E}[V_j^n]$  sería,

$$\mathbb{E}[V_j^n] = V^0 \cdot \mathbf{P}[A_n = j]. \quad (2.6)$$

### 2.3. ESPERANZA DE $V_j^n$ CON POBLACIÓN ABIERTA

Anteriormente, se identificó el valor esperado de la cantidad de vehículos con  $j$  periodos de atraso;  $V_j^n$ , a partir de una población inicial dada, todavía el modelo no es capaz de identificar nuevos ingresos de vehículos para cada periodo. La población sigue siendo cerrada, en específico cada año en total la población mantendrá un valor  $V^0$  que será únicamente redistribuida entre los diferentes estados conforme avanzan los periodos de cobro. No obstante, estamos interesados en la cantidad donde el estado  $A_n = 0$  agregará en cada periodo de cobro los vehículos que pagan por primera vez, y cómo es que esta cantidad adicional afectará el resto de estados conforme se materializan transiciones para periodos futuros.

Es importante recalcar que del mismo modo como se describe en la figura 1.1, el ingreso de vehículos nuevos se agrega exclusivamente en el estado de pago, esto es  $A_n = 0$  para el  $n$ -ésimo periodo. Ahora si llamamos  $\overline{V}_j^n$  la variable aleatoria de vehículos con  $j$  periodos de atraso con población abierta, donde  $S_n$  es la cantidad de vehículos nuevos que entran en el  $n$ -ésimo periodo, tenemos la siguiente esperanza.

De una población inicial de vehículos  $V^0$ , la cantidad esperada de vehículos  $\mathbb{E}[\overline{V}_j^n]$ , con población abierta para el  $n$ -ésimo periodo sería;

- cuando  $n = 1$ :

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}_j^1\right] = \begin{cases} V^0 \cdot \sum_{i \in \mathcal{E}} \rho_i \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = i] + \mathbb{E}[S_1] & \text{si, } j = 0 \\ V^0 \cdot \rho_{j-1} \cdot \mathbf{P}[A_1 = j | A_0 = j - 1] & \text{si, } j > 0 \end{cases}$$

- cuando  $n > 1$ :

$$\mathbb{E}\left[\overline{V}_j^n\right] = \begin{cases} \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbb{E}\left[\overline{V}_i^{n-1}\right] \cdot \mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = i] + \mathbb{E}[S_n] & \text{si, } j = 0 \\ \mathbb{E}\left[\overline{V}_{j-1}^{n-1}\right] \cdot \mathbf{P}[A_n = j | A_{n-1} = j - 1] & \text{si, } j > 0 \end{cases}$$

## 2.4. MODELACIÓN DE VEHÍCULOS NUEVOS $Z_t$

Actualmente, existen muchas herramientas derivadas del análisis de datos. En el ámbito de “machine learning” la batería de modelos es amplia con diferentes herramientas para la exploración o proyección, algunos ejemplos son: el ACP, la máquina de soporte vectorial o el “deep learning” con sus redes neuronales. No obstante, son las técnicas de series de tiempo, como los modelos autoregresivos integrados de media móvil o (ARIMA), los cuales se utilizan ampliamente para la proyección de datos indexados por el tiempo y son la estrategia principal utilizada en este proyecto.



Estos modelos se basan en el concepto de autocorrelación y linealidad, donde es la serie retrasada la cual influye en el futuro de sí misma. Las siguientes definiciones se extraen de [Shumway and Stoffer, 2000]. Para comprender los modelos ARIMA es importante establecer qué es un retraso como tal.

**Definición 2.3.** El operador de retraso  $B$  corresponde al operador que reduce en uno el índice temporal de una serie de tiempo  $x_t$ . Esto es:

$$Bx_t = x_{t-1}. \quad (2.7)$$

Se extiende la aplicación por potenciación, entonces:

$$B^i x_t = x_{t-i} \quad (2.8)$$

Dada esta nomenclatura, es fácil definir el operador diferencia.

**Definición 2.4.** El operador diferencia  $\nabla$ , corresponde al operador que genera la diferencia entre la serie con su retraso, esto sería:

$$\nabla x_t = (1 - B)x_t \quad (2.9)$$

Del mismo modo se extiende la aplicación por potenciación, en donde:

**Definición 2.5.** Las diferencias de orden  $d$  se definen como

$$\nabla^d x_t = (1 - B)^d x_t \quad (2.10)$$

La aplicación del operador tiende a resultar complicada. Por ejemplo, el caso donde  $d = 2$  sería  $\nabla^2 x_t = \nabla(1-B)x_t = \nabla(x_t - x_{t-1}) = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = x_t - 2 \cdot x_{t-1} + x_{t-2}$ . Ahora que definimos los operadores iniciales, resulta bastante sencillo definir los modelos que son base para introducir el ARIMA.

**Definición 2.6.** Un modelo autoregresivo de orden  $p$ , abreviado  $\text{AR}(p)$ , es de la forma

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t$$

donde,  $x_t$  es estacionaria<sup>3</sup>,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  son constantes ( $\phi_p \neq 0$ ). Se asume que  $w_t$  es un ruido blanco *Gaussiano*<sup>4</sup> con media cero y varianza  $\sigma_w^2$ .

Utilizando el operador de retraso podemos definir el modelo  $\text{AR}(p)$  como la aplicación de un operador específico.

**Definición 2.7.** Dadas las constantes  $\phi_1, \dots, \phi_p$  se define el operador autoregresivo como

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (2.11)$$

Note como el modelo  $\text{AR}(p)$  se puede escribir como una aplicación del operador autoregresivo, donde  $\phi(B)x_t = w_t$ .

Por otro lado, el modelo de media móvil es una alternativa como modelo autoregresivo que utiliza combinaciones lineales para formar la data observada.

---

<sup>3</sup>Aquí se hace referencia a la definición de estacionariedad descrita en [Shumway and Stoffer, 2000].

<sup>4</sup>Un ruido blanco Gaussiano corresponde a una serie de tiempo  $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ , donde cada variable aleatoria  $w_t$  es independiente e idénticamente distribuida.

En este caso se asume que la serie es una combinación lineal de variables  $w_t$ , normales e independientes.

**Definición 2.8.** Un modelo de media móvil de orden  $q$  o  $MA(q)$  se define como

$$x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

con  $q$  retrasos en la media móvil y  $\theta_1, \dots, \theta_q$  son parámetros, ( $\theta_q \neq 0$ ).

Del mismo modo que en  $AR(p)$ , es fácil observar el modelo  $MA(q)$  como la aplicación de un operador específico.

**Definición 2.9.** Dadas las constantes  $\theta_1, \dots, \theta_q$ , el operador de media móvil es:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q \quad (2.12)$$

Si bien ambos modelos pueden ser útiles para situaciones distintas, es ideal integrar ambas posibilidades simultáneamente, lo que da origen al modelo  $ARMA$ .

**Definición 2.10.** Una serie  $x_t$  se dice ser  $ARMA(p,q)$  si es estacionaria y de la forma

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}. \quad (2.13)$$

Con  $\phi_p \neq 0$ ,  $\theta_q \neq 0$  y  $\sigma_w^2 > 0$ . Aquí se le denomina a los parámetros  $p$  y  $q$ ; el orden autoregresivo y el orden de media móvil, respectivamente y  $w_t$  es un ruido blanco gaussiano.

Es sencillo notar que una definición alternativa utiliza los operadores es  $\phi(B)x_t = \theta(B)w_t$ . El modelo ARIMA nace de la aplicación del operador diferencia en combinación con el modelo ARMA, en donde una diferencia de orden  $d$  se aplica.

**Definición 2.11.** Dado un entero positivo  $d$ , un proceso  $x_t$  se dice ser un modelo ARIMA( $p, q, d$ ) si  $\nabla^d x_t$  es un modelo ARMA( $p, q$ ). Esto es:

$$\phi(B)(1 - B)^d x_t = \theta(B)w_t \quad (2.14)$$

Es común para algunas series del ámbito económico tener una fuerte correlación temporal periódica. Para poder captar este punto es posible ampliar el enfoque lineal del modelo ARIMA.

**Definición 2.12.** Los operadores

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{s \cdot 2} - \dots - \Phi_p B^{s \cdot P} \quad (2.15)$$

y

$$\Theta_Q(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{s \cdot 2} + \dots + \Theta_p B^{s \cdot Q} \quad (2.16)$$

son los operadores temporales autoregresivo y de media móvil, de orden  $P$  y  $Q$  respectivamente, con periodo  $s$ .

Ampliar la definición de los operadores para un periodo  $s$ , adiciona un componente temporal al modelo ARIMA, a este modelo se le denomina SARIMA por sus siglas en inglés, definido por [Box and Jenkins, 1976].

**Definición 2.13.** El modelo temporal autoregresivo con media móvil integrado

o SARIMA es

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d x_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)w_t \quad (2.17)$$

donde  $w_t$  es un ruido blanco gaussiano. El modelo se denomina  $\text{ARIMA}(p,q,d) \times (P,Q,D)_s$ . Tome en cuenta que  $\nabla^d = (1 - B)^d$  y  $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ .

Si bien hasta este punto ya se definieron los modelos estándar de series de tiempo, es importante destacar que dependiendo del problema inicial y la naturaleza de la serie a trabajar, podría existir influencia de covariables. Con esto nos referimos a que no solamente la autocorrelación puede influenciar el futuro de una serie de tiempo, sino también variables independientes exógenas. En las últimas décadas la incorporación de covariables ha sido una práctica común.

En particular se utilizará en este trabajo, dado que la serie a trabajar, la cantidad de vehículos nuevos  $Z_t$ , claramente es dependiente de condiciones económicas. Aquí es válida la discusión sobre los modelos ARIMA vectoriales. El modelo VARMA implica una dependencia entre un conjunto de series, por lo tanto, si se tomara en cuenta un modelo de estas cualidades, se asumiría que la cantidad de vehículos nuevos influye en el futuro de variables macroeconómicas. Esto no parece ser un acercamiento lógico en el contexto costarricense. La posibilidad restante sería aplicar una unión entre la relación variable independiente y dependiente con elementos autoregresivos, esto es: adicionar a un modelo SARIMA la influencia de variables exógenas. Si bien no se definieron los modelos VARMA en este documento, se puede consultar en [Box and Jenkins, 1976].

Lo anterior conlleva a tener que predecir las variables independientes. Por ejemplo, en una regresión lineal estándar el tiempo funciona como una variable

independiente. En este caso se conoce el valor del tiempo como covariable dado que los valores que toma son conocidos a pesar de suceder en el futuro. Esto no sucede para variables como la inflación o el tipo de cambio, donde en momentos futuros no se conoce su valor. Por lo tanto, se deberá proyectar las variables exógenas independientes para luego ser evaluadas en el modelo y así obtener una proyección de la serie  $Z_t$ . Así que se continua con la tarea de definir un modelo que englobe tales condiciones.

**Definición 2.14.** Un modelo SARIMAX corresponde a una serie  $x_t$  tal que:

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d x_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)w_t + \sum_{i=1}^v \beta_i B^{\tau_i} C_{t,i} \quad (2.18)$$

aquí  $C_{t,i}$  serían la covariable  $i$ ,  $v \in \mathbb{N}$  corresponde a la cantidad de covariables,  $\beta_i$  los coeficientes de cada covariable y  $\tau_i$  corresponde a la cantidad de retrasos que se aplican para la covariable.

A este modelo se le acostumbra a poner  $X$  al final de manera que se visualice la existencia de la matriz de covariables exógenas que influyan el futuro de la serie  $x_t$ .

Finalmente, para el caso propuesto en este documento se asume que la serie  $Z_t$  corresponde a un modelo SARIMAX utilizando la influencia exógena de la variación porcentual mensual inflacionaria  $\pi_t$  y la variación porcentual mensual del tipo de cambio  $\kappa_t$  ambas publicadas por el Banco Central de Costa Rica<sup>5</sup>. Incorporar covariables macroeconómicas que influyeran exógenamente la proyección ha sido

---

<sup>5</sup>Específicamente se utilizó el tipo de cambio de venta del dólar de los Estados Unidos de América con respecto al colón.

una estrategia ampliamente utilizada para la analítica de demandas. En [Rožanec et al., 2021] se utiliza un conjunto de covariables robusto, tomando en cuenta el precio de combustibles, tasas de desempleo, entre otras, y se proyecta la demanda de vehículos para el mercado primario Europeo. Del mismo modo, en la literatura, se utilizan varios modelos instaurando una especie de “competencia” entre ellos; como son [Fantazzini and Toktamysova, 2015], [Kato, 2022] y [Gao et al., 2018].

Cabe mencionar que si bien nos interesa el total por periodo de cobro  $n$  de la serie  $Z_t$ , esta serie es mensual y su análisis se abarca desde este enfoque. De esta manera se obtiene<sup>6</sup> que  $S_n = \sum_{t \in \mathcal{G}_n} Z_t$ ,  $\mathcal{G}_n$  es el conjunto de meses  $t$  que pertenecen al  $n$ -ésimo periodo de cobro y para  $i \neq j$  tenemos  $\mathcal{G}_j \cap \mathcal{G}_i = \emptyset$ .

## 2.5. VEHÍCULOS PUESTOS AL DÍA

Como se mencionó anteriormente, el SOA cobra los periodos de atraso hasta tener tres periodos acumulados. A partir de ese punto solo cobrará los últimos tres periodos. Podría ser de beneficio para el analista actuarial comprender el ingreso esperado en primas, no solo por el ingreso del periodo de cobro proyectado, sino también el ingreso proveniente por primas pagadas por otros periodos. La información podría ser beneficiosa para la simulación de estados financieros o para satisfacer las solicitudes de información de juntas directivas o jefaturas.

En caso de querer conocer el ingreso de primas del  $n$ -ésimo periodo;  $I_n$ , donde

---

<sup>6</sup>Aquí se cometió abuso de lenguaje, se debe tomar en cuenta que bajo este contexto de series lo que se busca es la esperanza del modelo dados los datos observados  $\hat{z}_t$ , para  $t \in \mathcal{N}$ . Esto sería, la esperanza condicional  $\mathbb{E}[Z_t | \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{|\mathcal{N}|}]$ . No obstante, reduciremos su notación a  $\mathbb{E}[Z_t]$  por conveniencia.

se toman en cuenta  $m$  periodos de atraso<sup>7</sup>,  $m > 0$ , entonces tenemos:

$$I_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left[ \sum_{j=\max\{k, n-m\}}^{n-1} r_j \right] \cdot \mathbf{P}[A_n = 0 | A_{n-1} = n - k] \cdot \mathbb{E} \left[ \overline{V}_{n-k}^{n-1} \right] \quad (2.19)$$

donde  $r_k$  corresponde a la prima definida para el  $k$ -ésimo periodo. Note que en este caso  $I_n$  corresponde al ingreso de prima únicamente definido para vehículos provenientes de estados con periodos atrasados:  $n - k > 0, \forall k \in \{n - m - 1, n - 1\}$ . Para obtener el monto total de ingreso de prima, basta con agregar lo pagado por vehículos con la prima del  $n$ -ésimo periodo. Esto es:

$$I_n + r_n \cdot \mathbb{E} \left[ \overline{V}_0^n \right].$$

## 2.6. MEDIDAS DE RIESGO

Como producto adicional del modelo se calcularán medidas de riesgo que nos ayuden a caracterizar la situación extrema de la dinámica. Como se explica en [Guégan and Hassani, 2019], una medida de riesgo coherente es una función  $\rho : \mathbb{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

1. **Monotonicidad:** Si un activo financiero tiene mejor rendimiento que otro en cualquier horizonte temporal, su riesgo también es menor. Esto quiere decir que si tenemos un activo  $Z$  y un activo  $W$  los cuales representan

---

<sup>7</sup>En el caso específico del SOA  $m = 3$ , como se mencionó anteriormente.



variables aleatorias, entonces

$$Z \leq W \implies \rho(Z) \leq \rho(W)$$

2. **Sub-aditividad:** La diversificación en activos disminuye el riesgo de la posición global esto quiere decir que

$$\rho(Z + W) \leq \rho(Z) + \rho(W)$$

3. **Homogeneidad positiva:** Se refiere a proporcionalidad entre tamaño de la posición y el riesgo. En otras palabras, si  $0 \leq \lambda$

$$\rho(\lambda Z) = \lambda \rho(Z)$$

4. **Invarianza bajo translaciones:** Al añadir efectivo a una posición, su riesgo disminuye en proporción directa al capital añadido: si  $r \in \mathbb{R}$

$$\rho(Z + r) = \rho(Z) - r$$

Algunas de las medidas de riesgo más utilizadas son el valor en riesgo  $\text{VaR}_\alpha$  y el valor en riesgo condicional  $\text{CVaR}_\alpha$ . Cabe destacar que el  $\text{VaR}_\alpha$  fue reconocido como medida de riesgo desde el acuerdo de Basilea en la así denominada resolución II.5 para el contexto bancario. Solvencia II involucra una cultura de administración de riesgos en su segundo pilar para el mercado de seguros. El valor en riesgo se

define como el percentil  $VaR_\alpha$  a un nivel de significancia  $\alpha$  tal que,

$$1 - \alpha = \mathbf{P}[Z \leq VaR_\alpha] \quad (2.20)$$

Se puede demostrar que el  $VaR_\alpha$  en general no cumple la propiedad sub-aditiva de una medida coherente. Por lo tanto, se utiliza la medida de riesgo  $CVaR_\alpha$  que sí satisface las cuatro propiedades antes mencionadas, y se define como:

$$CVaR_\alpha = \mathbb{E}[Z|VaR_\alpha \leq Z] \quad (2.21)$$

Es decir, es el valor esperado de la variable  $Z$  dado que es mayor al valor del  $VaR_\alpha$ . En nuestro caso, buscamos el  $CVaR_\alpha$  con un nivel de significancia  $\alpha = 1\%$  o  $5\%$  variando entre la cola derecha e izquierda de la distribución. Para efectos de notación llámele al valor en riesgo condicional de la cola derecha de la distribución de  $Z$ ,  $CVaR[Z]_\alpha$  y al valor en riesgo condicional de la cola izquierda  $CVaR[Z]_\beta$ . Esta medida de riesgo nos permite calcular escenario específicos. Este trabajo se interesa particularmente en la cola izquierda de la distribución, ya que en caso de simular un estado de resultados o visualizar la variación de la prima bajo circunstancias extremas, el riesgo se encuentra cuando se observan menos vehículos pagados que los proyectados.



## 3 — METODOLOGÍA

Ahora que se conoce la estructura del modelo, se presentarán las particularidades de su aplicación. Diferentes componentes juegan un papel importante dentro de la aplicación de una Cadena de Markov, entre ellos se encuentran: la población inicial ( $V^0$ ), la distribución inicial ( $\rho_{i_0}$ ) y la probabilidad de transición ( $\mathbf{P} [A_n = j | A_{n-1} = i]$ ), la cual por simplicidad escribiremos de ahora en adelante como  $\mathbf{P}_i^j$ . No obstante, dado que esta es una Cadena de Markov con población abierta, es necesaria la estimación de la cantidad de vehículos nuevos ( $S_n$ ).

### 3.1. ESTIMACIÓN DE LA CADENA DE MARKOV

No solo se describirá la estimación de cada uno de los componentes, además se discutirá la posibilidad de optimizar la estimación de la probabilidad de transición de manera que tome en cuenta con mayor influencia ciertas transiciones a lo largo del tiempo. Se explicará cuales son los criterios de elección de modelos y los índices de error. Finalmente, se analizará el enfoque *learning/testing* tanto para la cadena de Markov como para la selección del modelo ideal de vehículos nuevos.

### 3.1.1. POBLACIÓN Y DISTRIBUCIÓN INICIAL

Estos componentes son los más sencillos de estimar dado que para el momento  $n = 0$  son observados. Precisamente,  $\widehat{V}^0$  será el total de personas observadas dentro del sistema para ese periodo de cobro. Entonces sea  $\hat{v}_{i_0}$  la cantidad total de vehículos observados (*contados*) que se encuentran en el estado  $i_0$ . Por supuesto en este caso  $n = 0$  corresponde al último periodo de cobro observado. Entonces:

$$\widehat{V}^0 = \sum_{i_0 \in \mathcal{E}} \hat{v}_{i_0} \quad y \quad (3.1)$$

$$\hat{\rho}_{i_0} = \frac{\hat{v}_{i_0}}{\widehat{V}^0}. \quad (3.2)$$

### 3.1.2. PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

En este apartado, se define  $\mathcal{M}$  como el conjunto de periodos de cobro observados, entonces existen  $|\mathcal{M}| - 1$  transiciones observadas<sup>1</sup>. Sea  $\hat{v}_i^j(m)$  la cantidad de vehículos observados que transicionan en el  $m$ -ésimo periodo observado del estado  $i$  al estado  $j$ , donde  $m \in \{1, \dots, |\mathcal{M}| - 1\}$  y  $i, j \in \mathcal{E}$ . Por otro lado, se define  $\hat{v}_i(m)$  como la cantidad de vehículos observados que se encuentran en el estado  $i$  en el  $m$ -ésimo periodo. La probabilidad observada para la transición correspondiente a  $\mathbf{P}_i^j(m) = \frac{\hat{v}_i^j(m)}{\hat{v}_i(m)} = \frac{\hat{v}_i^j(m)}{\sum_{k \in \mathcal{E}} \hat{v}_i^k(m)}$ . Más específicamente, la probabilidad estimada para la transición del estado  $i$  al estado  $j$  es:

---

<sup>1</sup>La función  $f(\cdot) = |\cdot|$ , corresponde a la función de cardinalidad de un conjunto evaluado. En caso de que lo evaluado corresponda a una constante, se tomará como su valor absoluto.

$$\hat{\mathbf{P}}_i^j = \frac{\sum_m \mathbf{P}_i^j(m)}{|\mathcal{M}| - 1}. \quad (3.3)$$

Note que hasta este punto se utiliza el promedio de la probabilidad observada de transición para estimar la probabilidad de transición. No obstante, si bien este método es correcto; no quiere decir que no existan periodos de interés para el usuario donde se posibilite una influencia para la transición de un periodo particular más relevante que para el resto. Bajo el método de la ecuación (3.3) se está asumiendo una influencia uniforme de cada periodo  $m$  observado. En este trabajo se valorará la posibilidad de realizar un ajuste por medio de un enfoque *learning/testing*, muy utilizado en la actualidad para mejorar las estimación y evaluar la predictibilidad del modelo.

## 3.2. AJUSTE DE LA PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

El enfoque se basa en un principio sencillo donde se toman periodos observados como punto de partida para realizar un ajuste y luego periodos consecutivos observados para evaluar el ajuste. En otras palabras, se asume que lo observado es un pseudo-pasado y se proyectan periodos que ya ocurrieron de manera que se puede evaluar la diferencia entre ambos y de este modo obtener una medida para la capacidad predictiva del modelo.

Para este apartado, tome en cuenta que existe un conjunto de periodos observados  $\mathcal{M}$  y un subconjunto de periodos de evaluación  $\mathcal{M}_e$ . Se utilizará una media

móvil de pesos exponenciales o EWMA, por sus siglas en inglés, para encontrar las pesos que mejor caractericen los periodos de ajuste a mimetizar. Esto quiere decir que existe una porción de periodos de ajuste que se utilizarán como insumo y otra porción que servirán como objetivo a mimetizar,  $\mathcal{M}_a$  y  $\mathcal{M}_o$ , respectivamente. Entonces la nueva probabilidad de transición observada sería  $\mathbf{P}_i^j(m_a)$ . Aquí,  $m_a \in \{1, \dots, |\mathcal{M}_a| - 1\}$ . Y la probabilidad de transición estimada es:

$$\hat{\mathbf{P}}_i^j(\gamma) = \frac{\sum_{m_a} \mathbf{P}_i^j(m_a) \cdot e^{\gamma \cdot m_a}}{\sum_{m_a} e^{\gamma \cdot m_a}} \quad (3.4)$$

Se nota que aquí existe un parámetro  $\gamma$ , si  $\gamma = 0$  entonces se obtienen pesos uniformes como en la ecuación (3.3). Mientras que si  $\gamma$  es positivo, se tomará un mayor peso para las transiciones más recientes. De este modo basta con encontrar el  $\gamma$  que más convenga para mejorar la capacidad predictiva del modelo.

Es el conjunto de periodos en  $\mathcal{M}_o$  el cual ayudará a encontrar el  $\gamma$  que más convenga. Para esto se define la siguiente función:

$$F(\gamma) = \sqrt{\sum_{m_o \in \mathcal{M}_o} \sum_{j \in \mathcal{E}} \left( \mathbb{E} \left[ \widehat{V}_j^{m_o}(\gamma) \right] - V_j^{m_o} \right)^2 \cdot \frac{V_j^{m_o}}{\sum_{m_o \in \mathcal{M}_o} \sum_{j \in \mathcal{E}} V_j^{m_o}}} \quad (3.5)$$

Aquí,  $\mathbb{E} \left[ \widehat{V}_j^{m_o}(\gamma) \right]$  sería la esperanza estimada de la cantidad de vehículos en el estado  $j$  del periodo  $m_o$ .  $V_j^{m_o}$  es la cantidad observada de vehículos en el estado  $j$  del periodo  $m_o$ .

Esta función corresponde a la raíz cuadrada del error cuadrático entre la cantidad esperada de vehículos que se encuentran en el estado  $j$  en el periodo  $m_o$  y la

cantidad de vehículos observados en el estado  $j$  en el mismo periodo, ponderado por el peso correspondiente a la cantidad de vehículos observados. Note que la esperanza estimada depende del  $\gamma$ . Esto es: calcular lo establecido en la esperanza de la sección 2.3, pero aplicando la probabilidad de transición definida en (3.4). Es importante recalcar que se pondera por la cantidad de vehículos observados para brindarle más importancia a los estados con mayor cantidad de vehículos. Dadas las características de los datos observados, entre mayor sea el número de periodos atrasados, menor será la cantidad de vehículos y su probabilidad de pago. El estado con mayor cantidad de vehículos es el de estar al día y consecutivamente, el de tener uno o dos periodos atrasados. Debido a este marcado comportamiento, abonado a que el objetivo es la proyección de los vehículos al día para utilizarlos como el denominador de la prima de riesgo para el seguro, tenemos un interés más intenso sobre los estados con periodos atrasados con mayor cantidad de vehículos.

Cuando la función objetivo utiliza el  $\gamma$  para el cual la función se minimiza entonces obtenemos que las transiciones con mayor influencia corresponden a las que garantizan la menor diferencia entre lo esperado y lo observado para los periodos en  $\mathcal{M}_o$ , priorizando los estados con mayor importancia. Entonces, definiendo un espacio de búsqueda  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ , que se especificará más adelante, obtenemos;

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma \in \mathcal{O}}{\operatorname{argmin}} F(\gamma).$$

Ahora que se concluyó la fase de *learning*, ya se obtuvo un valor óptimo  $\hat{\gamma}$ ; minimizando la función en (3.5). Es sencillo evaluar la predictibilidad del modelo basándonos en el subconjunto de periodos observados  $\mathcal{M}_e$  el cual corresponde a



los periodos de cobro más recientes. Aquí se pueden utilizar diferentes índices de error, en nuestro caso se utilizará:

- **Raíz del error cuadrático medio de la cantidad de vehículos en los estados de cada periodo de cobro para  $\mathcal{M}_e$**

$$MSEP = \sqrt{\sum_{m_e \in \mathcal{M}_e} \sum_{j \in A_{m_e}} \frac{\left( \mathbb{E} \left[ \widehat{V_j^{m_e}}(\gamma) \right] - V_j^{m_e} \right)^2}{|\mathcal{M}_e| \cdot |A_{m_e}|}}.$$

Note que  $A_{m_e} \subset \mathcal{E}$ , el cual sería la cantidad de estados observados en cada periodo del conjunto  $\mathcal{M}_e$ .

- **Error máximo absoluto de la cantidad de vehículos en los estados de cada periodo de cobro para  $\mathcal{M}_e$**

$$EMA = \max_{m_e \in \mathcal{M}_e, j \in A_{m_e}} \left| \mathbb{E} \left[ \widehat{V_j^{m_e}}(\gamma) \right] - V_j^{m_e} \right|$$

De este modo se concluye la fase de *testing* y la ejecución de los errores en el conjunto de periodos  $\mathcal{M}_e$  funcionarían como índices de predictibilidad sobre la Cadenas de Markov. Finalmente, basta con calcular la probabilidad de transición estimada en (3.4) alternando el conjunto  $\mathcal{M}_a$  por el histórico total  $\mathcal{M}$  y evaluado en  $\hat{\gamma}$ , esto sería:

$$\hat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma}) = \frac{\sum_m \mathbf{P}_i^j(m) \cdot e^{\hat{\gamma} \cdot m}}{\sum_m e^{\hat{\gamma} \cdot m}} \quad (3.6)$$

### 3.3. ENFOQUE LEARNING/TESTING PARA EL MODELO SARIMAX

Como se mencionó en las secciones anteriores, una cadena con población abierta incorpora el ingreso periódico de vehículos nuevos  $S_n$ . Para estimarlos se utiliza igualmente una subdivisión ordenada de los datos. En el caso de la Cadena de Markov los datos para el *learning* correspondían a la unión de los conjuntos  $\mathcal{M}_a$  y  $\mathcal{M}_o$ , estos son conjuntos de periodos de cobro, los cuales son anuales. Por otro lado, en el caso de la serie  $Z_t$ , es una serie mensual y denotaremos su conjunto de datos observados como  $\mathcal{N}$ . Entonces los subconjuntos serían  $\mathcal{N}_a$  para aprendizaje,  $\mathcal{N}_o$  para objetivo y  $\mathcal{N}_e$  evaluación. Se defina  $\hat{z}_t$  cómo la cantidad de vehículos observados en el momento  $t \in \mathcal{N}$ .

Es importante recalcar que existe una diferencia sutil entre los parámetros, los modelos y la estructura SARIMAX, por ejemplo; la estructura del SARIMAX se define mediante la elección de los parámetros  $p$ ,  $d$ ,  $q$  y  $Q$ ,  $D$ ,  $P$  y  $s$  además de la elección de covariables y sus atrasos. Mientras que los parámetros serían los valores específicos de los coeficientes. Dependiendo de los valores que tomen los parámetros estructurales, entonces el modelo puede o no variar de ser un SARIMAX completo, a un ARMA o un ARX, etc. Existen muchas y diferentes combinaciones posibles. La elección de los parámetros estructurales se determinará mediante la observación de los datos en cuestión. Aquí se apreciarán de manera crítica las herramientas estadísticas como: el ACF y el PACF<sup>2</sup>. En la siguiente sección se

---

<sup>2</sup>Se asume que el lector conoce la definición de estas herramientas exploratorias. En caso de no conocerlas consultar [Box and Jenkins, 1976] o consultar el Apéndice B.

analizarán las visualizaciones y descomposición de las serie, su peridiograma y la función de auto-correlación cruzada. Mientras tanto, nos enfocaremos en qué sucede cuando ya se obtuvo un conjunto viable de estructuras a evaluar. Por lo que asumiendo que se tiene un conjunto de modelos funcionales, sus parámetros se pueden encontrar de diferentes maneras. El método de preferencia para el ajuste de cualquier modelo SARIMAX es maximizar la función de *log*-verosimilitud.

### Máxima Verosimilitud

El principio intuitivo de la máxima verosimilitud consiste en encontrar los parámetros que maximicen la probabilidad de ocurrencia, dados los datos observados. La función de verosimilitud es el producto de la función de densidad evaluada en los datos observados. No obstante, se acostumbra a tomar el logaritmo de la función con fines prácticos y analíticos. Al maximizar la función de *log*-verosimilitud se estarían hallando los parámetros para los cuales es más probable que se obtenga la distribución evaluada. Si denominamos el *set* de parámetros del modelo SARIMAX como  $\theta$ , a la función de densidad del modelo  $f$  y observaciones  $z_t$  con  $t \in \mathcal{N}_a$ , entonces la *log*-verosimilitud es:

$$\hat{l}(\theta|z_1, \dots, z_{|\mathcal{N}_a|}) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{N}_a|} \ln(f(z_i|\theta)) \quad (3.7)$$

Entonces lo que se busca es efectivamente el valor,

$$\hat{\theta}_{mle} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \hat{l}(\theta|z_1, \dots, z_{|\mathcal{N}_a|}) \quad (3.8)$$

Si se desea indagar más sobre el tema se puede consultar [Jones, 1980]. Ahora

bien, una vez que se obtienen los coeficientes del conjunto de modelos se necesita elegir cuál es el modelo ideal para ser aplicado. Para esto se identifica su eficacia bajo dos perspectivas.

1. Bondad de Ajuste: esto implica evaluar qué tan bueno es el ajuste dentro del conjunto de observaciones  $\mathcal{N}_a$ . Para esto es sencillo utilizar un índice como el criterio de información Akaike o bayesiano (AIC o BIC respectivamente). Estos han sido por mucho tiempo la base para el monitoreo crítico del ajuste. En este trabajo nos basaremos únicamente en el AIC el cual se define como:

$$AIC = -2 \cdot \log(\mathbf{L}_k) + 2 \cdot k.$$

Donde  $\mathbf{L}_k$  es el valor de la máxima verosimilitud y  $k$  la cantidad de parámetros en el modelo. El AIC se construye desde la idea de discrepancia entre el modelo ideal y el modelo a evaluar denominada la *Discrepancia Kullback-Leibler*. Más información se puede encontrar en [Kullback and Leibler, 1951].

2. Predictibilidad: Aquí lo que se busca es captar la capacidad predictiva del conjunto de modelos. Se utiliza el conjunto de observaciones  $\mathcal{N}_o$  y se definen los siguientes índices de error:

- Error cuadrático medio:

$$MSE = \sum_{t=1}^{|\mathcal{N}_o|} \frac{(\mathbb{E}[Z_t] - \hat{z}_t)^2}{|\mathcal{N}_o|}$$

- Raíz del error cuadrático medio:

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

- Porcentaje de fallos hacia arriba<sup>3</sup>:

$$PFA = \frac{\sum_{t=1}^{|\mathcal{N}_o|} \mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[Z_t] > \hat{z}_t\}}}{|\mathcal{N}_o|}$$

- Porcentaje de fallos hacia arriba en términos absolutos:

$$PTFA = \frac{\sum_{t=1}^{|\mathcal{N}_o|} (\mathbb{E}[Z_t] - \hat{z}_t) \cdot \mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[Z_t] > \hat{z}_t\}}}{\sum_{t=1}^{|\mathcal{N}_o|} |\hat{z}_t| \cdot \mathbb{I}_{\{\mathbb{E}[Z_t] > \hat{z}_t\}}}$$

### Algoritmo de Selección

La utilización de ambas perspectivas radica en la selección del modelo idóneo. Se debe recordar que inicialmente los parámetros estructurales nos brindan una batería de modelos. A estos modelos se les evaluará inicialmente el AIC bajo  $\mathcal{N}_a$ . De ahí se tomarán los cinco modelos con el menor AIC para luego, utilizar los errores del enfoque predictivo y así seleccionar el modelo más equilibrado. Como último paso para la selección del modelo, se visualiza la proyección del modelo más idóneo y se ajusta utilizando la información de  $\mathcal{N}_a \cup \mathcal{N}_o$  y se evalúa su

---

<sup>3</sup>La razón por la que se calcula el porcentaje de fallos hacia arriba y no el de fallos hacia abajo radica en el objetivo de la proyección de vehículos de ser denominador de la prima de riesgo para el SOA. En caso de obtener un alto porcentaje de fallos hacia arriba se influye inversamente en la prima de riesgo disminuyendo su valor, lo que podría significar una subestimación de la prima y por lo tanto insuficiencia financiera para el seguro. Mientras que en caso de que exista un alto porcentaje de fallos hacia abajo se obtiene una versión del error con consecuencias conservadoras, donde se sobreestima la prima de riesgo para el seguro.

predictibilidad ejecutando los errores aplicándolos en  $\mathcal{N}_e$ . Por lo tanto, se obtiene el siguiente conjunto de pasos a seguir:

1. Se observan las características estadísticas de la serie de tiempo. Aquí se utilizan herramientas estadísticas para establecer una batería de estructuras posibles de los parámetros  $q$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $Q$ ,  $D$ ,  $P$  y  $s$ . Además de las posibles covariables a implementar.
2. Todos los modelos que se obtienen son ajustados en  $\mathcal{N}_a$  y se monitorean sus AICs. Se eligen los cinco mejores ajustes, los cuales tengan el AIC menor.
3. Se calculan los errores de predictibilidad y se visualiza su rendimiento bajo las observaciones  $\mathcal{N}_o$ . Se elige el modelo más estable y con errores menores.
4. Se ajusta el último modelo seleccionado bajo las observaciones en  $\mathcal{N}_a \cup \mathcal{N}_o$ . Y se evalúa su rendimiento en  $\mathcal{N}_e$ .
5. Finalmente, si su rendimiento bajo  $\mathcal{N}_e$  no es satisfactorio, se debe regresar al primer paso.

Este enfoque pretende, desde el punto de vista intuitivo, poner a los posibles modelos a competir entre ellos. Una vez seleccionado un modelo satisfactorio obtenemos una proyección  $\mathbb{E}[Z_t]$ , con  $t > |\mathcal{N}|$ , ajustado con los datos en  $\mathcal{N}$ . Como último paso, basta con sumar las proyecciones correspondientes al  $n$ -ésimo periodo de cobro y retomamos que  $S_n = \sum_{t \in \mathcal{G}_n} \mathbb{E}[Z_t]$ .

### 3.3.1. TRATAMIENTO DE COVARIABLES

Las covariables a utilizar son: la variación porcentual mensual de la inflación  $\pi_t$  y la variación porcentual mensual del tipo de cambio  $\kappa_t$ . Para ello se cuenta con los datos desde enero de 2015 hasta mayo de 2023 en ambos casos publicados por el Banco Central de Costa Rica. Como se mencionó previamente en 2.4, la limitación de utilizar covariables bajo el contexto SARIMAX es precisamente que estas deben ser proyectadas porque el modelo necesita evaluarlas para periodos futuros. Para esto se utilizó la expectativa de inflación y tipo de cambio también anuales publicados por el Banco Central de Costa Rica, llamados  $\bar{\pi}_t^{12}$  y  $\bar{\kappa}_t^{12}$ . Entonces, suponiendo que existe un periodo  $t + 12$  futuro la variación de la inflación equivalente mensual<sup>4</sup>  $\hat{\pi}_j$  es

$$\hat{\pi}_j = (1 + \bar{\pi}_t^{12})^{\frac{1}{12}} - 1$$

para todo  $j \in \{t + 1, \dots, t + h\}$ . Y del mismo modo para el tipo de cambio  $\kappa_t$ .

Si bien esto solo funciona para el primer año, lamentablemente el Banco Central de Costa Rica no publica expectativas a 24 o 36 meses que permitan encontrar las variaciones mensuales equivalentes. Por lo tanto, se asumen los valores  $\hat{\pi}_j$  y  $\hat{\kappa}_j$  fijos para cualquier  $j$  que sea un mes futuro, a partir de abril 2023.

---

<sup>4</sup>Si se desea conocer más sobre tasas equivalentes se recomienda leer [Kellison, 2008].

### 3.4. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA

Para poder sacar el mejor provecho sobre el modelo, sirve identificar la manera de realizar una simulación estocástica para poder encontrar y estudiar los valores extremos de la distribución. El objetivo consiste en encontrar valores esperados obtenidos desde el mismo proceso. Lo anterior implica utilizar simulación desde el punto de partida (el último periodo observado) para tener un conjunto de posibilidades de las cuales se calculen medidas de riesgo.

Es importante tomar en cuenta que la cantidad de simulaciones se fija para satisfacer que el promedio simulado converja a la esperanza definida en 2.3 y  $\mathbb{E}[Z_t]$ , o sea, la esperanza de la cadena de Markov y la esperanza de la serie mensual de vehículos nuevos, respectivamente. Para esto se presenta el siguiente algoritmo por periodo de cobro futuro:

1. Se inicializa el periodo de cobro.
2. Se ejecuta una realización de las covariables.
3. Se calcula la proyección de vehículos nuevos, evaluando la realización de las covariables.
4. Se guarda el valor de la realización de vehículos nuevos.
5. Para cada estado con cantidad de vehículos se simula decisión de pago o no pago.
6. Se suman los conjuntos de llegada.



7. Se agrega la realización de vehículos nuevos a los vehículos que pagan dentro del sistema.
8. Se guarda la cantidad de los vehículos que se encuentran en cada estado.
9. Repetimos desde el paso 2.

En el nivel de codificación, los pasos anteriores se realizan simultáneamente por periodo de cobro. En otras palabras, para cada periodo de cobro se ejecutan  $W$  simulaciones, donde  $W$  representa la cantidad de simulación que satisfaga una convergencia razonable del promedio a la esperanza.

Es importante tomar en cuenta que en el quinto paso existen varias maneras de caracterizar numéricamente esta decisión, dado que para la cadena de Markov existe por estado exclusivamente una transición binomial: de pagar o no pagar. En este caso, se utiliza una variable aleatoria multinomial, la más utilizada para simular cadenas de Markov. La razón de esto es que en el nivel práctico una variable multinomial tiende a ser lo más utilizado dado que deja la opción libre de aumentar la cantidad de estados de llegada a partir de cualquier estado de salida. O sea, generaliza la cantidad de transiciones posibles. Si bien en el caso particular basta con ejecutar una variable binomial, se utilizará la opción equivalente, para la cual se simulará una variable aleatoria multinomial solamente para dos conjuntos de llegada.

Considere  $n$  sucesos, si  $X_i$  es la variable aleatoria que indica la cantidad de veces que el suceso  $i$  se dio en  $n$  realizaciones, entonces se dice que el vector aleatorio  $X = (X_1, \dots, X_k)$  tiene una distribución de multinomial si con probabilidad

$p = (p_1, \dots, p_k)$ , su función de probabilidad es,

$$Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} & \text{si, } \sum_{i=1}^k x_i = n \\ 0 & \text{si, no.} \end{cases} \quad (3.9)$$

El beneficio de utilizar en primera instancia una variable multinomial consiste en que el código pueda seguir siendo utilizado y sea más fácil de modificar en caso de que cambie la estructura del modelo<sup>5</sup>. Ahora, si definimos  $v$  la cantidad de periodos a proyectar y  $k$  la cantidad de estados observados podemos describir el procedimiento bajo el Algoritmo 1.

En este caso, la función **SARIMAX** corresponde a una realización del modelo seleccionado evaluado sobre una realización de las covariables. Por otro lado, se asume que las covariables se distribuyen como variables aleatorias normales. Una vez que se obtienen todas las simulaciones, basta con utilizar este insumo para calcular medidas de riesgo de interés.

---

<sup>5</sup>Lo que mejora la versatilidad del código para el usuario.

---

**Algoritmo 1** Simulación de Montecarlo

---

$V_{i,w}^n$ : Cantidad de vehículos en el periodo  $n$ , estado  $i$  y en la realización  $w$ ,  
 $n \in \{0, \dots, v\}$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$  y  $w \in \{1, \dots, W\}$

$\tilde{\pi}_{t,w}$ : realización de la variación porcentual mensual de la inflación  $t \in \mathcal{G}_n$

$\tilde{\kappa}_{t,w}$ : realización de la variación porcentual mensual del tipo de cambio  
 $t \in \mathcal{G}_n$

$\tilde{A}_{t,w}$ : Realización del modelo SARIMAX en  $t$

$S_{n,w}$ : Total de vehículos nuevos en el periodo  $i$

$\mathbf{P}_i^j$ : probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$

$V_{j,i,w}^{n+1}$ : cantidad de vehículos para el periodo  $n + 1$  en el estado  $j$  provenientes del estado  $i$

---

```
1: procedure INICIALIZACIÓN DE PERIODO
2:    $L \leftarrow$  Se crea un objeto lista
3:   for  $n = 0, \dots, v - 1$  do
4:      $\forall w$ 
5:       procedure SIMULACIÓN DE VEHÍCULOS NUEVOS
6:         for  $t \in \mathcal{G}_t$  do
7:            $\tilde{\pi}_{t,w} \leftarrow \mathcal{N}(\pi_t, \sigma_\pi^2)$ 
8:            $\tilde{\kappa}_{t,w} \leftarrow \mathcal{N}(\kappa_t, \sigma_\kappa^2)$ 
9:            $\tilde{A}_{t,w} \leftarrow \text{SARIMAX}(\tilde{\pi}_{t,w}, \tilde{\kappa}_{t,w})$ 
10:        end
11:        $S_{n,w} \leftarrow \sum_{t \in \mathcal{G}_i} \tilde{A}_{t,w}$ 
12:       procedure TRANSICIÓN DE ESTADOS
13:          $\forall i, \begin{cases} V_{0,i,w}^{n+1} \sim \text{Multinom}(V_{i,w}^n, \{\mathbf{P}_i^0, \mathbf{P}_i^{i+1}\})[1] \\ V_{i+1,i,w}^{n+1} \sim \text{Multinom}(V_{i,w}^n, \{\mathbf{P}_i^0, \mathbf{P}_i^{i+1}\})[2] \end{cases}$ 
14:          $V_{0,w}^{n+1} \leftarrow S_{n,w} + \sum_i V_{0,i,w}^{n+1}$ 
15:       procedure ALMACENAMIENTO DE VALORES
16:          $L[n + 1] \leftarrow \{S_{n,w}, V_{0,w}^{n+1}, \dots, V_{k,w}^{n+1}\}$ 
17:     end
```

---

## 4 — DESARROLLO

En esta sección se abarcará la explicación detallada del procedimiento para aplicar el modelo y la metodología antes descritas. Esto implica exponer el tratamiento realizado al conjunto de datos, describir las herramientas estadísticas para las series  $Z_t$  y la batería de modelos obtenidos; finalmente, se describe el análisis realizado a las covariables macroeconómicas y se realiza la optimización para encontrar el parámetro  $\hat{\gamma}$  de la probabilidad de transición. La aplicación se realizó en el lenguaje de programación *R*.

### 4.1. SOBRE EL CONJUNTO DE DATOS

Se cuenta con datos de un único conjunto de vehículos, que fue otorgado por el Instituto Nacional de Seguros y resulta acorde a los requerimientos de confidencialidad. El conjunto de vehículos en específico es anónimo, por lo que sus identificadores también fueron alterados para mantenerlos unívocos; pero diferentes a los reales. Estos datos constan de siete variables: Periodo de cobro, Placa, Indicador de Pago, Indicador de Ingreso, Mes de Ingreso, Año de Ingreso y Periodos de Atraso. Cada observación visualiza el registro desde el 2016 hasta la fecha

de corte para el conjunto completo (periodo de cobro 2022) de lo sucedido para un vehículo en un periodo de cobro específico. Una descripción más detallada se incluye a continuación.

<b>Detalle de Variables</b>	
Periodo de cobro	Variable discreta que toma los valores 2016 hasta el 2022.
Placa	Identificador único por vehículo. Consiste en una concatenación de códigos de registro. No hay dos placas iguales por vehículo en un momento determinado.
Indicador de Pago	Variable dicotómica, toma el valor 1 si en ese periodo de cobro el vehículo pagó y 0, si no. Está directamente relacionada con la variable de Periodo de atraso. Solo puede ser 1 si el periodo de atraso es 0.
Indicador de Ingreso	Variable dicotómica, toma el valor 1 si el vehículo es un nuevo ingreso para ese periodo de cobro y 0, si sucede lo contrario. Solo debe de haber un ingreso.
Mes de Ingreso	Variable discreta, toma los valores de 1 a 12 dependiendo de en cuál mes se registra el ingreso del nuevo vehículo. Es NA en caso de que no sea un vehículo nuevo.
Año de Ingreso	Variable discreta, toma los valores de 2015 a 2022 dependiendo de en cuál año se registra el ingreso del nuevo vehículo. Es NA en caso de que no sea un vehículo nuevo.
Periodos de Atraso	Variable discreta, puede tomar cualquier valor desde 0 en adelante. El máximo valor observado se encuentra entre los 37 y los 40.

Cuadro 4.1: Descripción detallada de las variables para el *set* de datos utilizado.

El conjunto de datos se extrae directamente del sistema del INS y el hecho de

que se base en lo realmente ocurrido registrado a la fecha de corte se considera importante, dado que esta variación implica una leve diferencia con respecto a lo contabilizado en cada periodo de cobro. Un ejemplo muy sencillo de esto es el efecto que tiene la utilización de cheques sin fondos para el pago del marchamo tal y como se explica a continuación.

Una vez que el pago se realiza terminando el mes de diciembre, el sistema contabiliza tal pago en el periodo de cobro correspondiente; no obstante, el sistema se corrige y modifica tal transacción una vez observado que efectivamente el cheque no contenía fondos. Si se cuantifica el conteo de lo contabilizado se observará un pago para ese periodo de cobro. La corrección se contabilizaría para el siguiente periodo y en la base se observaría lo que realmente sucedió en el periodo inicial, que tal transacción nunca ocurrió. Cabe recalcar que esta variación es leve dado que los casos y razones por las cuales suceden estas devoluciones tienden a ser pocas a lo largo de los periodos.

Es importante tomar en cuenta que los datos siguen el orden necesario para la aplicabilidad del modelo. Esto quiere decir que mantienen consistencia a lo largo del tiempo. Por ejemplo, un vehículo nunca debería acumular dos periodos atrasados en un único periodo de cobro. Se asume que cada vehículo solo se registra una vez en el sistema tomando el último registro como el único. Es por esto que la primera observación de un vehículo que ingresó en los periodos de cobro 2016-2022 debe contener un 1 en el indicador de ingreso y las observaciones en periodos de cobro anteriores a esa no deben existir. Otra regla observada consiste en que las variables deben mantener consistencia coordinada por observación. El indicador de pago debe estar coordinada con la fecha de ingreso. Si existe un ingreso el

indicador debe ser 1 y simultáneamente debe existir mes y año de ingreso. Del mismo modo, con el indicador de pago, si se pagó en un periodo de cobro, esto implica que no acumuló periodo de atraso y, por lo tanto, el periodo de atraso debe reiniciar a cero. Las reglas fueron garantizadas por el Instituto Nacional de Seguros y fueron validadas antes de la aplicación del modelo.

Bajo esta estructura se goza de un volumen suficiente de observaciones, exactamente 9.543.609 observaciones. Por otro lado, es forzoso tomar en cuenta que las observaciones no corresponden a cantidad de vehículos, sino lo sucedido para un vehículo dentro del sistema para un periodo de cobro. Además, los vehículos se pueden agrupar en diferentes subgrupos de posible interés, entre ellos, los vehículos que pagan desde un estado con periodos de atraso mayores a cero, a estos se les acostumbra llamar *No Procesados* dado que no se colocaron al cobro en el periodo que pagan. Sin embargo, los vehículos de mayor interés son los vehículos de pago por periodo de cobro, la evolución de cuyo número se muestra a continuación.

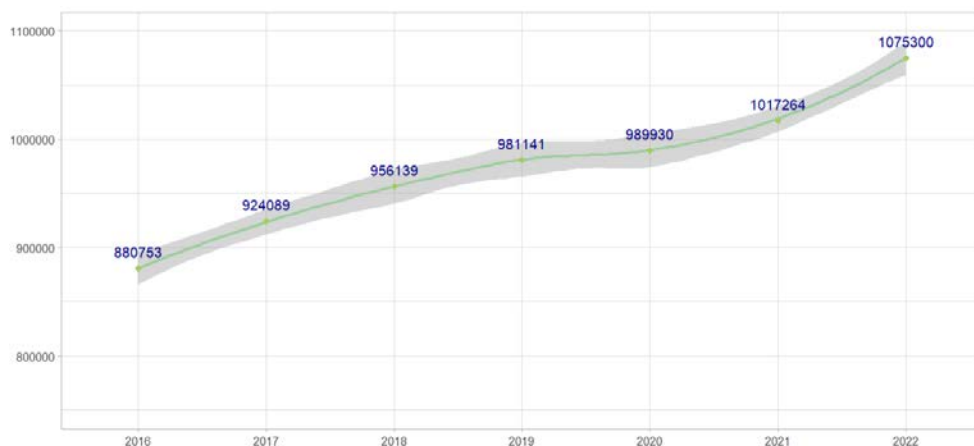


Figura 4.1: Cantidad de vehículos pagados por periodo de cobro.

Se puede notar que en general la cantidad de vehículos pagados es creciente. Recordemos que los vehículos pagados por periodo de cobro corresponden a los del estado con cero periodos de atraso.

## 4.2. APLICACIÓN DE MODELO SARIMAX

Ahora que se conocen los elementos de la base de datos, variables y observaciones se procede a realizar el análisis univariado de los vehículos nuevos. El análisis se realizará desde un punto de vista univariado y luego uno multivariado, de manera que se pueda definir el conjunto de modelos que funcionarán como candidatos. Luego, se observarán los errores de predictibilidad y el AIC de manera que se obtenga el mejor modelo, para finalmente observar su eficacia. Cada grupo de cálculo utilizará un 70 % de los datos más antiguos como conjunto de ajuste  $\mathcal{N}_a$ , un 15 % como objetivo  $\mathcal{N}_o$  y un 15 % de evaluación, el más reciente  $\mathcal{N}_e$ .

- $\mathcal{N}_a$  toma los valores desde noviembre 2015 hasta setiembre del 2020
- $\mathcal{N}_o$  toma los valores desde octubre 2020 hasta octubre del 2021
- $\mathcal{N}_e$  toma los valores desde noviembre 2021 hasta octubre del 2022

### 4.2.1. ANÁLISIS UNIVARIADO

Inicialmente, tenemos una serie de nuevos ingresos para el conjunto de ajuste  $\mathcal{N}_a$ . A continuación se observa la serie, su descomposición tendencial y periódica y los residuos.



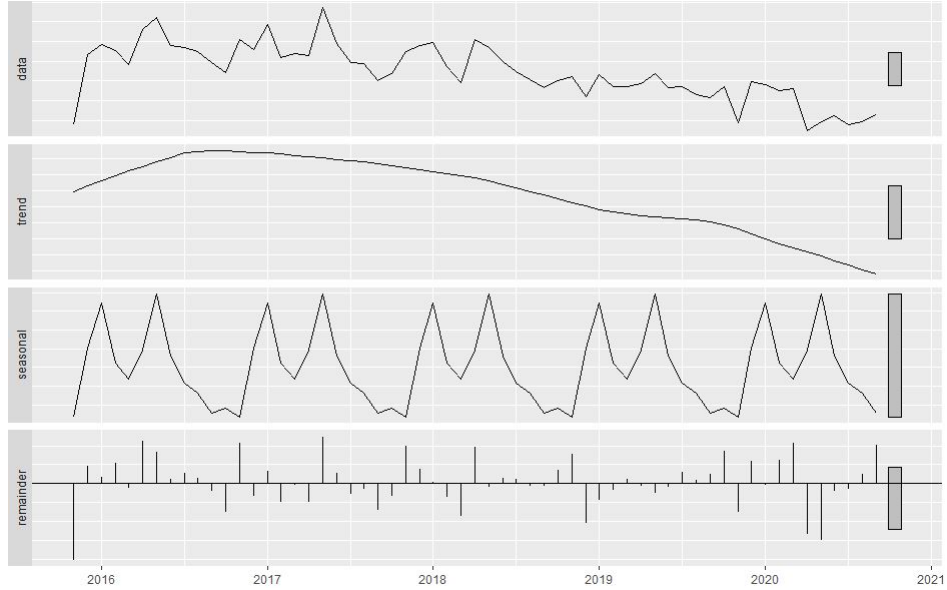


Figura 4.2: Descomposición de la serie de vehículos nuevos.

Se percibe una disminución en la serie a lo largo del tiempo la cual es confirmada por la tendencia. La gráfica de estacionalidad sugiere además dos momentos en el año para los cuales existe un aumento de la cantidad de vehículos, específicamente en diciembre y en abril. Esto indica que la serie se ve afectada por eventos como, la Expo-automovilística y fin de año.

Al aplicar la primera diferencia de la serie obtenemos una eliminación de la tendencia como se observa en la siguiente gráfica. Esto sugiere la posibilidad de utilizar un parámetro estructural de ARIMA,  $d = 1$ .

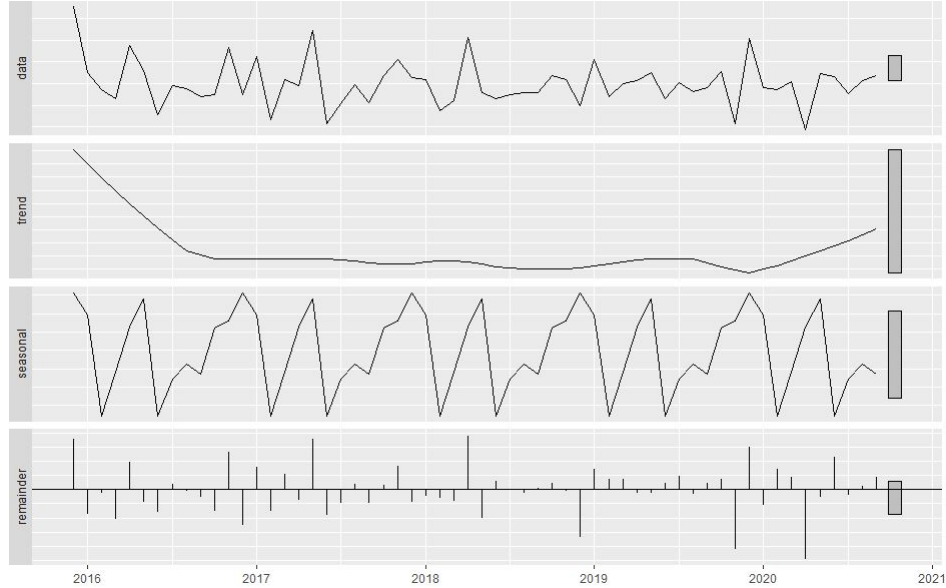


Figura 4.3: Serie de vehículos nuevos diferenciada una vez ( $d = 1$ ).

Se observa que la tendencia ahora tiende a bajar y a subir en los extremos mientras que se mantiene estable en la mayoría de los periodos. Por otro lado, note que se mantienen dos momentos en el año con una alta cantidad de vehículos al igual que en la serie original.

Por otro lado, es muy importante poner a prueba el supuesto de normalidad sobre los residuos de la serie. Esta se visualiza en la figura 4.4, se puede observar una similitud entre el ajuste normal y la distribución empírica. Adicionalmente, se realiza un prueba de hipótesis de Pearson para la normalidad de los residuos para la cual se obtiene un estadístico de 17,103 y un  $p$ -valor de 0,02905 que es mayor a 0,01 por lo que no se rechaza la hipótesis nula.

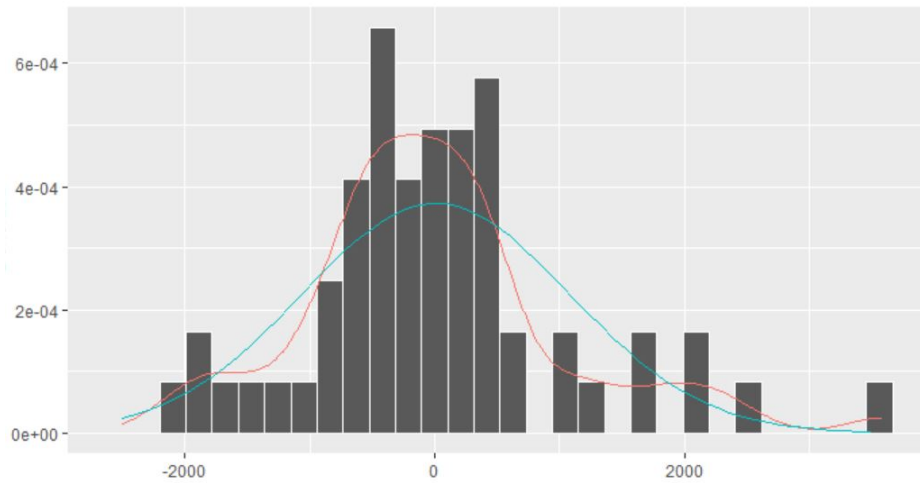
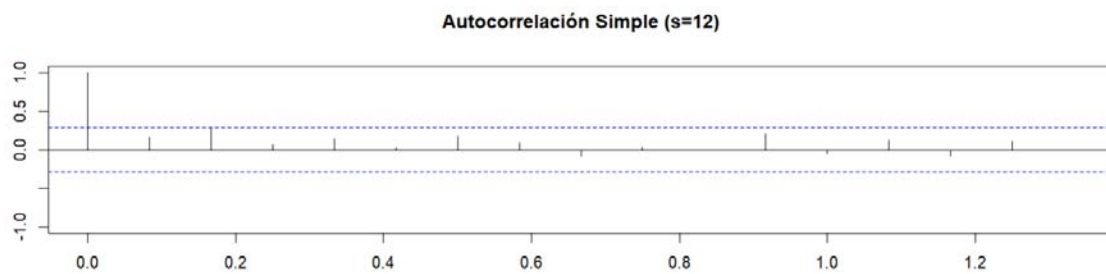


Figura 4.4: Normalidad para los residuos de la serie de vehículos nuevos diferenciada una vez. En azul el ajuste de la distribución normal y en rojo la distribución empírica de los residuos.

Al observar el periodograma y elegir las tres frecuencias más altas del espectro, se encuentran periodos significativos de 6, 5 y 12. Esto sugiere un valor  $s = 12$  o  $s = 6$ . A continuación se observa la autocorrelación de los residuos para cuando  $s = 12$  y  $s = 6$ .



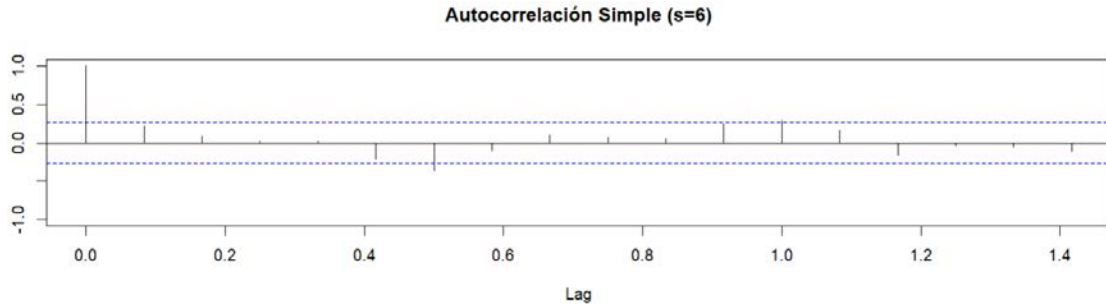


Figura 4.5: ACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada con  $s = 12$  y  $s = 6$  retrasos.

Se nota que en el caso cuando  $s = 6$  se obtienen residuos más autocorrelacionados que en el caso de  $s = 12$ . Esto sugiere utilizar un parámetro estructural  $s = 12$ . Ahora, observamos el ACF y el PACF de la serie diferenciada una vez ( $d = 1$ ).

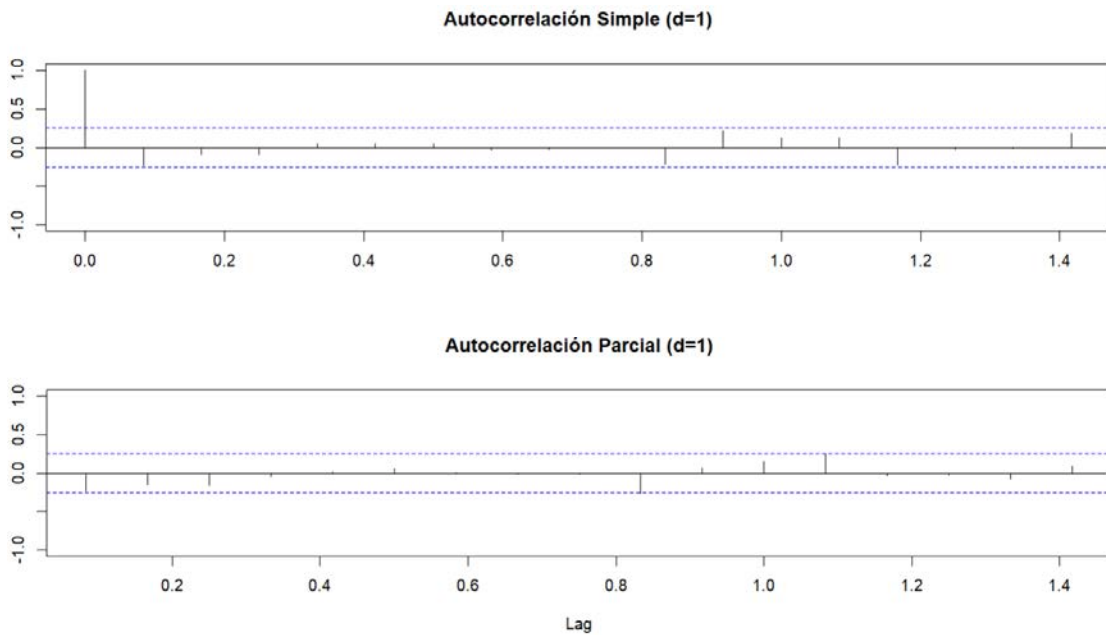


Figura 4.6: ACF y PACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada una vez.

El ACF se corta después del primer *lag* mientras que el PACF se disminuye sinoidalmente. Esto sugiere utilizar  $q = 1$ , significativo y vale la pena probar  $p = 0$  y  $p = 1$ . Luego, al observar el ACF y el PACF de la serie al utilizar una diferencia cada 12 *lags* se observan a continuación.

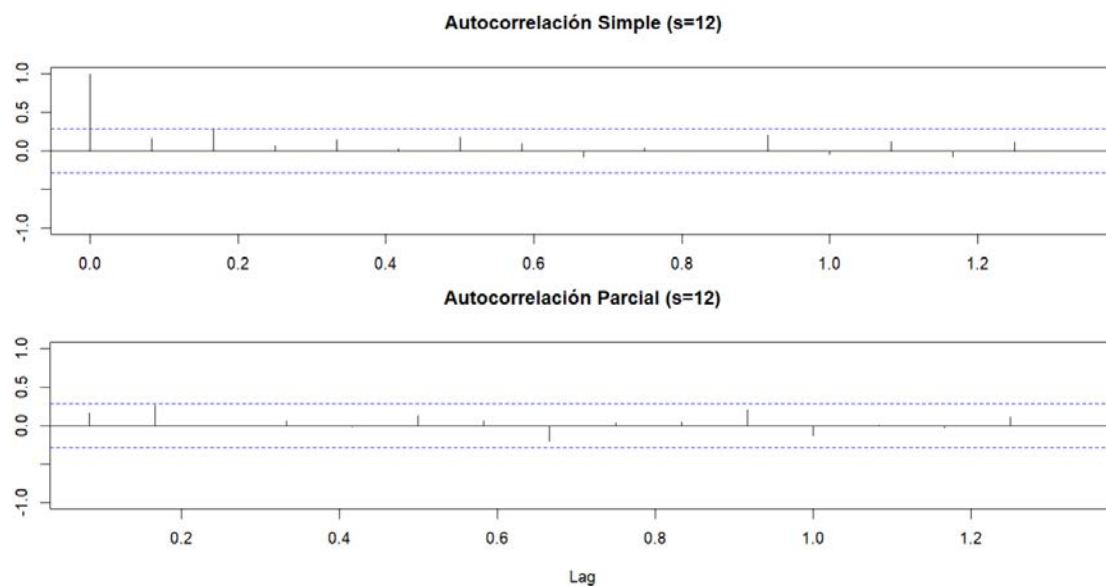


Figura 4.7: ACF y PACF de la serie de vehículos nuevos diferenciada cada 12 retrasos.

El PACF se corta después del 2 mientras que el ACF se disminuye sinoidalmente. Esto sugiere  $P = 2$ , no tan significativo en  $s = 12$  por lo que se puede probar  $P = 1$ . Se deduce, además, que vale la pena analizar  $Q = 1$  y  $Q = 0$ . Ahora, al tomar en cuenta las observaciones realizadas sobre las características de las series, se identifican las siguientes modelos candidatos.

Posibilidades Encontradas	
Arima(1, 1, 1)[2, 0, 1] <sub>12</sub>	Arima(0, 1, 1)[2, 0, 1] <sub>12</sub>
Arima(1, 1, 1)[1, 0, 1] <sub>12</sub>	Arima(0, 1, 1)[1, 0, 1] <sub>12</sub>
Arima(1, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>
Arima(1, 1, 1)[1, 0, 0] <sub>12</sub>	Arima(0, 1, 1)[1, 0, 0] <sub>12</sub>
Arima(1, 1, 1)	Arima(0, 1, 1)

Cuadro 4.2: Estructuras paramétricas ARIMAX que funcionan como candidatos en el análisis. Se derivan de las sugerencias obtenidas al aplicar herramientas estadísticas.

#### 4.2.2. ANÁLISIS DE COVARIABLES

En esta sección se observa la función de autocorrelación cruzada. Solo interesa la causalidad representada por el lado derecho del gráfico, de manera que el pasado de la covariable inflencie el presente de la variable dependiente. La relación a tomar debe ser intuitiva con respecto a la causalidad.

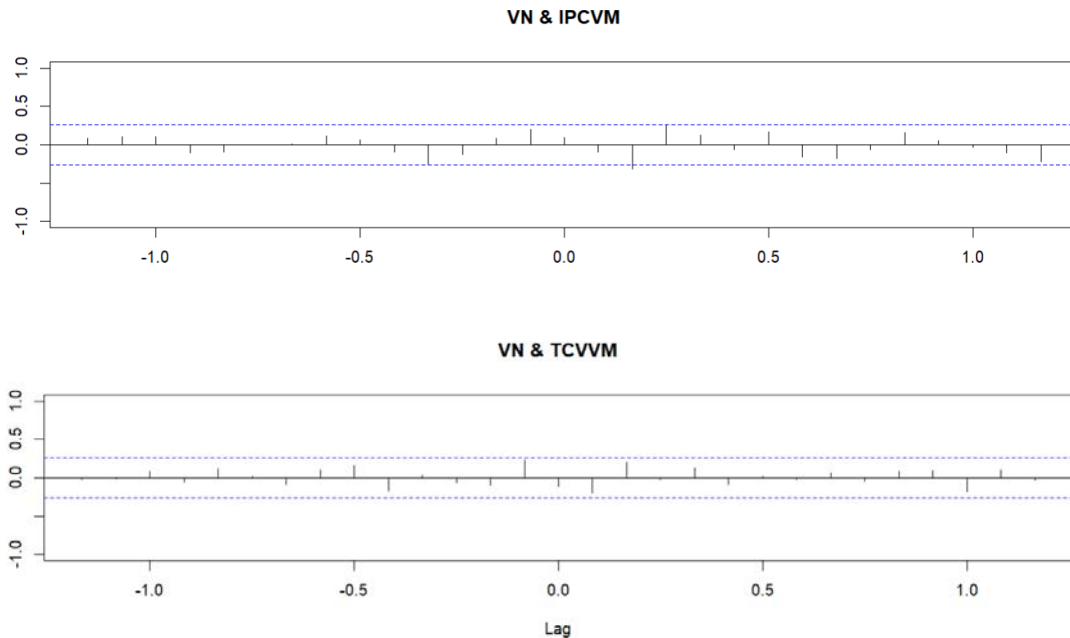


Figura 4.8: Función de autocorrelación cruzada para  $\pi_t$  y  $\kappa_t$ , respectivamente.

Se puede observar una correlación con  $lag = 2$  negativa, significativa, en la variación mensual del IPC. Mientras en el caso del tipo de cambio, se encuentra una correlación con  $lag = 12$  o  $lag = 1$  negativa y relevante, más no significativa.

### 4.2.3. CONJUNTO DE MODELOS CANDIDATOS

Al tomar los retrasos correspondientes y realizando todas las posibles combinaciones con los modelos encontrados del análisis univariado, se encuentran 88 posibles modelos. Los cinco con el mejor AIC se presentan a continuación.

Modelo	IPCVM	TCVVM <sub>1</sub>	TCVVM <sub>12</sub>	AIC
Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	X	X	X	745.195
Arima(1, 1, 1)	X	X	X	745.844
Arima(1, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	X	X	X	745.847
auto.arima Arima(0, 1, 1)[0, 0, 1] <sub>12</sub>		X	X	745.883
Arima(0, 1, 1)[1, 0, 1] <sub>12</sub>	X	X	X	745.934

Cuadro 4.3: Los cinco mejores modelos según la aplicación del AIC. La  $X$  implica utilizar la covariable.

Estos 88 modelos se generan al combinar los candidatos del cuadro 4.2 que son 10 modelos con todas las combinaciones de 2 covariables (corresponden a 3 posibilidades dado que son 3 covariables), de utilizar cada covariable por separado, utilizarlas todas o no utilizar ninguna, lo que da 8 posibilidades para cada modelo. Adicionalmente, se agregan 8 posibilidades más al utilizar la función *auto.arima* de  $R$  para cada combinación de covariables mencionada. Por lo que tenemos  $10 \times 8 + 8 = 88$  candidatos.

#### 4.2.4. ENFOQUE PREDICTIVO

Al aplicar los modelos con los menores AIC en el conjunto de datos objetivo y calcular los errores obtenemos los siguientes resultados. En general, serie VN\_train corresponde a la serie histórica de vehículos nuevos para ajuste en  $\mathcal{N}_a$ , la serie denominada original corresponde también al histórico de la serie pero en  $\mathcal{N}_o$ .

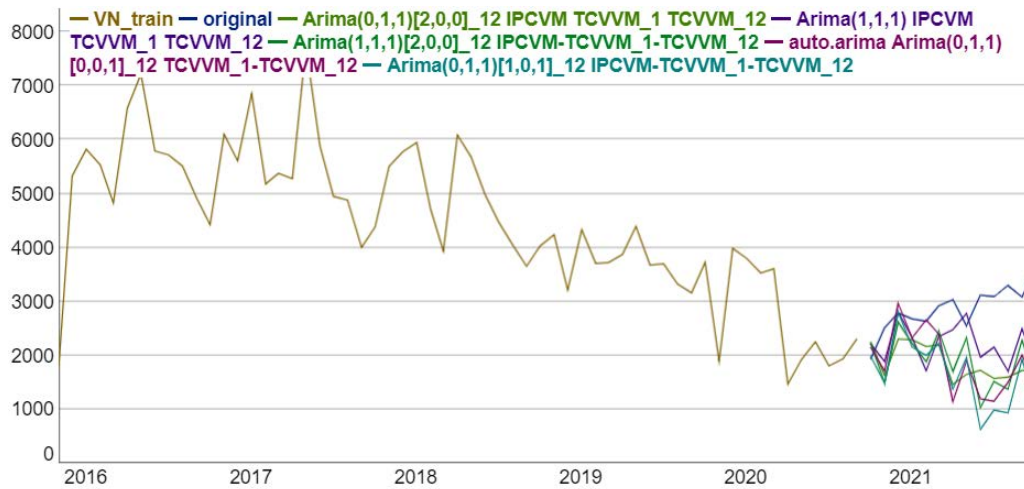


Figura 4.9: Comparativo sobre datos de control de modelos candidatos.

El procedimiento implica observar cuál es el modelo que en el ámbito predictivo logra captar tanto la intuición del usuario como el menor error observado. En este caso, se puede observar que la mayoría de candidatos tiende a la baja, esto es lo esperable dado que la tendencia observada anteriormente confirma una baja al transcurrir el tiempo. No obstante, existen modelos que se acercan más a la serie original. Como es el caso del Arima(1, 1, 1) con las tres covariables o el único modelo recomendado por el auto.arima al inicio de los periodos objetivos  $\mathcal{N}_o$ .

Sin embargo, a continuación se observan los índices de error para el enfoque



predictivo y podemos observar aquí los modelos con los mejores rendimientos son el Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0]<sub>12</sub> con las tres covariables y el Arima(1, 1, 1) con las tres covariables.

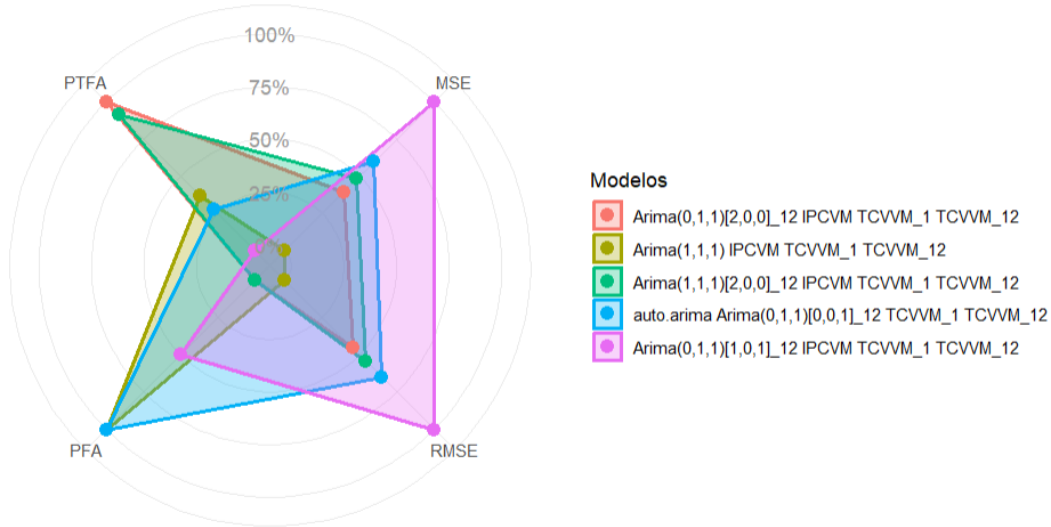


Figura 4.10: Comparativo de errores para el enfoque predictivo en modelos candidatos.

Si bien, el Arima(1, 1, 1) con las tres covariables es el modelo con los menores RMSE y MSE, se busca que el modelo logre un aumento futuro de los valores. Esto es así dado que se espera un crecimiento para periodos después del periodo pandémico (año 2021) como se observará en los datos sobre  $\mathcal{N}_e$ . Esto se logra con un alto PTFA o PFA por lo que finalmente, se elige el Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0]<sub>12</sub> con las tres covariables como modelo idóneo dado que además de obtener el mejor PTFA es el modelo con el menor AIC.

Modelo	IPCVM	TCVVM <sub>1</sub>	TCVVM <sub>12</sub>	MSE	RMSE	PFA	PTFA
Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	X	X	X	1380838.09	1175.09	0.08	0.17
Arima(1, 1, 1)	X	X	X	815649.30	903.13	0.23	0.07
Arima(1, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	X	X	X	1509604.60	1228.66	0.08	0.15
Arima(0, 1, 1)[0, 0, 1] <sub>12</sub>		X	X	1671997.06	1293.06	0.23	0.06
Arima(0, 1, 1)[1, 0, 1] <sub>12</sub>	X	X	X	2251936.00	1500.65	0.15	0.02

Cuadro 4.4: Los cinco mejores modelos según la aplicación del AIC. La  $X$  implica utilizar la covariable.

#### 4.2.5. RENDIMIENTO DEL MODELO SELECCIONADO

Ahora visualizaremos, como último paso, el rendimiento sobre los datos en  $\mathcal{N}_e$ , del modelo idóneo. Para esto se ajustan los coeficientes en

Modelo	IPCVM	TCVVM <sub>1</sub>	TCVVM <sub>12</sub>	MSE	RMSE	PFA	PTFA
Arima(0, 1, 1)[2, 0, 0] <sub>12</sub>	X	X	X	1665239.75	1290.44	0.50	0.38

Cuadro 4.5: Errores predictivos del modelo idóneo sobre  $\mathcal{N}_e$ .

Una característica importante sobre los errores predictivos cuando se evalúa una serie para la cual se está interesado en un dato agregado, como lo es en este caso al sumar la serie por periodo de cobro (pasando de  $Z_t$  a  $S_n$ ), es que resulta conveniente un PFA cercano al 50%. Esto es debido a que el modelo no pretende una predicción exacta sobre conjuntos de control y, por lo tanto, esto podría significar un sobreajuste que no necesariamente mejore el rendimiento en el futuro. Lo que se espera es que sea cercano a un comportamiento esperado, como sucede en este caso particular. El PFA garantiza que en el momento de agregar las sobre-estimaciones se acerquen a las sub-estimaciones y así el valor agregado no se aleje mucho del dato real, lo cual evita un posible sobreajuste del modelo. Esto se confirma en la figura 4.11.

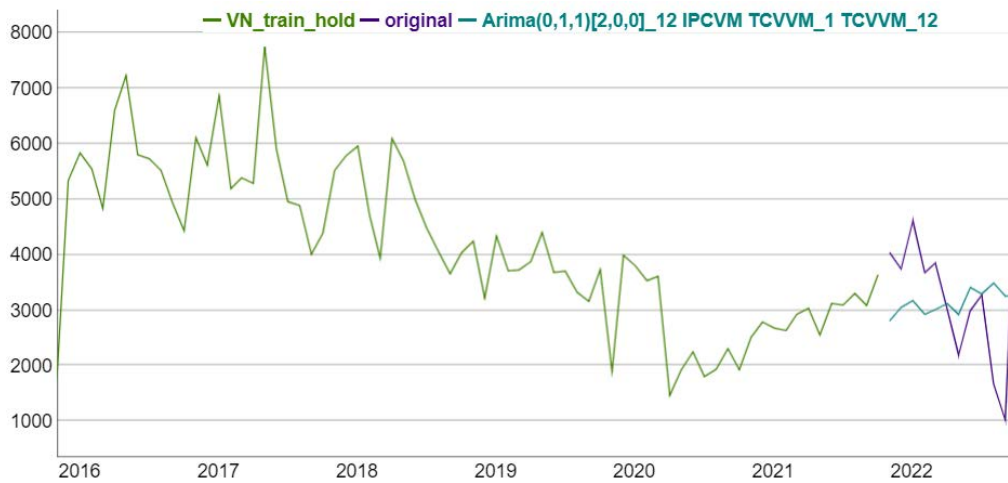


Figura 4.11: Comparativo de la proyección y observación del modelo idóneo para la serie de vehículos nuevos.

#### 4.2.6. PROYECCIÓN DEFINITIVA

De este modo, y una vez elegido el modelo idóneo, se observa su proyección utilizando el histórico completo  $\mathcal{N}$  y se proyecta hasta el mes de octubre 2025.

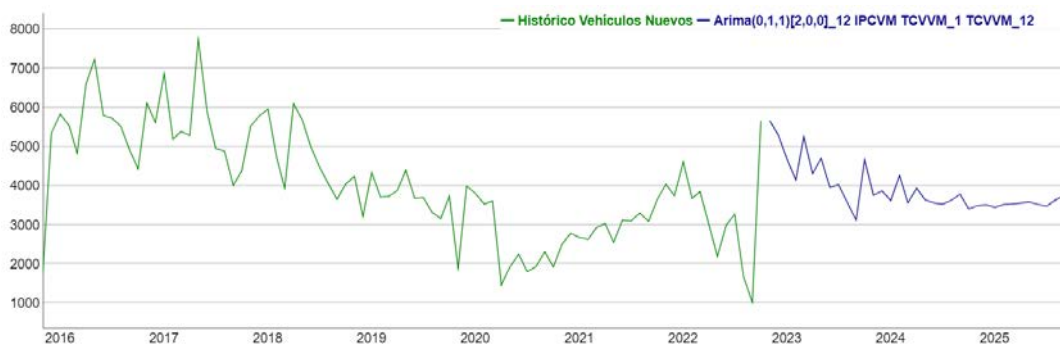


Figura 4.12: Proyección de vehículos nuevos definitiva.

Para confirmar que el modelo elegido se ha ajustado correctamente ante la incorporación del histórico completo, se pueden observar los residuos, dado que

se desea que estos no se encuentren significativamente correlacionados.

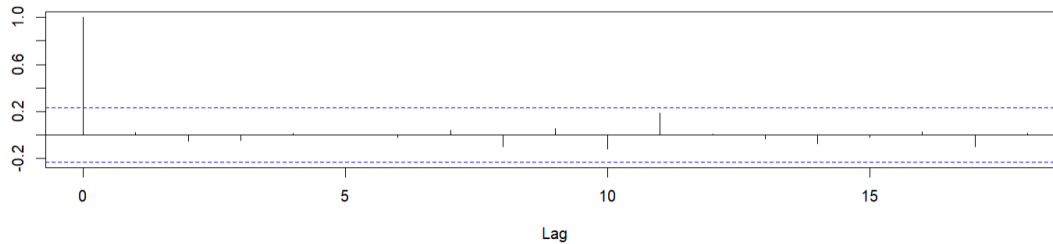


Figura 4.13: ACF de los residuos para el modelo definitivo.

Con esto se confirma que efectivamente sus residuos no están correlacionados significativamente. Por otro lado, el estimador de Durbin-Watson toma un valor de 1.77 lo cual es suficientemente cercano a 2 como para caracterizar un buen ajuste del modelo<sup>1</sup>. Finalmente, en el siguiente cuadro se observa la proyección por periodo de cobro, donde se puede comprobar cómo se eleva la cantidad de vehículos nuevos para el 2023 para luego disminuir en el 2024.

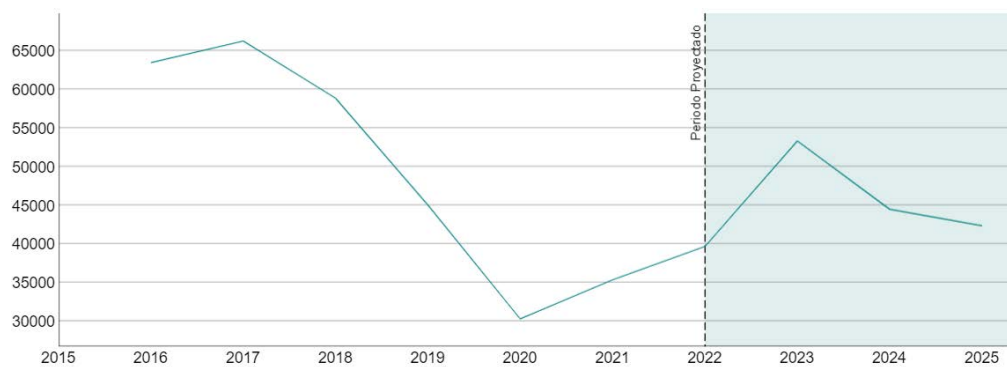


Figura 4.14: Proyección anual de vehículos nuevos.

<sup>1</sup>Si se desea comprender más sobre el estimador de Durbin-Watson se recomienda consultar [Durbin and Watson, 1951] o el Apéndice B

### 4.3. IMPLEMENTACIÓN DE LA CADENA DE MARKOV

Ahora que se ha elegido el modelo de vehículos nuevos, se procede a desarrollar el modelo de Cadena de Markov con población abierta a continuación. Como se mencionó, el procedimiento *learning/testing* consiste en abarcar los tres conjuntos de control para ajuste, objetivo y evaluación. Para este caso,  $\mathcal{M}_a$  abarca los datos desde el 2016 hasta el 2019, el  $\mathcal{M}_o$  sería el periodo 2020 y el histórico de evaluación lo conforman los periodos 2021 y 2022.

Por otro lado, si bien el modelo proyecta la cantidad de vehículos sobre todos los posibles estados, se comentará específicamente el caso del estado de pago (0 periodos atrasados), 1 periodo atrasado y 2 periodos atrasados. En total se observan 38 estados en el conjunto  $\mathcal{M}_a$ . Solo se comentará sobre los estados 0, 1 y 2 debido a su tamaño y relevancia sobre la dinámica de pago. Al aplicar el modelo sobre el conjunto de control y optimizar la función objetivo (3.5) obtenemos el valor  $\hat{\gamma} = 2,1187$  lo que sugiere que el modelo tomará los periodos futuros con mayor influencia. Además, se elige un espacio de búsqueda  $\mathcal{O} = [0, 15]$ . El espacio de búsqueda se elige de esta manera debido a que la variación de la función objetivo después de utilizar un valor tal que  $\gamma > 10$  es mínima, sugiere que a partir de ese punto solo se obtiene influencia de los puntos extremos del histórico. Esto se confirma en la figura 4.15.

La optimización se realiza con el método meta-heurístico de optimización por enjambre de partículas o PSO, denominado así por sus siglas en inglés. Si se desea conocer más información sobre el método, consulte [Bonyadi and Michalewicz, 2017] o el apéndice A, donde se hace una descripción detallada del método. La

razón por la cual utilizar PSO en este trabajo se discutirá en la sección 5.1. Ahora que se ha encontrado el valor de  $\hat{\gamma}$ , basta con calcular lo definido en 2.3, dentro del conjunto de control  $\mathcal{M}_a$  y compararlo en  $\mathcal{M}_o$ .

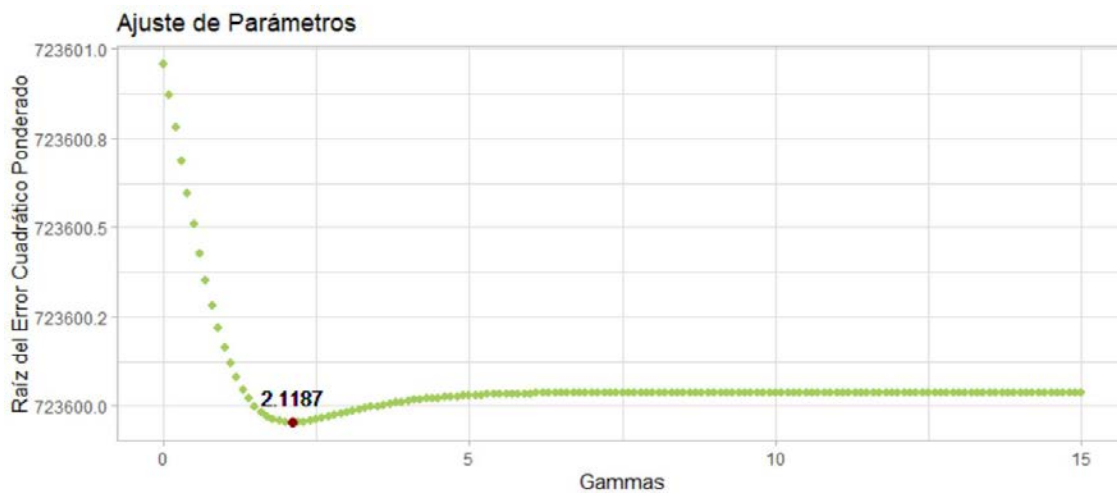
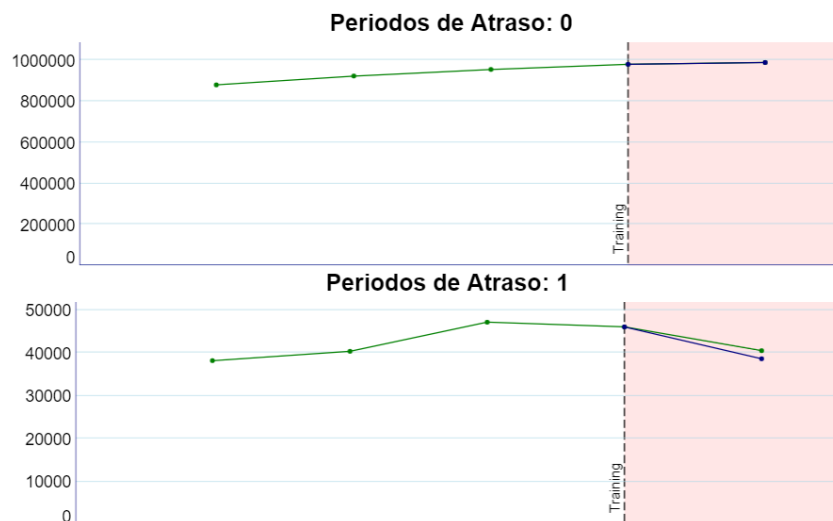


Figura 4.15: Nótese como a partir de  $\gamma > 10$  el valor de la función objetivo se estabiliza.

A continuación se pueden visualizar los valores de los estados 0, 1 y 2 dentro del conjunto de datos  $\mathcal{M}_o$ .



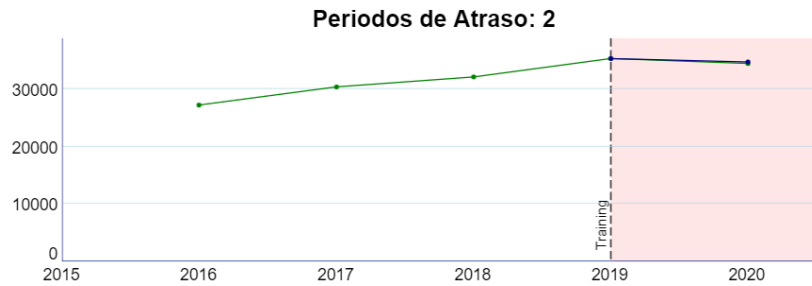


Figura 4.16: Proyección de estados 0, 1, 2 sobre datos de reajuste con  $\alpha$  óptimo.

De acuerdo con lo descrito en [Pedersen, 2010], se utilizó el PSO con 10 partículas, con coeficiente de velocidad  $\omega = 0,3925$ , una constante de búsqueda global *c.g* de 1,3358 y local *c.p* de 2,5586.

Para estos casos se obtienen como índices de error un  $MSEP = 335,4901$  y un  $MEA = 1887,94$ . El error máximo absoluto se encuentra en el estado de 1 periodo atrasado. Si bien se observa un excelente ajuste, esto no se debe tomar como un criterio de predictibilidad debido a que justamente estamos encontrando el valor  $\hat{\gamma}$  que disminuya esta brecha en el conjunto de datos  $\mathcal{M}_o$ . Se espera que los errores sean mínimos y su visualización solo nos garantiza que el procedimiento se ha aplicado correctamente.

### 4.3.1. ENFOQUE PREDICTIVO

Ahora que se conocen los parámetros a utilizar, se evaluará la predictibilidad del modelo. Al ejecutar el modelo sobre el conjunto  $\mathcal{M}_a \cup \mathcal{M}_o$  y calcular los errores sobre el conjunto de control  $\mathcal{M}_e$  obtenemos los siguientes resultados.



Figura 4.17: Proyección sobre datos de control de los estados 0, 1 y 2 de la Cadena de Markov.

Aquí se evidencia la capacidad predictiva del modelo. Resulta notable que para el estado de pago con 0 periodos de atrasados en el 2021 la desviación es bastante pequeña, exactamente de 15 093,980 vehículos. En el año 2022 la diferencia corresponde a 57 934,914 vehículos. No obstante, se debe tomar en cuenta



que en el año 2021 el Ministerio de Hacienda realizó una amnistía del marchamo que aumentó el pago. Para este caso la amnistía no afectó directamente el monto adeudado del SOA pero disminuyó el volumen del pago para el paquete fiscal.

En este caso el Instituto Nacional de Seguros no cuenta con datos o registros que cuantifiquen el efecto, solo se conoce su realización y se observó un leve aumento sobre el pago. Esto es diferente con respecto al 2022, en donde el gobierno realizó una condonación de la deuda para el pago. En este caso el SOA sí registró durante un lapso determinado la cantidad de vehículos que entraron en esta categoría. Este efecto es desconocido para el modelo y es por esto que en el estado de pagados se obtiene una diferencia mayor. Se observan 45 242 vehículos, estos son vehículos que al pagar la condonación realizaron una transición irregular de algún estado con altos periodos de atraso. Esta transición es irregular y no debería ser tomada en cuenta para la estimación de la probabilidad de transición al utilizar el conjunto histórico completo  $\mathcal{M}$ . Al restar la diferencia de lo proyectado con lo observado en el 2022 y el total de vehículos condonados se obtiene un error de aproximadamente 12 692,91 vehículos. Por lo que el ajuste termina siendo ideal. Ambos efectos, en el 2022 y 2021, afectan de manera distinta los estados de los conjuntos de atraso restantes y por eso se observan desviaciones importantes.

Cabe recalcar que el efecto de minimizar el error ponderado en la función objetivo sí garantizó una disminución más severa del error para el estado de pago, el cual influye de manera directa sobre las primas de riesgo del SOA. Por otro lado, obtenemos para el conjunto  $\mathcal{M}_e$  un  $MEA = 5\,7934,91$  y un  $MSEP = 7\,500,30$ . Finalmente, se presentan las proyecciones para periodos futuros. Aquí se observa la esperanza calculada a partir del último periodo observado. La sombra

en azul corresponde al margen generado por las esperanzas condicionales derivadas de la simulación. Cabe recalcar que la sombra disminuye su ancho conforme se aumentan los periodos de atraso. Esto sugiere que la varianza disminuye conforme aumenta el periodo de atraso.

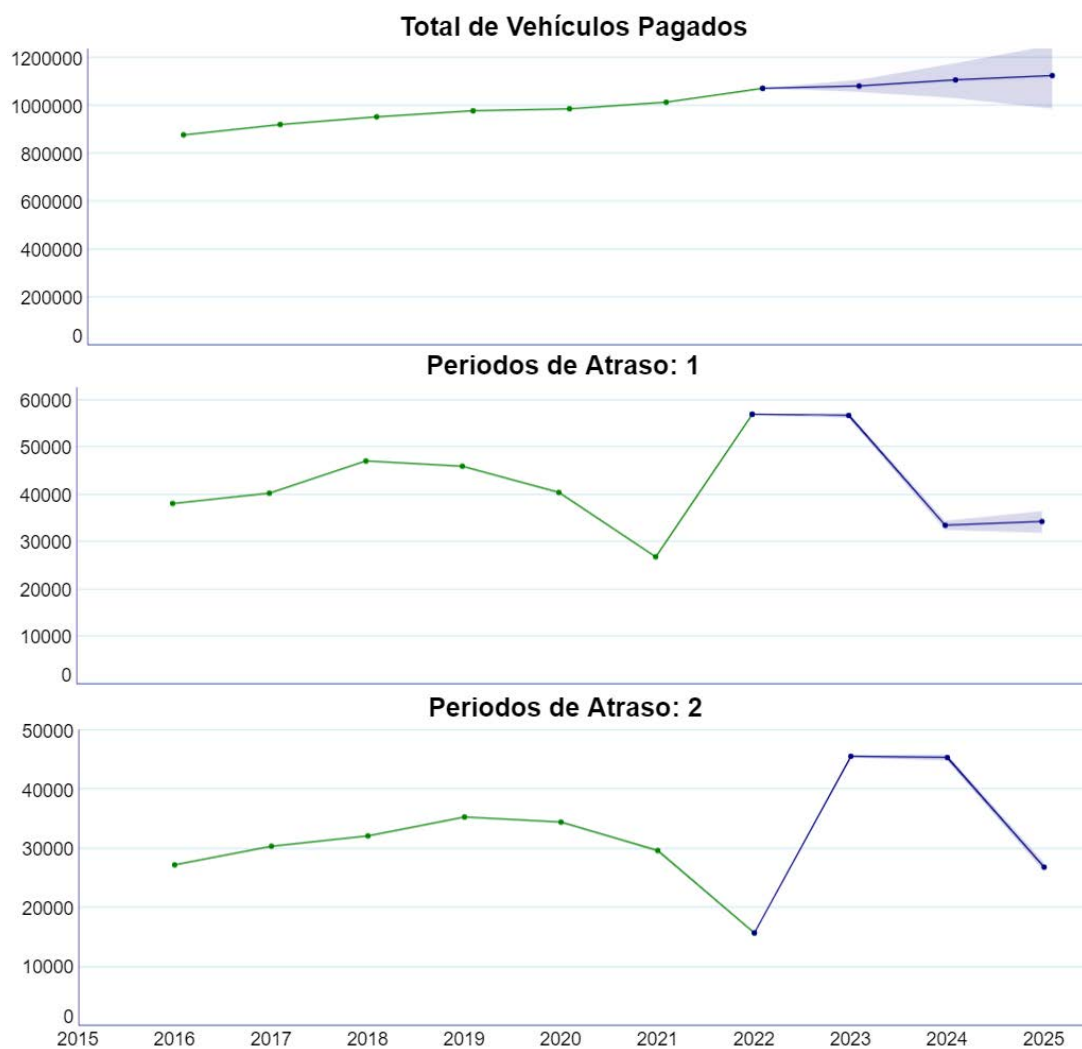


Figura 4.18: Proyección sobre datos de control de los estados 0, 1 y 2 de la Cadena de Markov.

Si bien en los gráficos anteriores se observan solo los estados 0, 1 y 2, en el

siguiente cuadro se pueden observar la esperanza y medidas de riesgo elegidas para este trabajo. Consistentemente, la esperanza se mantiene como un valor en medio de las medidas de riesgo, y más aún, se puede notar el nivel del riesgo de acuerdo con la distancia entre ambas medidas, debido a que obtenemos el valor en riesgo condicional para ambas colas con una significancia de  $\alpha = 99,99\%$ .

Estado	CVaR $_{\beta}$	Esperanza	CVaR $_{\alpha}$
0	1 060 041,99	1 084 956,96	1 110 940,50
1	56 227,33	56 779,16	57 293,45
2	45 433,15	45 678,28	45 922,95
3	14 853,05	14 929,06	14 998,00
4	19 565,70	19 611,61	19 653,00
5	24 143,76	24 179,21	24 210,91
6	25 968,24	25 993,59	26 016,88
7	24 292,17	24 310,98	24 328,62
8	24 216,47	24 230,41	24 244,15
9	22 420,93	22 437,02	22 452,05
10	20 384,19	20 398,78	20 409,89
11	15 287,84	15 298,09	15 306,64
12	14 097,97	14 107,83	14 115,56
13	10 570,38	10 584,13	10 595,07
14	11 045,97	11 055,25	11 062,41
15	12 976,36	12 984,26	12 990,29
16	13 645,55	13 654,08	13 660,36
17	11 317,84	11 326,79	11 333,39
18	17 255,04	17 269,34	17 282,00
19	8 040,44	8 047,52	8 053,19
20	16 319,30	16 326,49	16 332,10

Cuadro 4.6: Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el periodo de cobro 2023.

Esto intuitivamente brinda una idea sobre la volatilidad en las posibilidades según el modelo, y como es de esperarse, es en el caso del estado con cero periodos de atraso en donde se observa una mayor distancia entre las medidas de riesgo. Si

se desea observar los resultados para los periodos 2024 y 2025, consultar el anexo 6.1. Aquí solo se presenta hasta el estado 20; no obstante, se observan vehículos hasta el estado 39 en el 2023.

#### 4.3.2. CANTIDAD DE SIMULACIONES

Como se describió en 3.4, la cantidad de simulaciones se define de manera que se satisfaga parcialmente la ley de grandes números, esto quiere decir que la diferencia entre el promedio observado y la esperanza sea aceptablemente pequeña. Esto se realizó utilizando dos puntos de referencia: los vehículos nuevos, mediante la utilización de los valores de  $S_n$  y los vehículos esperados del estado 0. Se escogen estos en particular ya que para efectos del SOA constituyen los valores con mayor interés y resultan ser para los cuales las medidas de riesgo serán estudiadas con mayor prioridad.

En el caso de la convergencia de la serie de vehículos nuevos se utiliza el promedio por periodo proyectado de la diferencia porcentual entre el promedio y la esperanza, esta función se define de la siguiente manera:

$$Cnv_1(W) = \frac{\frac{\sum_{w=1}^W S_{1,w} - \mathbb{E}[S_1]}{W} + \frac{\sum_{w=1}^W S_{2,w} - \mathbb{E}[S_2]}{W} + \frac{\sum_{w=1}^W S_{3,w} - \mathbb{E}[S_3]}{W}}{3}$$

Resulta notable que la función es el promedio de tres diferencias porcentuales dado que se proyectan los periodos 2023, 2024 y 2025, ( $n = 3$ ). La función  $Cnv_1(W)$  se observa hasta el valor máximo donde  $W = 2000$ . Por lo que se utilizan dos mil simulaciones.

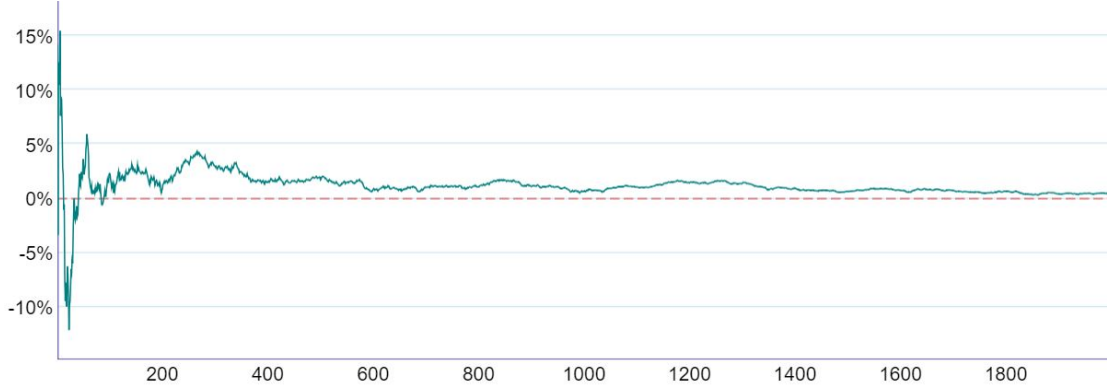


Figura 4.19: Convergencia entre el promedio y la esperanza para simulación de vehículos nuevos.

Se nota que aquí  $Cnv_1(2000) = 0,6\%$  lo que quiere decir que la diferencia porcentual promedio de los periodos es de  $0,6\%$  lo cual califica como una diferencia aceptable para satisfacer parcialmente la convergencia.

Similarmente, para observar la convergencia de la simulación dentro del estado de pagados (estado 0), tenemos la siguiente función de convergencia:

$$Cnv_2(W) = \frac{\frac{\sum_{w=1}^W V_{0,w}^1 - \mathbb{E}[V_0^1]}{W}}{\mathbb{E}[V_0^1]} + \frac{\frac{\sum_{w=1}^W V_{0,w}^2 - \mathbb{E}[V_0^2]}{W}}{\mathbb{E}[V_0^2]} + \frac{\frac{\sum_{w=1}^W V_{0,w}^3 - \mathbb{E}[V_0^3]}{W}}{\mathbb{E}[V_0^3]}.$$

Para este caso tenemos que  $Cnv(2000) = 0,047\%$  lo que nos garantiza que se cumpla parcialmente la ley de grandes números, como se muestra en la siguiente gráfica.

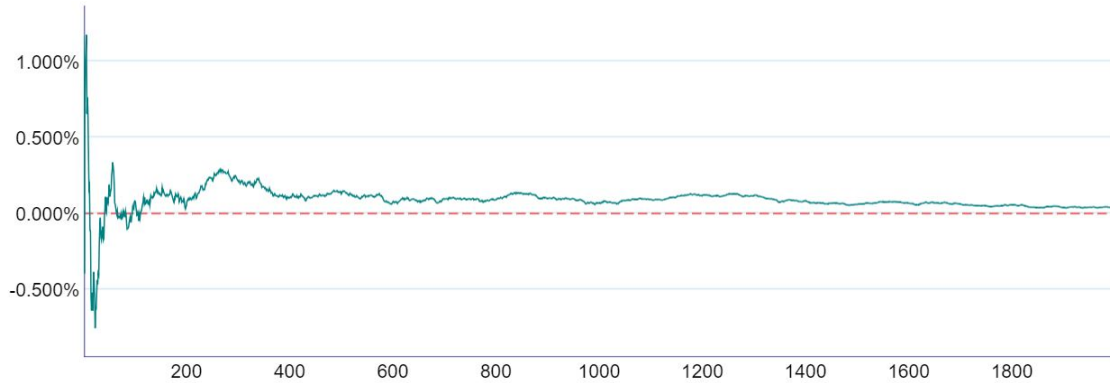


Figura 4.20: Convergencia entre el promedio y la esperanza para simulación de vehículos pagados.

Ahora que se tiene la cantidad de simulaciones aceptable  $W = 2000$ , se procede a calcular el valor en riesgo condicional con las realizaciones generadas. Para esto basta, para cualquier estado proyectado, ordenar en una lista de los posibles valores según la simulación de menor a mayor y se realiza el promedio de los valores mayores o iguales al elemento 1980 de la lista. Esto para encontrar el valor condicional de la cola derecha y, luego, al realizar el promedio de los valores menores o iguales al elemento 20 de la lista. De este modo se obtiene el valor en riesgo condicional de la cola izquierda. El ejercicio consiste en obtener los 20 elementos más extremos de la simulación, dado que son los elementos superiores o iguales al percentil de la significancia  $\alpha = 99,99\%$ .

Por otro lado, no porque el promedio se acerque a la esperanza se obtendrá una convergencia del CVaR. En este trabajo interesa específicamente en el CVaR de la cola izquierda de la cantidad de vehículos que pagan, o sea, se encuentran en el estado con cero periodos de atraso. La convergencia del CVaR se visualiza en la siguiente figura donde se procede a calcular el promedio por periodo de los

CVaRs conforme se aumenta la cantidad de simulaciones.

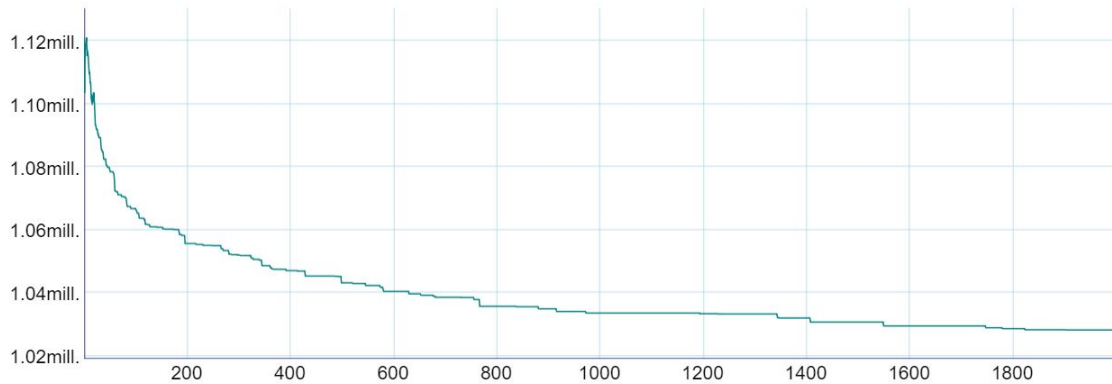


Figura 4.21: Convergencia del CVaR de la cola izquierda para el estado con cero periodos de atraso.

### 4.3.3. PERIODO DE CONDONACIÓN 2022

Como se mencionó anteriormente, el Instituto Nacional de Seguros no tiene datos correspondientes al periodo de amnistía del año 2021 pero sí sobre la condonación del año 2022. Para poder incorporar este sobre el modelo se deben tomar en cuenta dos situaciones: una retrospectiva y otra prospectiva. La retrospectiva influye el manejo del dato con la transición extrema que sucedió por la condonación. En otras palabras, la transición de cada uno de estos vehículos no debió suceder bajo circunstancias normales y es por eso que tales placas se excluyeron de la estimación de la probabilidad de transición para el periodo 2021-2022.

Desde el punto de vista prospectivo, se considera que el conjunto de vehículos que aprovecharon el periodo de condonación tendrá una morosidad distinta a lo normalmente acostumbrado. Para esto, a este conjunto de vehículos se les fijó la probabilidad observada de pago con lo obtenido hasta abril del año 2023. Esto

quiere decir que se fija el pago de estos vehículos hasta el mes de abril y se asume que del conjunto de vehículos condonados no tendrán pagos adicionales durante el resto del periodo de cobro. Esta es una medida conservadora y simultáneamente realista. Por un lado, se debe tomar en cuenta que asumir que no pagarán más vehículos del conjunto a partir de abril de 2023 es un supuesto realista si se conoce el hecho de que más del 85 % de los vehículos pagan en los primeros 4 meses del año. Esto es con el fin de tener el derecho de circulación la mayor cantidad de tiempo durante el año. Y se considera conservador dado que en caso de fallar solo se garantizará un mayor pago de vehículos lo que aumentará el ingreso por prima, lo cual mantendría la estabilidad financiera del seguro.





## 5 — CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Como se observó en las secciones anteriores, se ha logrado diseñar un modelo de cadena de Markov con población abierta que permite proyectar la cantidad de vehículos pagados para periodos futuros dentro del Seguro Obligatorio Automotor. Los resultados son consistentes, pues se logra caracterizar el riesgo sobre el impago del seguro a la vez que se permite al usuario comprender con mejor medida los escenarios posibles. En particular, la simulación permite al usuario agregar mejores herramientas analíticas a los estudios actuariales del fondo; una posibilidad, como se mencionó anteriormente, es simular un futuro estado de resultados que permita visualizar que sucede con la utilidad de la línea y verificar si la cantidad de prima resulta ser suficiente en casos de escasez de pago dentro del sistema de reparto.

Por otro lado, se debe tomar en cuenta que la estrategia de utilizar el método de *learning/testing* o los llamados grupos de control, mejora el ajuste y verifica que efectivamente se está utilizando un modelo robusto de acuerdo con el conjunto de posibilidades sugerido por las herramientas estadísticas aplicadas. Estas

estrategias de ajuste van de la mano con la dinámica de pago y generan una mayor confiabilidad a la hora de aplicar el modelo.

El ingreso de nuevas poblaciones logra captar la relación macroeconómica con la demanda de vehículos. Es importante recalcar que, si bien el modelo brinda márgenes de ajuste en conjunto con los datos de control, en la literatura se utilizan muchas técnicas y modelos distintos por lo que en el caso de los vehículos nuevos se podría agrandar la batería de modelos para incluir modelos como, redes neuronales, máquina de soporte vectorial, entre otros.

## 5.1. LIMITACIONES

Una de las limitaciones más evidentes es el manejo de las covariables. En muchas instituciones financieras, se asigna a una división de profesionales el trabajo de implementar modelos predictivos específicamente para proyectar variables macroeconómicas. En el caso del Instituto Nacional de Seguros, esta información no se encontraba a mano. Dado que no era un objetivo implementar un modelo específico para la inflación o el tipo de cambio, se utilizó un valor fijo, lo cual es altamente improbable para variables macroeconómicas. Si bien no es un supuesto ilógico para la inflación, dado que en Costa Rica el Banco Central mantiene una política de inflación fija, sí lo es para el tipo de cambio en tanto el régimen cambiario es de flotación administrada actualmente. Esto influencia negativamente la calidad de la proyección y ocasiona una subestimación de los indicadores de riesgo al disminuir la varianza de las proyecciones. Adicionalmente, se utiliza el supuesto de normalidad sobre las series de covariables que no necesariamente se cumplen

en la realidad; la existencia de colas gruesas, por ejemplo, podría aumentar los estimados de riesgo. Por lo anterior se debe considerar que las covariables funcionan únicamente como insumo adjunto dentro del modelo, y en caso de ser aplicado, se espera un modelo robusto y fundamentado para la proyección de las covariables a utilizar.

Como herramienta adicional se agregó el apéndice C donde se trabaja la inferencia sobre una cadena de Markov. Al inicio del documento se supuso la homogeneidad de la probabilidad de transición y la propiedad de pérdida de memoria como bases para proponer el modelo presentado. En el apéndice C se describe la aplicación de pruebas de hipótesis para estas propiedades y se presentan los resultados sobre los datos. En particular, se rechazaron ambas pruebas de hipótesis lo que conlleva a dudar sobre la aplicación de estos supuestos. No obstante, se debe tomar en cuenta que la prueba de hipótesis sobre la propiedad de pérdida de memoria utiliza intrínsecamente el supuesto de homogeneidad sobre la probabilidad de transición. Esto resulta significativo pues resulta posible que la hipótesis nula no se rechace si se aplica una probabilidad de transición no-homogénea. La aplicación de una cadena de Markov no-homogénea o la ampliación del espacio de estados se delega a una posible futura publicación y se recomienda valorar estas posibilidades dentro del esquema del Seguro Obligatorio Automotor.

Otra limitación observada es que el trabajo no abarca un margen comparativo entre el modelo predictivo actualmente utilizado por el Instituto Nacional de Seguros y el propuesto. Esto se debe esencialmente a la reglamentación dirigida por la Superintendencia (SUGESE) y las políticas internas del Instituto sobre la publicación de metodologías de tarificación en producción.

Si bien el Instituto cuenta con una base de datos robusta para la aplicación de este modelo, se espera todavía obtener mejores resultados cuando se acumule una mayor cantidad de transiciones. En particular se recomienda utilizar el modelo con un mínimo de 10 años de historia. Esto con el fin de que los datos de control tengan un mejor margen para la caracterización de la capacidad predictiva del modelo y así mantener una buena estimación de la probabilidad de transición.

Adicionalmente, la ejecución de la optimización es un posible punto de crítica ya que se utiliza PSO como optimizador de la función objetivo. Si bien la función objetivo es una función complicada en su diseño, se encuentra definida en  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo que no es un caso donde usualmente se utilizaría el método PSO. Este método, en la práctica, se utiliza para casos con espacios de búsqueda amplios y multidimensionales. Se utiliza PSO para garantizar que la optimización siga funcionando a pesar del eventual aumento de los datos históricos y dada la posibilidad de encontrar múltiples óptimos locales, además de ser utilizado particularmente como un ejercicio académico dentro de este trabajo.

Finalmente, se concluye que el modelo logra satisfacer los objetivos con posibles productos que otros modelos no lograrían proyectar en congruencia con su dinámica estocástica.



## 6 — ANEXOS

### 6.1. RESULTADOS DE PROYECCIÓN

Estado	CVaR $_{\beta}$	Esperanza	CVaR $_{\alpha}$
0	1 034 970,43	1 110 433,35	1 180 360,76
1	32 646,30	33 599,29	34 528,90
2	44 946,81	45 471,79	45 949,25
3	42 986,75	43 239,73	43 511,70
4	14 609,76	14 697,20	14 777,18
5	19 423,33	19 478,06	19 531,73
6	24 053,78	24 095,40	24 134,30
7	25 914,86	25 946,60	25 974,81
8	24 255,13	24 279,32	24 300,58
9	24 163,78	24 187,31	24 210,17
10	22 390,38	22 411,51	22 430,29
11	20 362,95	20 381,58	20 396,96
12	15 271,65	15 284,91	15 298,00
13	14 060,25	14 077,40	14 093,71
14	10 555,70	10 571,93	10 586,22
15	11 036,92	11 048,67	11 058,70
16	12 964,96	12 975,79	12 984,89
17	13 630,68	13 642,98	13 653,55
18	11 292,26	11 306,71	11 319,22
19	17 238,38	17 255,45	17 271,58
20	8 034,73	8 044,31	8 051,38

Cuadro 6.1: Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el periodo de cobro 2024.

Estado	CVaR $_{\beta}$	Esperanza	CVaR $_{\alpha}$
0	990 066,88	1 128 781,60	1 256 327,28
1	32 026,35	34 388,25	36 566,65
2	26 124,25	26 908,11	27 688,95
3	42 537,00	43 044,26	43 514,25
4	42 314,00	42 568,18	42 842,85
5	14 507,24	14 597,11	14 677,95
6	19 352,04	19 410,54	19 469,45
7	24 006,70	24 051,85	24 095,35
8	25 878,20	25 912,82	25 945,88
9	24 206,56	24 236,13	24 263,21
10	24 131,33	24 159,81	24 186,14
11	22 368,40	22 392,61	22 414,63
12	20 342,00	20 364,02	20 382,96
13	15 231,50	15 251,94	15 269,39
14	14 040,30	14 061,19	14 080,41
15	10 547,86	10 565,64	10 581,87
16	11 027,00	11 041,45	11 053,38
17	12 951,17	12 965,24	12 977,00
18	13 601,55	13 618,80	13 634,43
19	11 282,53	11 297,62	11 311,27
20	17 230,82	17 248,57	17 266,48

Cuadro 6.2: Esperanza y medidas de riesgo proyectados para el periodo de cobro 2025.





# A — OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS

La optimización por enjambre de partículas (PSO por sus siglas en inglés) es un método computacional que intenta optimizar una función por medio de la mejora iterativa de una posible solución, con respecto a parámetros de calidad definidos. El conjunto candidato a ser solución se llama conjunto de *partículas*, y el espacio en donde este se mejora se denomina *espacio de búsqueda*. Al inicio de cada iteración, cada partícula tiene asignada una *posición* y una *velocidad*, las cuales cambiarán en función de la mejor posición histórica individual, y mejor posición histórica global, las cuales a su vez se actualizan al final de cada iteración. En palabras simples, las partículas se “comunican”, para encontrar el mínimo de la función en cuestión. El método de PSO fue propuesto en 1995 por Kennedy y Eberhart en [Eberhart and Kennedy, 1995] con el propósito de estudiar poblaciones de animales en movimiento, como bancos de peces. En 1998, se presentó una mejora al método en [Shi and Eberhart, 1998] la cual se toma en cuenta aspectos de inercia de las partículas. Según [Eberhart and Kennedy, 1995], este método es relativamente rápido a nivel computacional, en términos de memoria

utilizada y velocidad. Las primeras aplicaciones del método fueron empíricas, y se demostró experimentalmente su buen funcionamiento en pruebas de algoritmos genéticos, las cuales buscan optimizar una función iteradamente por medio de selección de propiedades deseables en un conjunto de partículas. En [Trelea, 2002], Trelea ofrece un primer análisis general de la convergencia del método de PSO, además de estudiar el efecto de distintas selecciones de parámetros. En este trabajo, se concluye que la convergencia del método sobre funciones suaves, depende directamente del número inicial de partículas y de la cantidad de mínimos locales de la función. Además, se presentó evidencia de que la geometría y topología de la superficie en cuestión afectan los resultados. Recientemente, en 2017, Reza y Michalewicz, presentan en [Bonyadi and Michalewicz, 2017] un análisis exhaustivo del método, en el cual se realizó un estudio a fondo de la convergencia y estabilidad del método y sus variantes, en donde se caracterizaron las ventajas y desventajas del método, por medio de técnicas de topología y cálculo estocástico.

## A.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Esta sección fue adaptada de [Clerc, 2006]. Se cuenta con un *espacio de búsqueda*, el cual es un conjunto acotado. En cada punto de este espacio, se puede evaluar una función, la cual se buscará optimizar un mínimo. Este punto se llamará el *óptimo global* de la función. Para optimizar la función, el algoritmo PSO define un conjunto de *partículas*, las cuales se mueven en cada iteración. Una partícula consiste de

1. Una posición dentro del espacio de búsqueda

2. El valor de la función en este punto
3. Una velocidad, la cual se usa para determinar la siguiente posición
4. Una memoria, la cual contiene la mejor posición (llamada *óptimo histórico*) que ha encontrado la partícula. Esto es, el punto en donde el valor de la función ha sido mínimo.
5. El mejor valor de la función histórico de esta partícula

El conjunto de todas las partículas se llama el *enjambre*. Dentro del enjambre, se define una *topología* (en el sentido de redes), esto es, un conjunto de vínculos que definen “quién se comunica con quién”. Esto significará que una partícula conoce la memoria de todas las partículas vinculadas a ella por medio de la topología. El conjunto de estas partículas informantes se llama su *vecindario*. En algunas variantes del algoritmo, los vecindarios no son simétricos (solo hay información en un sentido), ni reflexivos (las partículas no se informan a sí mismas). La optimización en sí consiste en dos fases: inicialización del enjambre, y un ciclo de iteraciones.

**Inicialización del enjambre:** Para cada partícula:

- Seleccione una posición al azar dentro del espacio de búsqueda. Evalúe la función en cada posición. Asigne este valor como el *óptimo histórico* (pues no hay otro qué escoger).
- Seleccione una velocidad aleatoria. Nótese que esta velocidad también incluye una dirección de movimiento.

## Iteración

- Se computa la nueva velocidad, combinando los siguientes elementos:
  - Posición actual
  - Velocidad actual
  - Óptima posición histórica
  - Óptima posición histórica del vecindario
- Se mueve la partícula, aplicando esta nueva velocidad a la posición actual.
- (Opcional) Se aplica una verificación de confinamiento. Esto es, se verifica que la posición nueva está dentro del espacio de búsqueda. La omisión de este paso se denomina coloquialmente, como el método “déjelos volar”. En caso de que la posición quede afuera, se revierte la acción de mover.
- Se evalúa la función en la nueva posición.
- Si este nuevo valor es mejor que el histórico, se actualiza dicho valor. Recuerdese que se debe actualizar tanto la posición óptima como el valor óptimo históricos.

El criterio de detención se puede definir de dos formas:

- Cuando el mínimo de la función es conocido, entonces se puede definir una tolerancia con respecto a este valor. En el momento que el valor óptimo global entre en esta tolerancia, el algoritmo se detiene.
- Simplemente se puede limitar el número máximo de iteraciones que se realizan.

## A.2. DESCRIPCIÓN FORMAL

Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave (la consideración de suavidad se utiliza porque se asumirá que la gráfica de la función es una superficie, o más específicamente, una variedad diferencial). Sea  $E$  el espacio de búsqueda,  $E = \prod_{i=1}^d [\text{mín}_i, \text{máx}_i]$ . Nótese que  $E$  es compacto, lo cual asegura la existencia de un óptimo global.

Se define a continuación,

- El número de iteración, como  $t$  (de tiempo)
- La posición de la partícula  $i$  en  $t$ , como  $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$
- La velocidad de la partícula  $i$  en  $t$ , como  $v_i(t) \in \mathbb{R}^d$
- La mejor posición histórica de la partícula  $i$ , como  $p_i(t) \in \mathbb{R}^d$
- La mejor posición histórica de todo el vecindario de la partícula  $i$ , como  $l_i(t) \in \mathbb{R}^d$

Se denota al enjambre por  $S$ , y se define una topología (la cual depende de la variación del algoritmo que se use),  $\tau(S) \subseteq S \times \mathcal{P}(S)$ , la cual asigna a cada punto de  $i$ , un subconjunto de  $S$ , el cual se llamará el vecindario de  $i$ . En nuestro caso se tomará una **topología trivial**, es decir, el vecindario de cada partícula es todo el enjambre. Una vez que se han definido todos los elementos necesarios para la implementación del algoritmo, es posible describir precisamente su funcionamiento.

### A.3. PSEUDOCÓDIGO DEL ALGORITMO

Este consiste en realizar una iteración en donde cada partícula calcula su nueva posición, se compara la posición encontrada y se actualizan las posiciones globales.

---

**Algoritmo 2** PSO

---

$x_i$ : posición

$v_i$ : velocidad

$p_i$ : peso

$mp_i$ : mejor peso individual

$mx_i$ : mejor posición individual

$gp$ : peso global

$gx$ : posición global

---

```
1: procedure INICIALIZACIÓN
2:   for  $i = 1 : n$  do
3:      $v_i \leftarrow 0$ 
4:      $mp_i, x_i \leftarrow U(0, 1)$  Distribución Uniforme
5:      $mp_i, p_i \leftarrow f(x_i)$ 
6:     if  $p_i \leq gp$  then
7:        $gp \leftarrow p_i$ 
8:        $gx \leftarrow x_i$ 
9:     end
10:  end
11: procedure ACTUALIZACIÓN
12:  while Criterio Libre do
13:    for  $i = 1 : n$  do
14:       $v_i \leftarrow \omega v_i + \varphi_1 U(0, 1)(mp_i - p_i) + \varphi_2 U(0, 1)(gp - x_i)$ 
15:       $x_i \leftarrow x_i + v_i$ 
16:       $p_i \leftarrow f(x_i)$ 
17:      if  $p_i \leq mp_i$  then
18:         $mx_i \leftarrow x_i$ 
19:         $mp_i \leftarrow p_i$ 
20:      end
21:    end
22:  end
```

---

## A.4. CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

La siguiente sección corresponde con algunos de los resultados de [Bonyadi and Michalewicz, 2017], el cual recopila datos y resultados de publicaciones relacionadas a PSO entre 2008 y 2017.

Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  la función a optimizar. El objetivo del algoritmo es

$$\text{Encontrar } x \in E \subseteq \mathbb{R}^d \text{ tal que } \forall y \in E, f(x) \leq f(y),$$

donde  $E$  es el espacio de búsqueda, que se toma como una caja<sup>1</sup> compacta de dimensión  $d$ . En cada iteración  $t$  se actualizan los valores de todas las partículas de tal forma que

$$\begin{aligned} v_i(t+1) &= \omega v_i(t) + \varphi_1 R_i(t)(p_i(t) - x_i(t)) + \varphi_2 P_i(t)(l_i(t) - x_i(t)) \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t+1) \\ p_i(t+1) &= \begin{cases} x_i(t+1), & \text{si } x_i(t+1) \text{ y } f(x_i(t+1)) < f(p_i(t)) \forall i \\ p_i(t) & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

En donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son dos números reales positivos fijos para todo el algoritmo (parámetros de operación), y  $R_i(t), P_i(t)$  son matrices diagonales  $d \times d$ , generadas aleatoriamente, con valores distribuidos uniformemente en  $[0, 1]$ . Nótese que las matrices se generan individualmente para cada partícula, en cada iteración. La

---

<sup>1</sup>En realidad cualquier conjunto compacto y convexo funciona como espacio de búsqueda gracias al conocido teorema de Weierstrass



figura A.1 ilustra gráficamente una parte de la situación.

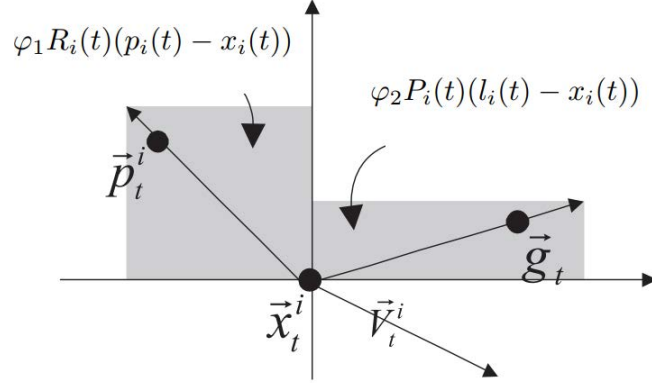


Figura A.1: Las regiones grises ilustran donde  $\varphi_1 R_i(t)(p_i(t) - x_i(t))$  y  $\varphi_2 P_i(t)(l_i(t) - x_i(t))$  se pueden encontrar (nótese que en la variante escogida,  $l = g$ , pues se trabajó con la topología trivial). Fuente: [Bonyadi and Michalewicz, 2017].

Resulta posible ver que la acción de multiplicar por  $R$  consiste en ampliar el “rango de búsqueda” de la partícula, para tener más posibilidades de encontrar un óptimo. Debido a la naturaleza estocástica del algoritmo, resulta necesario definir convergencia en una medida de probabilidad. Es decir, se dirá que el algoritmo **converge a un punto**  $X$  (en probabilidad), si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(|x(t) - X| < \varepsilon) = 1,$$

donde  $P$  es la medida de probabilidad. Es de notar que en este caso, es perfectamente posible que haya convergencia. Se ha observado que para algunas escogencias de  $\omega, \varphi_1$  y  $\varphi_2$ , producen velocidades que tienden a infinito. A este fenómeno se le llama *explosión del enjambre*, lo cual ocasiona que las partículas abandonen  $E$ . Este fenómeno no puede ser simplemente resuelto con la verificación de

confinamiento, pues esto podría provocar que un alto porcentaje de las partículas se detengan. Por lo tanto, es importante definir cotas de convergencia para los parámetros de operación. Esto es especialmente difícil para enjambres grandes, por lo que solo se conocen soluciones empíricas para enjambres de pocas partículas, o alternativamente, enjambres numerosos, pero que ignoran los factores aleatorios.



## B — MEDIDAS DE DEPENDENCIA

En muchos casos es necesario obtener una medida de dependencia sobre diferentes series de tiempo. Más aún, cuando se asume: dadas las características naturales de algunas series, una causalidad evidente entre ellas. A medida que se verifican estas implicaciones es importante utilizar herramientas descriptivas que facilitan la descripción de esta relación como posible causa y efecto. Existen diferentes medidas para caracterizar dependencia, por ejemplo, en [Nelsen, 2006] bajo el contexto de cópulas donde se desea ajustar distribuciones conjuntas a vectores aleatorios, se utiliza la  $\tau$  de Kendall o bajo circunstancias más clásicas, donde se utiliza el *Coefficiente de Correlación de Pearson*.

Cuando se trabaja con una serie de tiempo es probable que en muchas ocasiones se requiera observar si el propio pasado de la serie influye su futuro y para esto se utiliza la autocorrelación; no obstante, exploraremos en primera instancia conceptos anteriores que nos permitirán comprender con mejor medida este principio. Esta sección fue tomada de [Shumway and Stoffer, 2000].

**Definición B.1.** La función de **autocovarianza** se define como el producto del

segundo momento, esto es:

$$\gamma_x(s, t) = \text{cov}(x_s, x_t) = \mathbb{E}[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)]$$

para todo  $s$  y  $t$ . Se aclara que  $\mu_s = \mathbb{E}[x_s]$  y  $\mu_t = \mathbb{E}[x_t]$ .

La función de autocovarianza pretende medir la dependencia lineal entre dos puntos del tiempo observados de la misma serie. Por ejemplo, la función de autocovarianza de una media móvil de tres puntos  $v_t$  con ruidos blancos  $w_t$  y pesos uniformes corresponde a  $\gamma(s, t) = \text{cov}(v_s, v_t) = \text{cov}(\frac{1}{3}\{w_{s-1} + w_s + w_{s+1}\}, \frac{1}{3}\{w_{t-1} + w_t + w_{t+1}\})$ .

Si  $s = t$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma(t, t) &= \frac{1}{9} \text{cov}(\{w_{t-1} + w_t + w_{t+1}\}, \{w_{t-1} + w_t + w_{t+1}\}) \\ &= \frac{1}{9} [\text{cov}(w_{t-1}, w_{t-1}) + \text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \frac{3}{9} \sigma_w^2. \end{aligned}$$

Si  $s = t + 1$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(t + 1, t) &= \frac{1}{9} \text{cov}(\{w_t + w_{t+1} + w_{t+2}\}, \{w_{t-1} + w_t + w_{t+1}\}) \\ &= \frac{1}{9} [\text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \frac{2}{9} \sigma_w^2. \end{aligned}$$

Y en general, obtenemos:

$$\gamma(s, t) = \begin{cases} \frac{3}{9}\sigma_w^2, & \text{si } s = t \\ \frac{2}{9}\sigma_w^2, & \text{si } |s - t| = 1 \\ \frac{1}{9}\sigma_w^2, & \text{si } |s - t| = 2 \\ 0, & \text{si } |s - t| > 2 \end{cases}$$

Como en la estadística clásica, resulta más conveniente asociar la medida de dependencia a un valor entre  $-1$  y  $1$ , por lo que se procede con la siguiente definición.

**Definición B.2.** La función de **autocorrelación (ACF)** está definida como,

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(s, t)}{\sqrt{\gamma(s, s)\gamma(t, t)}}$$

Intuitivamente, el ACF mide la predictibilidad de una serie en el tiempo  $t$ , donde  $t > s$ . Es sencillo demostrar mediante la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*<sup>1</sup> que  $-1 < \rho(s, t) < 1$ .

Ahora, nótese que en el ejemplo anterior en realidad las variaciones para los posibles valores para la función de covarianza depende prácticamente solo de la diferencia entre  $s$  y  $t$ . Esto conlleva a una propiedad de las series estacionarias<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que  $|\gamma(s, t)|^2 \leq \gamma(s, s)\gamma(t, t)$

<sup>2</sup>Se recomienda consultar [Shumway and Stoffer, 2000] para obtener la definición formal de estacionariedad estricta.

**Definición B.3.** Una serie con **estacionariedad débil**  $x_t$  es un proceso de varianza finita el cual:

- tiene una esperanza constante a lo largo del tiempo  $\mathbb{E}[x_t] = \mu_t = \mu$  y
- la función de autocorrelación depende exclusivamente de la diferencia entre los tiempos, o sea,  $|s - t|$ .

Entonces la definición para función de autocovarianza puede variar para los casos con estacionariedad débil, en donde:

$$\tilde{\gamma}(h) := \gamma(t + h, t) = \text{cov}(x_{t+h}, x_t) = \mathbb{E}[(x_{t+h} - \mu)(x_t - \mu)]$$

y note que  $h = |s - t|$ . A partir de este punto no es necesario mantener que  $s < t$  dado que  $\tilde{\gamma}(h) = \tilde{\gamma}(-h)$ . De hecho solo resulta de interés en el caso donde  $h \geq 0$ .

En el ejemplo anterior, obtendríamos una función de autocorrelación de la siguiente forma:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{3}{9}, & \text{si } h = 0 \\ \frac{2}{9}, & \text{si } h = 1 \\ \frac{1}{9}, & \text{si } h = 2 \\ 0, & \text{si } h > 2 \end{cases}$$

Y es a esta función la que se llamará la función de autocorrelación simple para el caso general. Por otro lado, ya se encuentra en condiciones de calcular el ACF para un proceso un poco más útil, un MA( $q$ ). Nótese inicialmente que si  $x_t$  es un MA( $q$ ) entonces  $\mathbb{E}[x_t] = \sum_{j=0}^q \theta_j \mathbb{E}[w_{t-j}] = 0$ , donde  $\theta_0 = 1$ .

**Teorema B.4.** La función de autocorrelación simple para un proceso  $MA(q)$  es:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{si } 1 \leq h \leq q \\ 0, & \text{si } h > q \end{cases}$$

Esto es de vital importancia para la modelación ya que el ACF brinda mucha información sobre la posibilidad de que un modelo sea o incorpore un  $MA(q)$  por ejemplo:

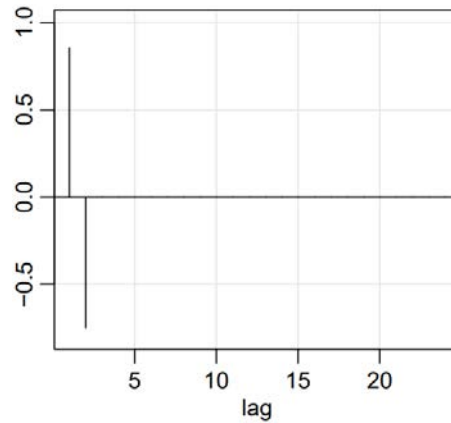


Figura B.1: Ejemplo de ACF para un  $MA(2)$ . Fuente: [Shumway and Stoffer, 2000].

Nótese que a partir de  $h > 2$  se tiene que  $\rho(h) = 0$ .

## B.1. AUTOCORRELACIÓN CRUZADA

Cuando se obtienen diferentes series, una noción de estacionariedad todavía es aplicable.

**Definición B.5.** Dos series  $x_t$  y  $y_t$  se dice que son conjuntamente estacionarias



si son estacionarias y su función de **autocovarianza cruzada** solo depende de  $h$ , esto es;

$$\gamma_{xy}(h) = cov(x_{t+h}, y_t) = \mathbb{E}[(x_{t+h} - \mu_x)(y_t - \mu_y)]$$

Del mismo modo podemos definir la función de autocorrelación cruzada.

**Definición B.6.** La función de **autocorrelación cruzada** de dos series conjuntamente estacionarias es;

$$\rho_{xy}(h) = \frac{\gamma_{xy}(h)}{\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}}$$

Es importante recalcar para este caso tenemos que no necesariamente se cumple que  $\rho_{xy}(h) = \rho_{xy}(-h)$ . De hecho, la elección del signo para  $h$  implicará en cuál serie se prevé como la independiente y cuál dependiente o cuál preside y cuál responde.

## B.2. AUTOCORRELACIÓN PARCIAL

De igual manera como sucedió en el teorema B.4, se busca encontrar una opción para el AR( $p$ ) que brinde una interpretación similar de cara a la implementación. Para motivar este concepto considere un modelo AR(1) entonces  $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$ .  
Y

$$\begin{aligned} \gamma_x(2) &= cov(x_t, x_{t-2}) = cov(\phi x_{t-1} + w_t, x_{t-2}) \\ &= cov(\phi^2 x_{t-2} + \phi x_{t-1} + w_t, x_{t-2}) = \phi^2 \gamma_x(0) \end{aligned}$$

este resultado visualiza la dependencia sobre  $x_{t-2}$  ya que  $x_{t-2}$  involucra a  $\{w_{t-2}, w_{t-3}, \dots\}$ , quienes no están correlacionados con  $w_{t-1}$  ni  $w_t$ . La correlación entre  $x_t$  y  $x_{t-2}$  no es cero como lo es en el caso de un MA(1). Esto se debe a que  $x_t$  es dependiente de  $x_{t-2}$  por medio de  $x_{t-1}$ . Suponga que logramos eliminar esta dependencia implícita quitando parcialmente  $x_{t-1}$ . Para esto se podría observar la correlación entre  $x_t - \phi x_{t-1}$  y  $x_{t-2} - \phi x_{t-1}$ . De esta manera, se eliminaría la dependencia lineal implícita y de hecho se tiene que:

$$\text{cov}(x_t - \phi x_{t-1}, x_{t-2} - \phi x_{t-1}) = \text{cov}(w_t, x_{t-2} - \phi x_{t-1}) = 0.$$

Entonces la herramienta que se posee es esta autocorrelación parcial que elimina la correlación lineal implícita entre dos puntos en el tiempo de un modelo AR( $p$ ).

**Definición B.7.** La función de **autocorrelación parcial (PACF)** de un proceso estacionario  $x_t$  denotado por  $\phi_{hh}$  para  $h = 1, 2, \dots$ , es

$$\phi_{11} = \text{corr}(x_{t+1}, x_t) = \rho(1)$$

Y

$$\phi_{hh} = \text{corr}(x_{t+h} - \hat{x}_{t+h}, x_t - \hat{x}_t)$$

con  $\hat{x}_{t+h} = \beta_1 x_{t+h-1} + \beta_2 x_{t+h-2} + \dots + \beta_{h-1} x_{t+1}$ .

Se observa que el caso general  $\hat{x}_{t+h}$  es la combinación lineal de retrasos de  $x_t$ , la misma que se utiliza en la regresión lineal clásica, la que minimiza el error cuadrático medio. Por lo que efectivamente elimina la dependencia lineal. Por otro

lado, en el caso específico de cuando se tiene un modelo  $AR(p)$ , se llega al siguiente resultado.

**Teorema B.8.** Si  $x_t$  corresponde a un modelo  $AR(p)$  y  $h > p$ , la regresión lineal de  $x_{t+h}$  sobre  $\{x_{t+1} + \dots + x_{t+h-1}\}$  es,

$$\hat{x}_{t+h} = \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t+h-j}$$

y

$$\phi_{hh} = \text{corr}(w_{t+h}, x_t - \hat{x}_t) = 0.$$

Ahora, al tomar un caso fijo como lo sería un modelo  $AR(2)$  con  $\phi_1 = 1,5$  y  $\phi_2 = -0,75$  se obtiene el siguiente ACF y PACF.

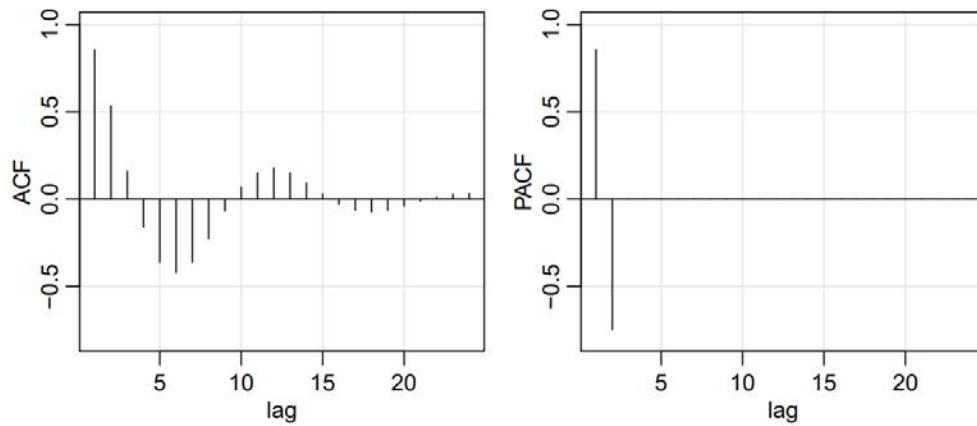


Figura B.2: Caso fijo como lo sería un modelo  $AR(2)$  con  $\phi_1 = 1,5$  y  $\phi_2 = -0,75$ . Fuente: [Shumway and Stoffer, 2000].

Entonces, concluyendo con los resultados obtenidos en B.4 y B.8 se desprende que cuando se observa un corte cuando  $h = q$  en el  $ACF$  los datos sugieren la utilización de un modelo  $MA(q)$  mientras que cuando sucede lo mismo en el PACF

cuando  $h = p$  entonces los datos sugieren la utilización de un  $AR(q)$ . De donde se obtiene el siguiente cuadro resumen.

	$AR(p)$	$MA(q)$
ACF	Disminuye sinusoidal o estrictamente	Se corta en $h = q$
PACF	Se corta en $h = p$	Disminuye sinusoidal o estrictamente

Cuadro B.1: Resumen para la interpretación del ACF y PACF.

### B.3. ESTIMADOR DE DURBIN-WATSON

Continuando con la descripción de medidas de dependencia, una medida muy utilizada en el contexto de series de tiempo es el producido por Durbin y Watson en [Durbin and Watson, 1951], denominado como *Estadístico  $d$  de Durbin-Watson* en la literatura. Esta sección fue adaptada de [Gujarati, 1995].

El estadístico  $d$  de Durbin-Watson se define como:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}$$

que es simplemente la suma de la diferencia de los residuos consecutivos al cuadrado entre la suma de los residuos al cuadrado o **RSS**. Una ventaja de este estimador es que está definido sobre los residuos estimados los cuales son rutinariamente calculados con regresiones lineales. Dada esta característica, fue por mucho tiempo fácil agregar el estadístico  $d$  a los resúmenes provenientes de programas que ejecutan regresiones lineales al igual que el  $R^2$  o el  $R^2$ -Ajustado y el estadístico  $F$ . Es importante recalcar que se asume que los residuos  $\epsilon_i$  tienen una

distribución normal.

La distribución exacta del estadístico  $d$  es difícil de determinar dado que los residuos  $\epsilon_i$  son dependientes de las variables covariables de la regresión. Por lo tanto, a diferencia de los estadísticos,  $F$  o  $\chi^2$ , no hay un punto crítico único para aceptar o no la prueba de hipótesis. Por suerte en [Durbin and Watson, 1951] se logró solucionar este problema identificando umbrales dependientes del nivel de significancia  $\alpha$  para la toma de decisiones, en el caso de autocorrelación positiva;

- Si  $d < d_{L,\alpha}$ , existe evidencia estadística de que los términos de error están autocorrelacionados positivamente
- Si  $d > d_{U,\alpha}$ , no hay evidencia estadística de que los términos de error están autocorrelacionados positivamente.
- Si  $d_{L,\alpha} < d < d_{U,\alpha}$ , la prueba no es concluyente.

Para el caso de la autocorrelación negativa se tiene que:

- Si  $4 - d_{L,\alpha} < d$ , existe evidencia estadística de que los términos de error están autocorrelacionados negativamente.
- Si  $4 - d_{U,\alpha} > d$ , no hay evidencia estadística de que los términos de error están autocorrelacionados negativamente.
- Si  $d_{L,\alpha} < (4 - d) < d_{U,\alpha}$ , la prueba no es concluyente.

Aún mejor: los límites  $d_{L,\alpha}$  y  $d_{U,\alpha}$  se estiman a partir de la cantidad de observaciones y cantidad de covariables y no de los valores explícitos de estas.

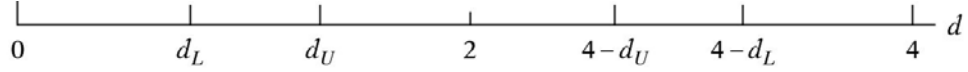


Figura B.3: Esquema de umbrales Durbin-Watson. Fuente: [Gujarati, 1995].

La razón de que el estadístico  $d$  se comporta de esta manera se puede observar en la relación que este tiene con el coeficiente de autocorrelación B.2. Note que

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2 + \sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_{i-1}^2 - 2 \sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}$$

como  $\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2$  y  $\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_{i-1}^2$  solo se diferencian en una observación, son aproximadamente iguales. Por lo tanto,  $\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2 \approx \sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_{i-1}^2$ , lo que implica que;

$$d \approx 2 \left[ 1 - \frac{\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2} \right]$$

tomando en cuenta que  $\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}$ , entonces;

$$d \approx 2[1 - \hat{\rho}(1)]$$

tomando en cuenta que  $-1 < \rho(h) < 1, \forall h \in \{1, \dots, n\}$ , se puede deducir que;  $0 < d < 4$ . De este modo, si  $\hat{\rho}(1) \approx -1$  se evidencia una autocorrelación negativa y  $d \approx 4$ . Lo mismo si  $\hat{\rho}(1) \approx 1$ , se tendría que  $d \approx 0$  con autocorrelación positiva. En caso de tener pocas observaciones bastaría con desestimar la autocorrelación si  $d$  se encuentra lo suficientemente cercano a 2.



# C — INFERENCIA SOBRE LA CADENA DE MARKOV

En la literatura cuando se observan aplicaciones de Cadenas de Markov es común que se asuman propiedades importantes para la estructura de la cadena. En el actual trabajo se asume la propiedad de Markov o pérdida de memoria y la homogeneidad de la probabilidad de transición. En esta sección se describirán las pruebas de hipótesis a realizar y se discutirán los resultados sobre el conjunto de datos para el cual se aplicó el modelo propuesto.

Es en [Anderson and Goodman, 1957] donde se realiza un recorrido exhaustivo sobre los estimadores de máxima verosimilitud y la distribución asintótica para las probabilidades de transición. En particular, se aclara la utilización de pruebas de hipótesis  $\chi^2$  sobre las probabilidades de transición que rechacen o no hipótesis nulas referentes a la propiedad de Markov y la homogeneidad. se debe notar que en esencia se realiza una prueba de independencia en donde se desea caracterizar la distancia o similitud que existe entre dos conjuntos de probabilidades.

Manteniendo la notación de la sección 3.1, se utilizará el conjunto de datos completos  $\mathcal{M}$ . Aquí,  $m \in \{1, \dots, |\mathcal{M}| - 1\}$  lo que, en otras palabras, sería la canti-



dad de periodos observados. La cantidad de vehículos observados transicionando en el periodo  $m$  al periodo  $m + 1$  del estado  $i$  al estado  $j$  es  $\hat{v}_i^j(m)$  y  $\hat{v}_i(m)$  la cantidad de vehículos que se encuentran en el estado  $i$  en el periodo  $m$ . La probabilidad observada para la transición correspondería a  $\mathbf{P}_i^j(m) = \frac{\hat{v}_i^j(m)}{\hat{v}_i(m)} = \frac{\hat{v}_i^j(m)}{\sum_{k \in \mathcal{E}} \hat{v}_i^k(m)}$  y  $\widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma})$  la probabilidad de transición definitiva.

### Homogeneidad de la Probabilidad de Transición:

Se desea realizar una prueba de hipótesis para la cual la hipótesis nula corresponde a  $\mathcal{H}_0 : \mathbf{P}_i^j(m) = \widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma})$  y la hipótesis alternativa  $\mathcal{H}_a : \mathbf{P}_i^j(m) \neq \widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma})$ , para todo  $m$ . Nótese que en caso de no rechazar  $\mathcal{H}_0$  se tendría que la probabilidad para cada periodo  $\mathbf{P}_i^j(m)$  no depende de  $m$ , lo que sucede bajo el supuesto de homogeneidad. Se debe tomar en consideración que:

$$\chi_i^2 \stackrel{d}{\sim} \widehat{\chi}_i^2 = \sum_j \sum_m \frac{\hat{v}_i(m) \cdot \left[ \mathbf{P}_i^j(m) - \widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma}) \right]^2}{\widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma})}.$$

Donde  $\chi_i^2$  tiene  $(a_i - 1)(b_i - 1)$  grados de libertad. Aquí,  $b_i = |B_i|$  para  $B_i = \{j : \widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma}) > 0\}$  y  $a_i = |A_i|$  donde  $A_i = \{m : \hat{v}_i(m) > 0\}$ . Para este caso resulta notable que solo se está realizando la prueba de hipótesis sobre un estado  $i$  fijo que podría ser de particular interés para el usuario. En general,

$$\chi^2 \stackrel{d}{\sim} \widehat{\chi}^2 = \sum_i \widehat{\chi}_i^2 = \sum_i \sum_j \sum_m \frac{\hat{v}_i(m) \cdot \left[ \mathbf{P}_i^j(m) - \widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma}) \right]^2}{\widehat{\mathbf{P}}_i^j(\hat{\gamma})} \quad (\text{C.1})$$

y para este caso  $\chi^2$  tiene  $\sum_i (a_i - 1)(b_i - 1)$  grados de libertad. De este modo, al comparar el estadístico con el valor crítico utilizando un  $\alpha = 0,05$  se conocerá si

hay rechazo de la hipótesis nula.

Propiedad de Markov o Pérdida de Memoria:

Se busca caracterizar la diferencia que existe entre la probabilidad de transición condicionada a lo sucedido para dos periodos anteriores,  $\mathbf{P} [A_n = k | A_{n-1} = j, A_{n-2} = i]$  con la probabilidad de transición  $\mathbf{P} [A_n = k | A_{n-1} = j]$ . En este caso se debe tomar en cuenta que el índice del tiempo observado  $m$  debe ser modificado para mantener la consistencia en la estimación, entonces;  $m \in \{1, \dots, |\mathcal{M}| - 2\}$ . Denote por  $\hat{v}_{ij}^k(m)$  la cantidad de vehículos que se observan en el periodo  $m$  en el estado  $i$ , en el estado  $j$  para el periodo siguiente y en el estado  $k$  en el periodo  $m + 2$ . Ahora, se denota la probabilidad observada de llegar al estado  $k$  condicionada a la trayectoria  $(i, j)$  como

$$\hat{\mathbf{P}}_{ij}^k = \frac{\sum_m \hat{v}_{ij}^k(m)}{\sum_m \hat{v}_i^j(m)} = \frac{\sum_m \hat{v}_{ij}^k(m)}{\hat{v}_i^{j*}}.$$

La hipótesis nula es  $\mathcal{H}_0 : \hat{\mathbf{P}}_{ij}^k = \hat{\mathbf{P}}_j^k(\hat{\gamma})$  y la hipótesis alternativa corresponde a  $\mathcal{H}_a : \hat{\mathbf{P}}_{ij}^k \neq \hat{\mathbf{P}}_j^k(\hat{\gamma})$ . Entonces considere que para un estado  $j$  fijo se tiene:

$$\chi_j^2 \stackrel{d}{\sim} \widehat{\chi}_j^2 = \sum_i \sum_k \frac{\hat{v}_i^{j*} \cdot [\hat{\mathbf{P}}_{ij}^k - \hat{\mathbf{P}}_j^k(\hat{\gamma})]^2}{\hat{\mathbf{P}}_j^k(\hat{\gamma})}.$$

Aquí  $\chi_j^2$  tiene  $(a_j - 1)(b_j - 1)$  grados de libertad, donde  $a_j = |A_j|$  donde  $A_j = \{j : \hat{v}_i^{j*} > 0\}$  y  $b_j = |B_j|$  donde  $B_j = \{k : \hat{\mathbf{P}}_j^k(\hat{\gamma}) > 0\}$ . En general, para todos los

estados se tiene que:

$$\chi^2 \stackrel{d}{\sim} \widehat{\chi^2} = \sum_j \widehat{\chi_j^2} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\widehat{v}_i^{j*} \cdot [\widehat{\mathbf{P}}_{ij}^k - \widehat{\mathbf{P}}_j^k(\widehat{\gamma})]^2}{\widehat{\mathbf{P}}_j^k(\widehat{\gamma})} \quad (\text{C.2})$$

Aquí la variable  $\chi^2$  tiene  $\sum_j (a_j - 1)(b_j - 1)$  grados de libertad.

Al utilizar ambas pruebas de hipótesis sobre el conjunto de datos completo  $\mathcal{M}$  y sobre todos los estados se obtienen los resultados presentados en el siguiente cuadro.

Prueba de Hipótesis	Grados de Libertad	$\widehat{\chi^2}$	$\chi_\alpha^2$	Rechazo de $\mathcal{H}_0$
Homogeneidad	146	31485,15	175.1976	Sí
Pérdida de Memoria	34	47367,29	48,60237	Sí

Cuadro C.1: Resultados de las pruebas de hipótesis  $\chi^2$  de homogeneidad y pérdida de memoria. Se utiliza un  $\alpha = 0,05$  como significancia para el valor crítico.

# BIBLIOGRAFÍA

- [Anderson and Goodman, 1957] Anderson, T. W. and Goodman, L. A. (1957). Statistical inference about markov chains. *The annals of mathematical statistics*, pages 89–110.
- [Bonyadi and Michalewicz, 2017] Bonyadi, M. R. and Michalewicz, Z. (2017). Particle swarm optimization for single objective continuous space problems: A review. *Evolutionary computation*, 25(1):1—54.
- [Bowers, 1997] Bowers, N. (1997). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.
- [Box and Jenkins, 1976] Box, G. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day.
- [Bozzetto et al., 2005] Bozzetto, J.-F., Tang, L., Thomas, L. C., and Thomas, S. (2005). Modelling the purchase dynamics of insurance customers using markov chains. Discussion paper.
- [Clerc, 2006] Clerc, M. (2006). Standard particle swarm optimization. *Open archive HAL*, <https://hal.science/hal-00764996/document>.

- [Durbin and Watson, 1951] Durbin, J. and Watson, G. S. (1951). Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II. *Biometrika*, 38(1-2):159–178.
- [Eberhart and Kennedy, 1995] Eberhart, R. and Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swam theory. *Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, IEEE*.
- [Fantazzini and Toktamysova, 2015] Fantazzini, D. and Toktamysova, Z. (2015). Forecasting german car sales using google data and multivariate models. *International Journal of Production Economics*, 170:97–135.
- [Gao et al., 2018] Gao, J., Xie, Y., Cui, X., Yu, H., and Gu, F. (2018). Chinese automobile sales forecasting using economic indicators and typical domestic brand automobile sales data: A method based on econometric model. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(2).
- [Guégan and Hassani, 2019] Guégan, D. and Hassani, B. (2019). *Risk Measurement: From Quantitative Measures to Management Decisions*. Springer International Publishing.
- [Gujarati, 1995] Gujarati, D. N. (1995). *Basic Econometrics*. McGraw-Hill, New York.
- [Itô, 1984] Itô, K. (1984). *An Introduction to Probability Theory*. Cambridge University Press.

- [Jones, 1980] Jones, R. H. (1980). Maximum likelihood fitting of arma models to time series with missing observations. *Technometrics*, 22:389–395.
- [Kato, 2022] Kato, T. (2022). Demand Prediction in the Automobile Industry Independent of Big Data. *Annals of Data Science*, 9(2):249–270.
- [Kellison, 2008] Kellison, S. (2008). *The Theory of Interest*. ASIA HIGHER EDUCATION BUSINESS. McGraw-Hill Education.
- [Kulkarni, 2011] Kulkarni, V. G. (2011). *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Springer New York, NY.
- [Kullback and Leibler, 1951] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, 22(1):79–86.
- [Morales Garay and Castro Esquivel, 2017] Morales Garay, I. and Castro Esquivel, M. (2017). Proyecciones demograficas y actuariales por medio del metodo de cadenas de markov con monte carlo. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 23(1):241–253.
- [Nelsen, 2006] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer, New York.
- [Pedersen, 2010] Pedersen, M. E. H. (2010). Good parameters for particle swarm optimization.
- [Rožanec et al., 2021] Rožanec, J. M., Kažič, B., Škrjanc, M., Fortuna, B., and Mladenčić, D. (2021). Automotive oem demand forecasting: A comparative study of forecasting algorithms and strategies. *Applied Sciences*, 11(15).

- [Shi and Eberhart, 1998] Shi, Y. and Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm optimizer. *Department of Electrical Engineering*.
- [Shumway and Stoffer, 2000] Shumway, R. H. and Stoffer, D. S. (2000). *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer.
- [Trelea, 2002] Trelea, I. C. (2002). The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information Processing Letters* 85.
- [Viquez et al., 2018] Viquez, J. J., Viquez, J. A., Campos, A., Loría, J., and Mendoza, L. A. (2018). Modelación de poblaciones vía cadenas de markov tridimensionales. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 25(2):185–214.