

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Facultad de Ingeniería

ANALISIS DE VIGAS SOBRE

FUNDACION ELASTICA

TESIS DE GRADO

Presentada a la Facultad de Ingeniería p

optar por el Título de Ingeniero Civi

Ricardo Arias Ugalde

Octubre de 1968

TRIBUNAL

Ing. Rodolfo Herrera J. (Profesor Guía)

Ing. Fernando Aragón R. (Delegado del Decano)

Ing. José Francisco Vargas M.

Ing. Eddy Hernández C.

DEDICATORIA

A mis padres

A mi esposa

A mi hija

AGRADECIMIENTO

Al Ing. Rodolfo Herrera Jiménez por su valiosa colaboración en la presentación de esta Tesis.

Al INSTITUTO COSTARRICENSE DE ELECTRICIDAD por la ayuda prestada en la impresión de esta Tesis.

CONTENIDO

		<u>Página</u>
Capítulo I	ECUACION DE LA LINEA ELASTICA	1
	1.1 Introducción	1
	1.2 Planteamiento del Problema	1
	1.3 Hipótesis Fundamental – Teoría General	2
	1.4 Ecuación Diferencial de la Línea Elástica	6
	1.5 Solución de la Ecuación	7
	1.6 Las constantes de integración- Su significado	11
	1.7 Ejemplo	16
Capítulo II	LA VIGA DE LONGITUD INFINITA	20
	2.1 Carga concentrada	20
	2.2 Carga uniformemente distribuida	26
	2.3 Ejemplos	30
Capítulo III	LA VIGA SEMI - INFINITA	35
	3.1 Viga semi-infinita con el extremo libre	35
	3.2 Viga semi-infinita con el extremo articulado	37
	3.3 Viga semi-infinita con el extremo fijo	38
	3.4 Ejemplos	39
Capítulo IV	LA VIGA DE LONGITUD FINITA	47
	4.1 Método General de Análisis	47
	4.2 Viga con los extremos libres	48
	4.3 Viga con los extremos articulados	55

	<u>Página</u>
4.4 Viga con los extremos fijos	58
4.5 Clasificación de las vigas de acuerdo con su rigidez	61
4.6 Ejemplo	62
Apéndice - TABLAS	65
Tabla I	66 - 77
Tabla II	78 - 93
Tabla III	94 - 95

°/°

CAPITULO I
ECUACION DE LA LINEA ELASTICA

1.1 Introducción

Con este trabajo se trata de presentar una manera de analizar miembros (fundamentalmente vigas) sometidas a carga en condiciones de apoyo especiales, tal el caso de vigas apoyadas en toda su longitud pero no siendo este apoyo o fundación rígido o indeformable, sino que por el contrario es susceptible de sufrir deformaciones más o menos considerables bajo la acción de las cargas aplicadas a la viga.

Se analizan vigas simples, cargadas y apoyadas en las formas más usuales, teniendo en cuenta las condiciones en que corrientemente aparecen en la práctica.

Todos los análisis presentados son sencillos y se ha procurado simplificarlos al máximo.

Con los casos aquí presentados y analizados no se ha pretendido agotar el tema ni mucho menos, sino que se ha tratado de presentar el mismo en forma general, dando soluciones y haciendo sugerencias a problemas comunes.

Cuándo y bajo qué condiciones es dable la aplicación de las formas de análisis aquí presentadas, es en cierta medida un punto subjetivo que la persona que realiza el análisis de la pieza estructural en cuestión debe resolver con arreglo a su criterio, basado en ciertas normas establecidas que se citan más adelante y de acuerdo con la buena o mala capacidad soportante del terreno o medio que va a servir de fundación.

1.2 Planteamiento del Problema

Seguidamente se esboza en forma general el problema que va a ser objeto de análisis.

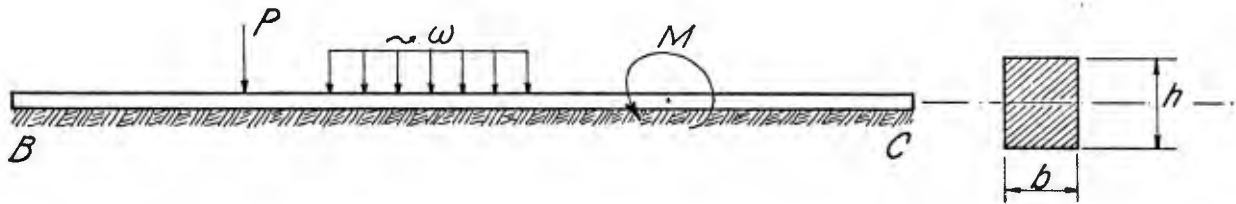


Fig. 1

Supóngase que la viga BC de la Fig. 1 está soportada en toda su longitud sobre un suelo de baja capacidad soportante. La viga es prismática y su sección transversal se muestra en la misma figura. Piezas estructurales en condiciones semejantes se encuentran con bastante frecuencia en diversos problemas de construcción: fundaciones continuas (vigas continuas de cimentación), traviesas de ferrocarril, puentes-pontones, rieles de ferrocarril, etc.

Para proceder al diseño de tales piezas se requiere conocer fundamentalmente las deflexiones, giros, momentos y esfuerzos cortantes que experimenta la pieza en estudio.

En el análisis que a continuación se inicia, se tratará de resolver satisfactoriamente el problema planteado, encontrando las leyes o ecuaciones que rigen el comportamiento de la viga y hallando por lo tanto las expresiones para y , θ , M y V de dicha viga.

1.3 Hipótesis Fundamental - Teoría General

La teoría de las vigas sobre fundación elástica descansa básicamente en la hipótesis de que la reacción de la fundación sobre la viga en un punto dado es directamente proporcional a la deflexión de la viga en ese punto.

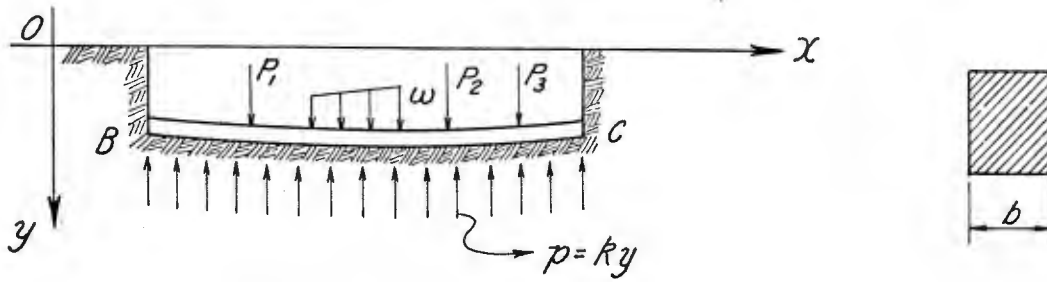


Fig. 2

Haciendo referencia a la Fig. 2 puede verse que la hipótesis anterior podrá ser expresada matemáticamente como

$$p = ky = k'by \quad (1-1)$$

donde:

p	=	reacción de la fundación	(Kg/cm)
k	=	$k'b$ = constante de la fundación	(kg/cm ²)
b	=	ancho de la sección transversal de la viga	(cm)
k'	=	módulo de la fundación	(Kg/cm ³)
y	=	deflexión de la viga	(cm)

El valor de k' (módulo de la fundación) se define como la fuerza necesaria para producirle a una unidad de área de la viga una deflexión unitaria.

En la tabla siguiente se muestran los rangos en que varía el valor de k' para suelos de diferentes características.

Características del suelo,	Material del Suelo	k' en Kg/cm ³
Suelo poco compacto	Limo, arena de relleno, arcilla muy húmeda	0.1 - 0.5
Suelo de compactación media	Arena acomodada, grava de relleno, arcilla húmeda.	0.5 - 5.0
Suelo compacto	Arcilla poco húmeda, arena compacta, grava compactada.	5.0 - 10
Suelo muy compacto.	Arcilla dura, arcilla compactada	10 - 20
Suelo sólido	Roca, suave, calizas, areniscas	20 - 100
Suelo rocoso	Roca sólida	100 - 150

La hipótesis anterior expresada matemáticamente en la ecuación (1-1) es la base en que se apoya toda la teoría de vigas sobre fundación elástica; tiene esta hipótesis la virtud de ser sencilla en grado extremo, puesto que se trata de una relación lineal. Sin embargo se le han hecho objeciones en dos aspectos: el primero es que la relación entre deflexión y reacción de la fundación tal y como se expresa en la ecuación $p = ky$ implica que el suelo de la fundación cumple la Ley de Hooke. En la realidad lo anterior no es estrictamente cierto, puesto que la relación entre esfuerzo y deformación de la fundación no es lineal sino que la reacción del suelo es bastante mayor conforme va aumentando la deflexión.

En la figura 3 se muestra gráficamente lo dicho anteriormente.

./.

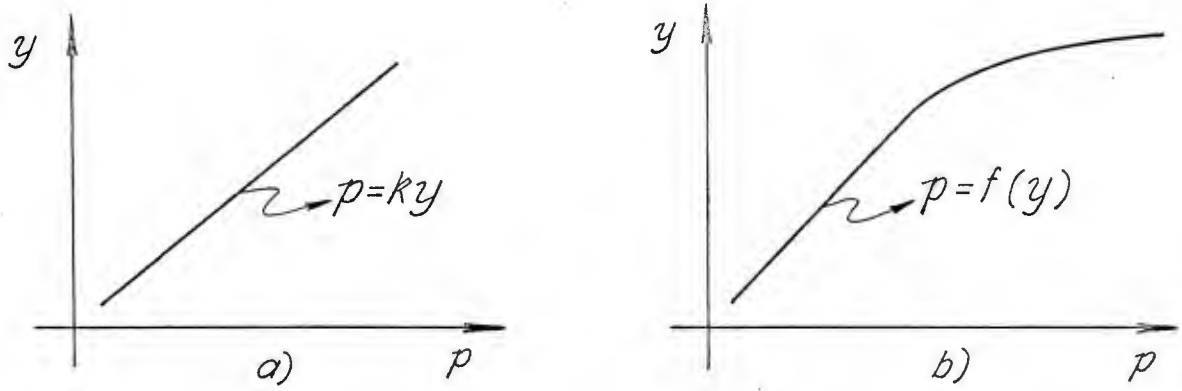


Fig. 3

En la Fig. 3a aparece la relación lineal entre y y p , hipótesis esta que se va a utilizar como punto de partida para todos los posteriores desarrollos. En la Fig. 3b se muestra gráficamente la relación real entre y y p . Si se utilizara esa relación para llevar adelante nuestro desarrollo, el proceso matemático se tornaría extremadamente complicado y los resultados obtenidos serían poco prácticos; en cambio haciendo uso de la relación $p = ky$ no nos apartamos considerablemente de la realidad y los resultados que se obtengan serán mucho más simples, de fácil aplicación y satisfactorios.

La segunda objeción hecha a la hipótesis se ilustra en la Fig. 4.

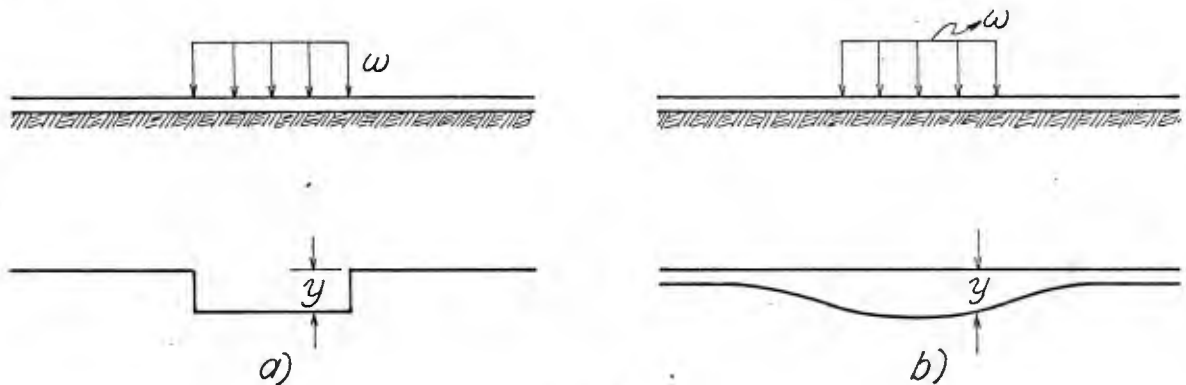


Fig. 4

De acuerdo con la expresión $p = ky$ la fundación carece de continuidad, como si estuviera constituida por un sinnúmero de resortes independientes infinitamente próximos unos a otros y todos con igual constante de elasticidad de manera que la deflexión en un punto dado de la fundación se debería solamente a la carga en ese punto sin tomar en cuenta las otras cargas. Esto es lo que se muestra en la Fig. 4a. Lo anterior desde luego no concuerda con la realidad, pero esta objeción a la hipótesis fundamental en que se basa la teoría de vigas sobre fundación elástica en realidad no es tan importante como parece a primera vista porque no se van a considerar casos de cargas colocadas directamente sobre la fundación sino que se estudiarán vigas cargadas que descansan sobre una fundación elástica, es decir, siempre habrá una viga entre la fundación y las cargas. En esta forma la deflexión real debida a una carga será como se muestra en la Fig. 4b. Finalmente se hace la observación de que se va a suponer que la fundación es capaz de resistir esfuerzos tanto de compresión como de tracción.

1.4 Ecuación Diferencial de la Línea Elástica

Para poder plantear la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga, se analizará un elemento infinitamente pequeño de la viga mostrada anteriormente en la Fig. 2, limitado por dos secciones transversales separadas una distancia dx . Las fuerzas que actúan sobre dicho elemento se muestran en la figura siguiente:

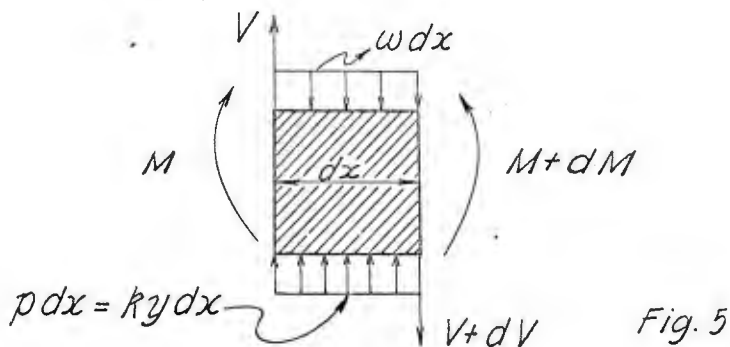


Fig. 5

Haciendo suma de fuerzas verticales se tiene:

$$V - (V + dV) + ky dx - \omega dx = 0$$

Simplificando

$$\frac{dV}{dx} = ky - \omega \quad (1-2)$$

Sabiendo que $V = \frac{dM}{dx}$, se puede escribir:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = ky - \omega \quad (1-3)$$

De resistencia de materiales se sabe que en una viga sometida a flexión se tiene que

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (1-4)$$

Diferenciando dos veces

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} \quad (1-5)$$

Sustituyendo (1-5) en (1-3) se obtiene

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky + \omega \quad (1-6)$$

La expresión (1-6) es la ecuación diferencial de la línea elástica de una viga apoyada en toda su longitud sobre una fundación elástica.

En el sector donde la viga no está cargada exteriormente $\omega = 0$ y la anterior ecuación se puede escribir

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -ky \quad (1-7)$$

Esta es la ecuación con que se trabajará y cuya solución se obtendrá en la sección siguiente.

1.5 Solución de la Ecuación

La ecuación (1-7) es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden y de coeficientes constantes.

Con el propósito de encontrar su solución se hará uso del OPERADOR "D", para lo cual se escribirá así:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EI} y = 0 \quad (1-8)$$

$$\left(D^4 + \frac{k}{EI}\right) y = 0 \quad (1-9)$$

$$y = \frac{1}{\left(D^4 + \frac{k}{EI}\right)} \cdot 0 = \frac{1}{(D-R_1)(D-R_2)(D-R_3)(D-R_4)} \cdot 0 \quad (1-10)$$

donde R_1, R_2, R_3 y R_4 son las cuatro raíces de la ecuación

$$D^4 + \frac{k}{EI} = 0 \quad (1-11)$$

De lo anterior se deduce que

$$D = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \sqrt[4]{-1}$$

Las cuatro raíces cuartas de -1 son:

Luego,
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$R_1 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad R_3 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$R_2 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \quad R_4 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Llamando

$$\sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \beta \quad (1-12)$$

se puede escribir:

$$\begin{aligned} R_1 &= \beta(1+i) & R_3 &= \beta(-1-i) \\ R_2 &= \beta(-1+i) & R_4 &= \beta(1-i) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (1-10), se tiene:

$$y = \frac{1}{[D-\beta(1+i)] [D-\beta(-1+i)] [D-\beta(-1-i)] [D-\beta(1-i)]} \cdot 0$$

$$= \frac{A_1}{D-\beta(1+i)} \cdot 0 + \frac{A_2}{D-\beta(1-i)} \cdot 0 + \frac{A_3}{D-\beta(-1+i)} \cdot 0 + \frac{A_4}{D-\beta(-1-i)} \cdot 0$$

$$y = B_1 e^{\beta(1+i)x} + B_2 e^{\beta(1-i)x} + B_3 e^{\beta(-1+i)x} + B_4 e^{\beta(-1-i)x}$$

$$= B_1 e^{\beta x} \cdot e^{\beta i x} + B_2 e^{\beta x} \cdot e^{-\beta i x} + B_3 e^{-\beta x} \cdot e^{\beta i x} + B_4 e^{-\beta x} \cdot e^{-\beta i x}$$

$$= e^{\beta x} (B_1 e^{\beta i x} + B_2 e^{-\beta i x}) + e^{-\beta x} (B_3 e^{\beta i x} + B_4 e^{-\beta i x})$$

Haciendo uso de las identidades:

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x$$

$$e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \operatorname{sen} \alpha x$$

se puede escribir:

$$y = e^{\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_1 i \operatorname{sen} \beta x + B_2 \cos \beta x - B_2 i \operatorname{sen} \beta x)$$

$$+ e^{-\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_3 i \operatorname{sen} \beta x + B_4 \cos \beta x - B_4 i \operatorname{sen} \beta x)$$

$$y = e^{\beta x} [(B_1 + B_2) \cos \beta x + i (B_1 - B_2) \operatorname{sen} \beta x]$$

$$+ e^{-\beta x} [(B_3 + B_4) \cos \beta x + i (B_3 - B_4) \operatorname{sen} \beta x]$$

Introduciendo nuevas constantes C_1, C_2, C_3, C_4 , donde:

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1 + B_2 & C_3 &= B_3 + B_4 \\ C_2 &= i(B_1 - B_2) & C_4 &= i(B_3 - B_4) \end{aligned}$$

queda:

$$y = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) \quad (1-13)$$

que es la ecuación de la línea elástica buscada.

De la ecuación anterior, se ve que β es un factor que tiene mucha influencia en la forma de la línea elástica de la viga, y en su valor $\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$ influyen tanto la rigidez de la viga como la elasticidad de la fundación. Por este motivo el factor β se denomina la "característica" del sistema, y como su dimensión es el inverso de una longitud, el término $1/\beta$ con frecuencia es llamado la "longitud característica". Desde luego βx será un número sin dimensiones.

Si se deriva sucesivamente la ecuación (1-13), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{dy}{dx} &= e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) + C_2 (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)] \\ &\quad - e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) - C_4 (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x)] \quad (1-14) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = -e^{\beta x} (C_1 \operatorname{sen} \beta x - C_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \operatorname{sen} \beta x - C_4 \cos \beta x) \quad (1-15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta^3} \frac{d^3 y}{dx^3} &= -e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) - C_2 (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x)] \\ &\quad + e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) + C_4 (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)] \quad (1-16) \end{aligned}$$

y sabiendo que:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

$$-EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$-EI \frac{d^3y}{dx^3} = V$$

se pueden obtener expresiones generales para la pendiente, el momento y el esfuerzo cortante de la viga.

1.6 Las Constantes de integración - Su significado

Para aplicar las anteriores expresiones generales a casos particulares, deben determinarse las constantes de integración C_1, C_2, C_3, C_4 . Estas constantes dependen de la forma en que la viga esté cargada y de las condiciones de apoyo de la misma, teniendo igual valor a lo largo de cada tramo de viga en que la línea elástica y sus derivadas sean continuas.

Normalmente, de las cuatro condiciones (y, θ, M, V) dos se conocen en cada extremo de la viga, teniendo así datos suficientes para la determinación de las 4 - constantes de integración.

Cuando una viga está sujeta a varias cargas a través de su longitud, su línea elástica se divide en varios tramos continuos (por ejemplo A-a, a-b, b-c, c-d, y d-B en la Fig. 6). En los puntos intermedios (a, b, c, d) las condiciones finales del tramo anterior son las condiciones iniciales del tramo siguiente por ser la viga un elemento continuo, logrando determinarse así las constantes de integración para -

cada uno de esos tramos.

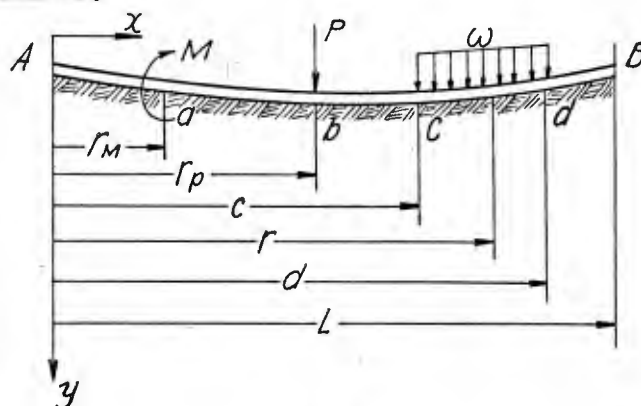


Fig. 6

Aunque desde el punto de vista matemático el problema puede resolverse completamente en la forma indicada, el procedimiento es muy laborioso y no ofrece facilidades de computación. El trabajo se simplifica en forma considerable si la solución general de la ecuación se escribe de tal manera que las constantes de integración adquieran un significado físico en términos de las condiciones existentes en los extremos de la viga.

Se tiene como ejemplo la viga AB de la Fig. 6, sujeta a varias cargas y con su extremo izquierdo coincidiendo con el origen de coordenadas.

En las ecuaciones (1-13), (1-14), (1-15) y (1-16) obtenidas anteriormente aparecen las expresiones generales para y, θ, M, V . Haciendo en estas ecuaciones $x=0$, se obtienen las condiciones en el extremo izquierdo de la viga AB.

$$\left. \begin{aligned} [y]_{x=0} &= y_0 = C_1 + C_3 \\ \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} &= \theta_0 = \beta(C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \\ \left[-EI \frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=0} &= M_0 = 2\beta^2 EI(-C_2 + C_4) \\ \left[-EI \frac{d^3y}{dx^3} \right]_{x=0} &= V_0 = 2\beta^3 EI(C_1 - C_2 - C_3 - C_4) \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

Resolviendo para C_1, C_2, C_3, C_4 el sistema de ecuaciones anterior, se llega a obtener:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{4\beta} \theta_0 + \frac{1}{8\beta^3 EI} V_0 \\ C_2 &= \frac{1}{4\beta} \theta_0 - \frac{1}{4\beta^2 EI} M_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI} V_0 \\ C_3 &= \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{4\beta} \theta_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI} V_0 \\ C_4 &= \frac{1}{4\beta} \theta_0 + \frac{1}{4\beta^2 EI} M_0 - \frac{1}{8\beta^3 EI} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en la expresión general de la línea elástica (1-13), y sabiendo que

$$\begin{aligned} \cos h \beta x &= \frac{1}{2} (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \\ \sen h \beta x &= \frac{1}{2} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) \end{aligned}$$

se obtiene:

$$y_x = y_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} M_0 F_3(\beta x) - \frac{1}{\beta^3 EI} V_0 F_4(\beta x) \quad (1-19)$$

donde:

$$\begin{aligned} F_1(\beta x) &= \cos h \beta x \cdot \cos \beta x \\ F_2(\beta x) &= \frac{1}{2} (\cos h \beta x \cdot \sen \beta x + \sen h \beta x \cdot \cos \beta x) \\ F_3(\beta x) &= -\frac{1}{2} \sen h \beta x \cdot \sen \beta x \\ F_4(\beta x) &= \frac{1}{4} (\cos h \beta x \cdot \sen \beta x - \sen h \beta x \cdot \cos \beta x) \end{aligned}$$

En esta forma se ve que las constantes de integración iniciales han sido sustituidas en (1-13) por y_0, θ_0, M_0 y V_0 , valores estos del extremo izquierdo de la viga ($x=0$), tomando un significado físico tangible.

-Se verá ahora, haciendo referencia siempre a la Fig. 6 cómo influyen las cargas externas M , P y ω en la ecuación (1-19) de la línea elástica de la viga.

Supóngase que y_0 , θ_0 , M_0 y V_0 son conocidos; se recorre la viga de izquierda a derecha a lo largo del tramo descargado A-a hasta llegar al punto a, donde está aplicado un momento M ; evidentemente este momento produce un efecto a la derecha del punto a (para $x > r_M$) semejante al que ejerce el momento inicial M_0 sobre el tramo A-a ($r_M > x > 0$) de la línea elástica. En la ecuación (1-19) vemos que el factor que multiplica a M_0 es $-\frac{1}{\beta^2 EI} F_3(\beta x)$, de donde se concluye que el momento M aplicado en a produce un efecto igual a $-\frac{1}{\beta^2 EI} F_3[\beta(x-r_M)] \cdot M$ sobre la ecuación de la línea elástica a la derecha de a, o sea para $x > r_M$. En consecuencia, para obtener la expresión para la línea elástica del tramo a-b, se añade el término antes encontrado a la ecuación (1-19).

De manera semejante se encuentra que la fuerza P aplicada en el punto b de la viga produce un efecto igual a $\frac{1}{\beta^3 EI} \cdot F_4[\beta(x-r_p)] \cdot P$ sobre la línea elástica a la derecha de b ($x > r_p$).

Considerando la carga distribuida ω como la suma de una serie de cargas concentradas infinitesimales continua, se concluye que el efecto producido por ω para $x > c$ es igual a $\frac{1}{\beta^3 EI} \int_c^x \omega F_4[\beta(x-r)] dr$. Para $x > d$, el límite superior de la integral es d.

Nótese que los términos que presentan los efectos de P y ω tienen signo contrario al que tiene el término que incluye a V_0 en la ecuación (1-19); ello se debe a que P y ω actúan hacia abajo produciendo un incremento en el esfuerzo cortante a la derecha de b y c respectivamente.

Finalmente, sumando las expresiones obtenidas se llega a la ecuación de la línea elástica para la viga mostrada en la Fig. 6:

$$y_x = y_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} M_0 F_3(\beta x) - \frac{1}{\beta^3 EI} V_0 F_4(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} M F_3[\beta(x-r_M)] + \frac{1}{\beta^3 EI} P F_4[\beta(x-r_P)] + \frac{1}{\beta^3 EI} \int_c^x \omega F_4[\beta(x-r)] dr \quad (1-20)$$

A continuación, derivando sucesivamente se encuentran las expresiones generales para el giro, momento y esfuerzo cortante de la viga.

Primeramente, nótese que:

$$\frac{dF_1}{dx} = -4\beta F_4$$

$$\frac{dF_2}{dx} = \beta F_1$$

$$\frac{dF_3}{dx} = \beta F_2$$

$$\frac{dF_4}{dx} = \beta F_3$$

En seguida se puede escribir:

$$\theta_x = \theta_0 F_1(\beta x) - \frac{1}{\beta EI} M_0 F_2(\beta x) - \frac{1}{\beta^2 EI} V_0 F_3(\beta x) - 4\beta y_0 F_4(\beta x) - \frac{1}{\beta EI} M F_2[\beta(x-r_M)] + \frac{1}{\beta^2 EI} P F_3[\beta(x-r_P)] + \frac{1}{\beta^2 EI} \int_c^x \omega F_3[\beta(x-r)] dr \quad (1-21)$$

$$M_x = M_0 F_1(\beta x) + \frac{1}{\beta} V_0 F_2(\beta x) + \frac{K}{\beta^2} y_0 F_3(\beta x) + \frac{K}{\beta^3} \theta_0 F_4(\beta x) + M F_1[\beta(x-r_M)] - \frac{1}{\beta} P F_2[\beta(x-r_P)] - \frac{1}{\beta} \int_c^x \omega F_2[\beta(x-r)] dr \quad (1-22)$$

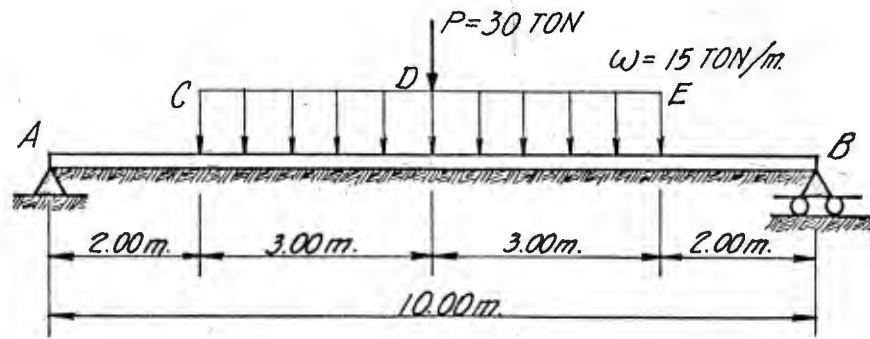
$$V_x = V_0 F_1(\beta x) + \frac{K}{\beta} y_0 F_2(\beta x) + \frac{K}{\beta^2} \theta_0 F_3(\beta x) - 4\beta M_0 F_4(\beta x) - 4\beta M F_4[\beta(x-r_M)] - P F_1[\beta(x-r_P)] - \int_c^x \omega F_1[\beta(x-r)] dr \quad (1-23)$$

Si en las ecuaciones anteriores se hace $x = L$, se obtiene y_L, θ_L, M_L y V_L valores estos del extremo derecho de la viga expresados en términos de las condiciones iniciales cuyo valor se desconoce, pues como se apuntó anteriormente de los cuatro valores que definen las condiciones de cada uno de los extremos de una viga, generalmente se conocen dos de cada extremo.

Supóngase por ejemplo que la viga de la Fig. 6 tenga ambos extremos, A y B libres. Entonces $M_0 = 0, V_0 = 0, M_L = 0, V_L = 0$. Si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (1-22) y (1-23), el lado izquierdo de las igualdades será igual a cero, mientras que los términos de la derecha contendrían únicamente dos incógnitas y_0 y θ_0 . De dos de las ecuaciones resultantes tomadas como simultáneas se pueden determinar los valores correspondientes. Una vez hallados y sustituidos en las expresiones generales, se está en capacidad de calcular y_x, θ_x, M_x, V_x para cualquier punto intermedio de la viga.

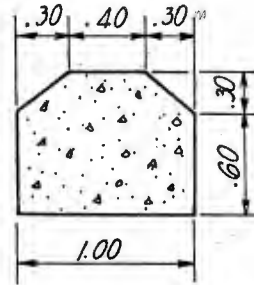
1.7 Ejemplo

Para aplicar lo visto anteriormente, se calcularán los diagramas de y, θ, M y V para la viga sobre fundación elástica de la siguiente figura:



$$K' = 4 \text{ Kg./cm}^3$$

$$E = 210,000 \text{ Kg./cm}^2$$



SECCION DE LA VIGA

El momento de inercia centroidal I es igual a 4809700 cm^4 .

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 100}{4 \times 210,000 \times 4809700}} = 0.00317 \text{ 1/cm.}$$

$$\beta = 0.317 \text{ 1/m.}$$

Haciendo coincidir el origen de coordenadas con A, se tiene:

$$y_0 = 0; \quad M_0 = 0; \quad \theta_0 \neq 0; \quad V_0 \neq 0$$

Las condiciones iniciales θ_0, V_0 se encuentran igualando a cero las ecuaciones de la deflexión y el momento en el apoyo B (para $x = L$). Se hará uso de las expresiones (1-20) y (1-22).

$$\left. \begin{aligned} y_{10} &= \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta \cdot 10) - \frac{1}{\beta^3 EI} V_0 F_4(\beta \cdot 10) + \frac{P}{\beta^3 EI} F_4(\beta \cdot 5) - \frac{\omega}{R} [F_1(\beta \cdot 8) - F_1(\beta \cdot 2)] = 0 \\ M_{10} &= \frac{1}{\beta} V_0 F_2(\beta \cdot 10) + \frac{R}{\beta^3} \theta_0 F_4(\beta \cdot 10) - \frac{P}{\beta} F_2(\beta \cdot 5) - \frac{\omega}{\beta^2} F_3[(\beta \cdot 8) - F_3(\beta \cdot 2)] = 0 \end{aligned} \right\}$$

De las tablas que aparecen al final se obtienen los diferentes valores de F.

$$\frac{1}{0.317} \theta_0 (-6.1083) - \frac{2.8848}{(0.317)^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.048097} V_0 + \frac{30(0.6438)}{(3.17)^3 \times 21 \times 4.81} - \frac{15}{4000} [-5.2240 - 0.9371] = 0$$

$$\frac{1}{0.317} V_0 (-6.1083) + \frac{4000}{(0.317)^3} \theta_0 (2.8848) - \frac{30}{0.317} (1.2543) - \frac{15}{(0.317)^2} [1.7860 - 0.2006] = 0$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\frac{\theta_0 = 1.26 \times 10^{-3} \text{ rad}}{V_0 = 5.26 \text{ TON}}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones generales para y, θ, M y V se obtendrán las ecuaciones para los diferentes tramos de la viga.

Tramo AC ($0 \leq x \leq 2$)

$$y_x = \frac{1}{\beta} \theta_0 F_2(\beta x) - \frac{4\beta}{R} V_0 F_4(\beta x) = 3.975 F_2(\beta x) - 1.667 F_4(\beta x) \quad [mm]$$

$$\theta_x = \theta_0 F_1(\beta x) - \frac{4\beta^2}{R} V_0 F_3(\beta x) = 1.260 F_1(\beta x) - 0.528 F_3(\beta x) \quad [rad \times 10^3]$$

$$M_x = \frac{1}{\beta} V_0 F_2(\beta x) + \frac{R}{\beta^3} \theta_0 F_4(\beta x) = 16.593 F_2(\beta x) + 158.217 F_4(\beta x) \quad [T-M]$$

$$V_x = V_0 F_1(\beta x) + \frac{R}{\beta^2} \theta_0 F_3(\beta x) = 5.26 F_1(\beta x) + 50.155 F_3(\beta x) \quad [Ton]$$

Tramo CD ($5 \geq x \geq 2$)

$$\begin{aligned} y_x &= 3.975 F_2(\beta x) - 1.667 F_4(\beta x) + \frac{w}{R} [F_1(0) - F_1\{\beta(x-2)\}] \\ &= 3.975 F_2(\beta x) - 1.667 F_4(\beta x) + 3.75 [1 - F_1\{\beta(x-2)\}] \quad [mm] \end{aligned}$$

$$\theta_x = 1.26 F_1(\beta x) - 0.528 F_3(\beta x) - \frac{4\beta w}{R} [F_4(0) - F_4\{\beta(x-2)\}]$$

$$= 1.260 F_1(\beta x) - 0.528 F_3(\beta x) + 4.755 F_4[\beta(x-2)] \quad [\text{rad} \times 10^3]$$

$$M_x = 16.593 F_2(\beta x) + 158.217 F_4(\beta x) + \frac{\omega}{\beta^2} [F_3(0) - F_3\{\beta(x-2)\}]$$

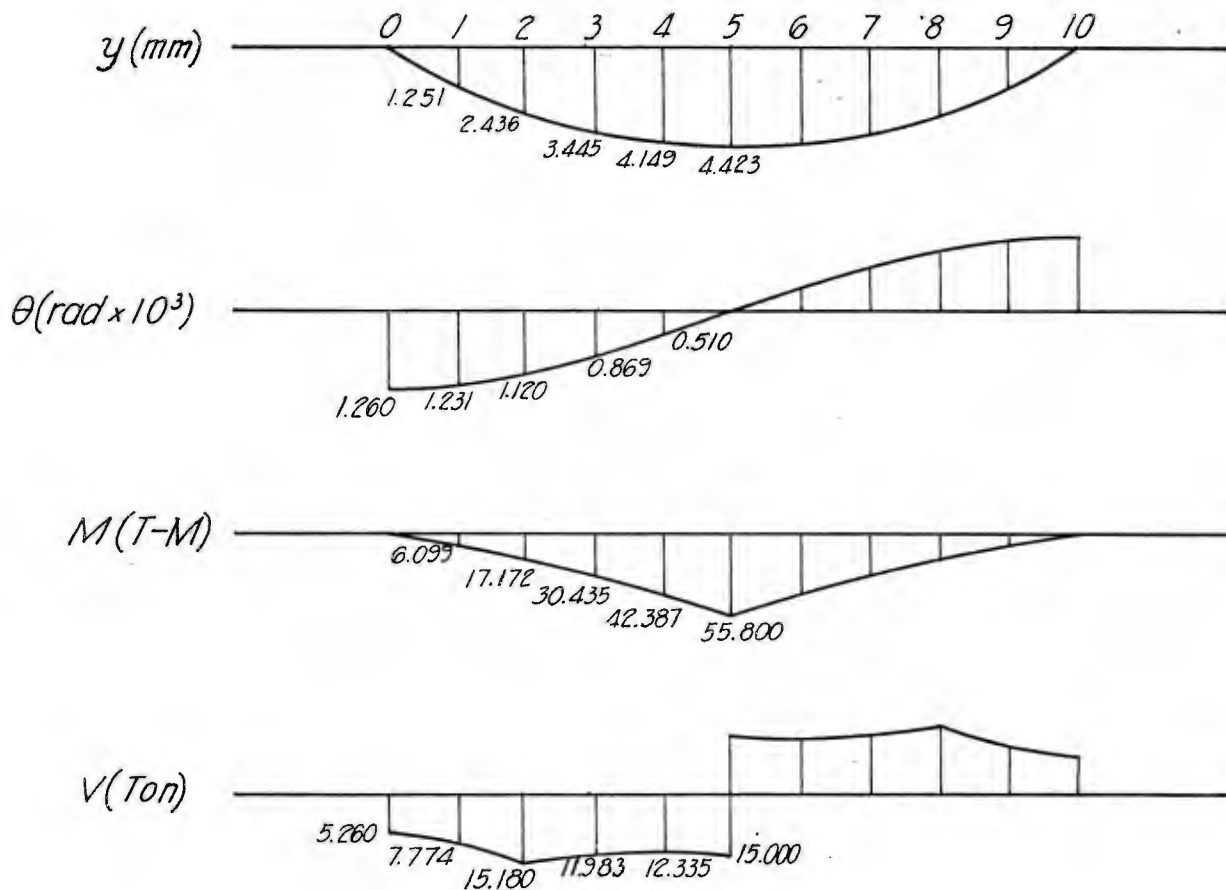
$$= 16.593 F_2(\beta x) + 158.217 F_4(\beta x) - 149.27 F_3[\beta(x-2)] \quad [T-M]$$

$$V_x = 5.26 F_1(\beta x) + 50.155 F_3(\beta x) + \frac{\omega}{\beta} [F_2(0) - F_2\{\beta(x-2)\}]$$

$$= 5.26 F_1(\beta x) + 50.155 F_3(\beta x) - 47.319 F_2[\beta(x-2)] \quad [(TON)]$$

Como la viga y las cargas son simétricas, los diagramas de y y M también lo son; los diagramas de θ y V serán cososimétricos.

Utilizando las expresiones antes derivadas y haciendo variar x desde 0 hasta 5 metros, se obtienen los valores que aparecen en los siguientes diagramas:



CAPITULO II
LA VIGA DE LONGITUD INFINITA

2.1 Carga concentrada

Consideremos una viga de longitud infinita en ambas direcciones sometida a la acción de una carga concentrada P en un punto 0 que se toma como origen de - coordenadas (Fig. 6).

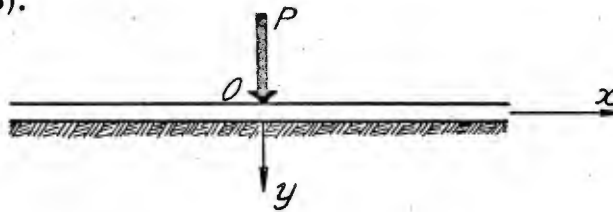


Fig. 6

Debido a la simetría, basta considerar el tramo de viga a la derecha de la - carga.

En el capítulo I se determinó que la ecuación general de la línea elástica de - la viga es:

$$y = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x)$$

En el caso de una carga concentrada es lógico suponer que a una distancia in- finita de P , la deflexión y la pendiente de la viga serán iguales a cero. Obser- vando la ecuación de la línea elástica se llega a la conclusión de que esas con- diciones se cumplen si el paréntesis que multiplica a $e^{\beta x}$ se anula, o sea si $C_1 = C_2 = 0$. Por consiguiente, la ecuación de la línea elástica para el tramo de viga en consideración será:

$$y = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \operatorname{sen} \beta x) \quad (2-1)$$

Las otras dos constantes C_3 y C_4 se encuentran por medio de las condicio- nes en el origen $O(x=0)$. Por simetría, en este punto la línea elástica de- be tener una tangente horizontal. Luego,

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0$$

O sea

$$\beta e^{-\beta x} \left[(\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)(-C_3) + C_4(\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) \right]_{x=0} = 0$$

De donde

$$C_3 = C_4 = C$$

Por lo tanto es posible escribir la ecuación (2-1) así:

$$y = C e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) \quad (2-2)$$

Finalmente, se sabe que el esfuerzo cortante en el punto de aplicación de la carga ($x = 0$) es igual a $-\frac{P}{2}$, esto es

$$\begin{aligned} -EI \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{x=0} &= -\frac{P}{2} \\ -EI \left[4\beta^3 C e^{-\beta x} \cos \beta x \right]_{x=0} &= -\frac{P}{2} \\ -4EI\beta^3 C &= -\frac{P}{2} \end{aligned}$$

De donde

$$C = \frac{P}{8EI\beta^3} = \frac{P\beta}{2k}$$

Sustituyendo en (2-2) se obtiene:

$$y = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) \quad (2-3)$$

que es la ecuación para la línea elástica de la viga a la derecha de la carga P.

Diferenciando sucesivamente, se hallan las expresiones para θ , M y V .

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -\frac{P\beta^2}{k} e^{-\beta x} \operatorname{sen} \beta x \quad (2-4)$$

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) \quad (2-5)$$

$$-EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (2-6)$$

En la figura siguiente se muestran las curvas que representan las ecuaciones anteriores.

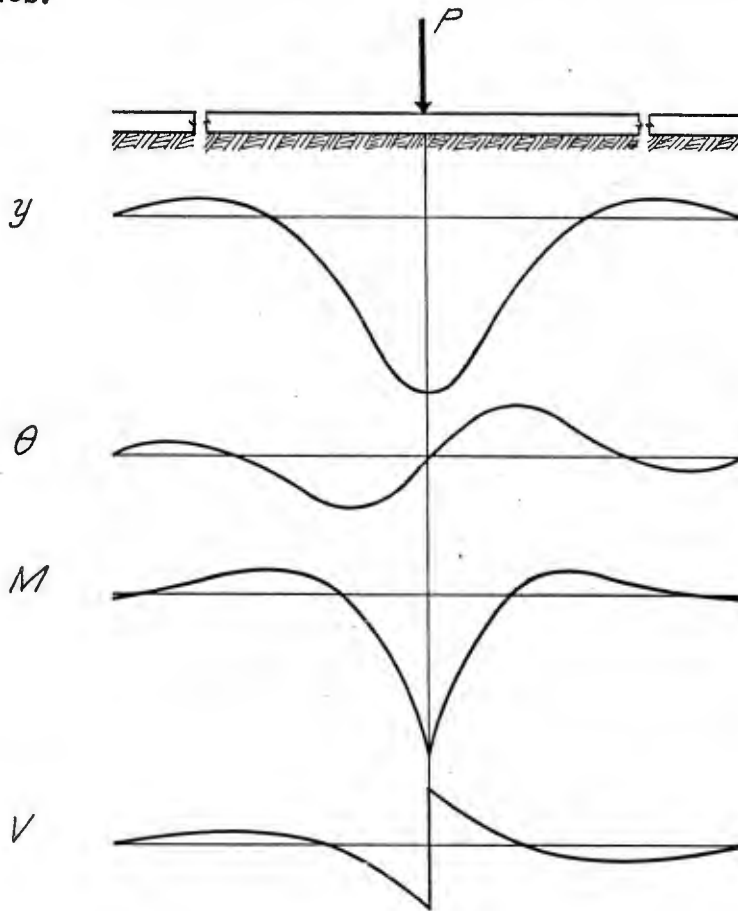


Fig. 7

Todas las curvas son de la forma de onda amortiguada.

Para simplificar las fórmulas y posteriormente los cálculos, vamos a introducir la siguiente notación:

$$\left. \begin{aligned} A_{\beta x} &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) \\ B_{\beta x} &= e^{-\beta x} \operatorname{sen} \beta x \\ C_{\beta x} &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \operatorname{sen} \beta x) \\ D_{\beta x} &= e^{-\beta x} \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

Las expresiones anteriores, como es fácil comprobarlo, están relacionadas entre sí en la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_{\beta x}}{dx} &= -2\beta B_{\beta x} \\ \frac{dB_{\beta x}}{dx} &= \beta C_{\beta x} \\ \frac{dC_{\beta x}}{dx} &= -2\beta D_{\beta x} \\ \frac{dD_{\beta x}}{dx} &= -\beta A_{\beta x} \end{aligned} \right\} (2-8)$$

Empleando las expresiones de (2-7) se pueden escribir las ecuaciones de y , θ , M y V de la viga de la manera siguiente:

$$y = \frac{PB}{2R} A_{\beta x} \quad (2-9)$$

$$\theta = -\frac{P\beta^2}{R} B_{\beta x} \quad (2-10)$$

$$M = \frac{P}{4\beta} C_{\beta x} \quad (2-11)$$

$$V = -\frac{P}{2} D_{\beta x} \quad (2-12)$$

En el apéndice aparece la Tabla 2 que da los valores de las funciones $A_{\beta x}$, $B_{\beta x}$, $C_{\beta x}$ y $D_{\beta x}$ para valores de βx desde 0.00 hasta 8.00.

Momento externo aplicado en un punto

Como una aplicación de las fórmulas halladas para carga concentrada y utilizando el principio de superposición, se encontrarán las expresiones para y , θ , M y V de una viga de longitud infinita sometida a la acción de un momento externo M_0 en un punto 0 que se va a tomar como origen (Fig. 8 a)

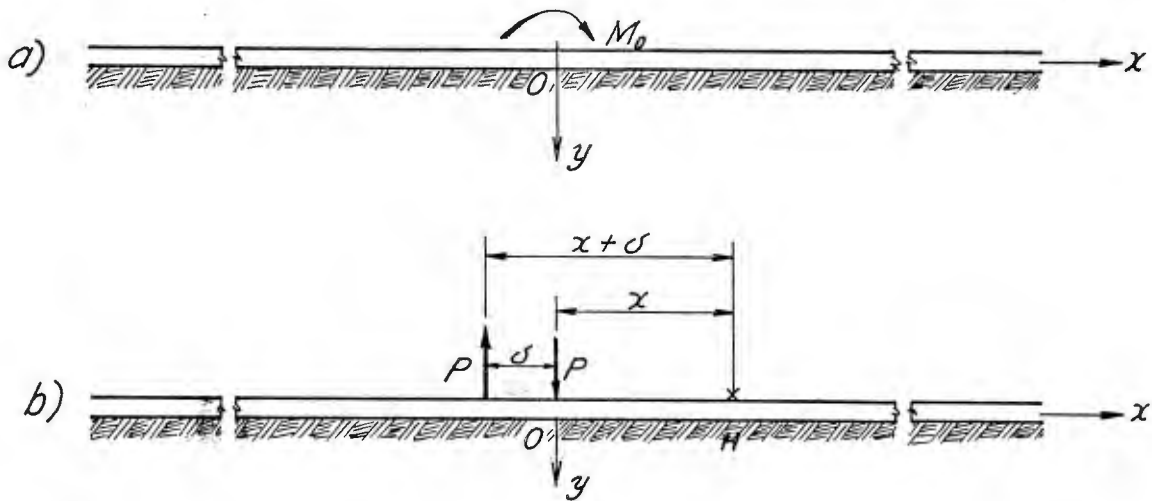


Fig. 8

En la figura 8b se ha sustituido el momento M_0 por el par $P\delta$ de tal manera que $P\delta \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} M_0$, o sea que el par $P\delta$ es idéntico al momento M_0 cuando δ tiende a cero.

La deflexión y en el punto H situado a una distancia x del origen será - de acuerdo con (2-9):

$$y = -\frac{P\beta}{2R} A_\beta(x+\delta) + \frac{P\beta}{2R} A_\beta x$$

$$y = -\frac{(P\delta)\beta}{2R} \left[\frac{A_\beta(x+\delta) - A_\beta x}{\delta} \right]$$

Si se hace disminuir δ , en el límite (cuando $\delta \rightarrow 0$) se tendrá lo siguiente:

$$y = -\frac{M_0\beta}{2R} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{A_\beta(x+\delta) - A_\beta(x)}{\delta} \right]$$

El límite del paréntesis es, por definición $\frac{dA_\beta x}{dx}$; además $\frac{dA_\beta x}{dx} = -2\beta B_\beta x$ de acuerdo con (2-8). Entonces:

$$y = \frac{M_0\beta^2}{R} B_\beta x \quad (2-13)$$

Derivando sucesivamente se obtiene:

$$\theta = \frac{M_0 \beta^3}{R} C \beta x \quad (2-14)$$

$$M = \frac{M_0}{2} D \beta x \quad (2-15)$$

$$V = -\frac{M_0 \beta}{2} A \beta x \quad (2-16)$$

Las anteriores son las ecuaciones de y , θ , M y V de una viga infinita sobre la que actúa en un punto un momento M_0 . A continuación se representan gráficamente.

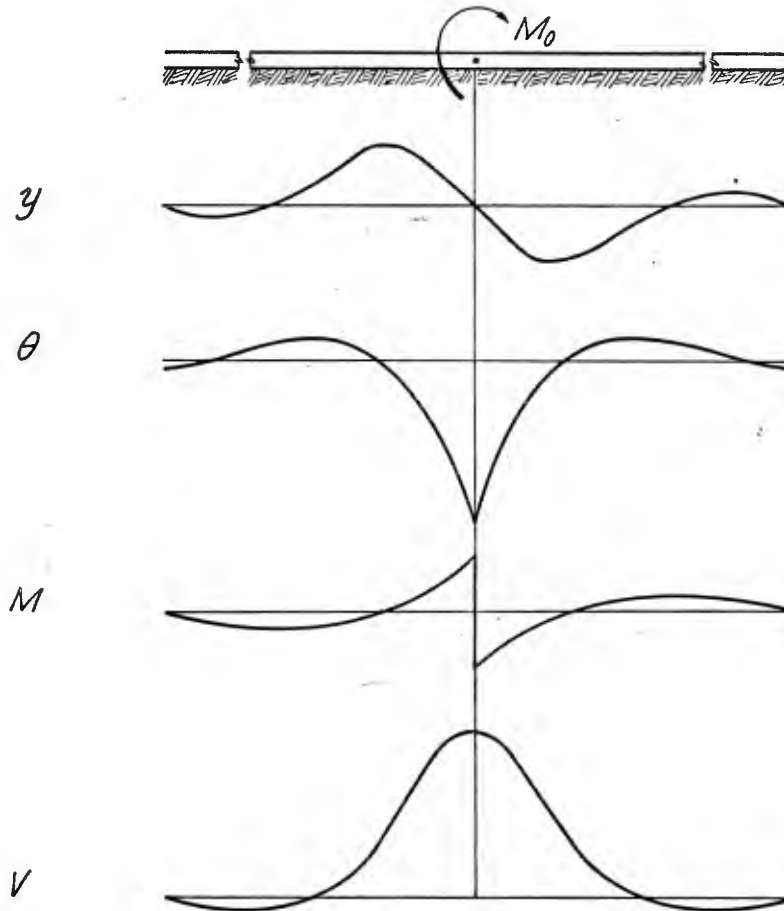


Fig. 9

2.2 Carga uniformemente distribuida

Considérese el caso de una carga w uniformemente distribuida y de longitud L , sobre una viga infinitamente larga (Fig. 10).

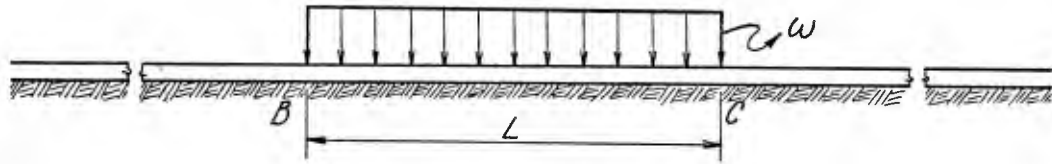


Fig. 10

Se encontrarán las expresiones para y , θ , M y V en un punto cualquiera A de la viga.

Llamando con b y c respectivamente las distancias del punto A a los extremos B y C , se nota que hay que analizar tres casos, a saber:

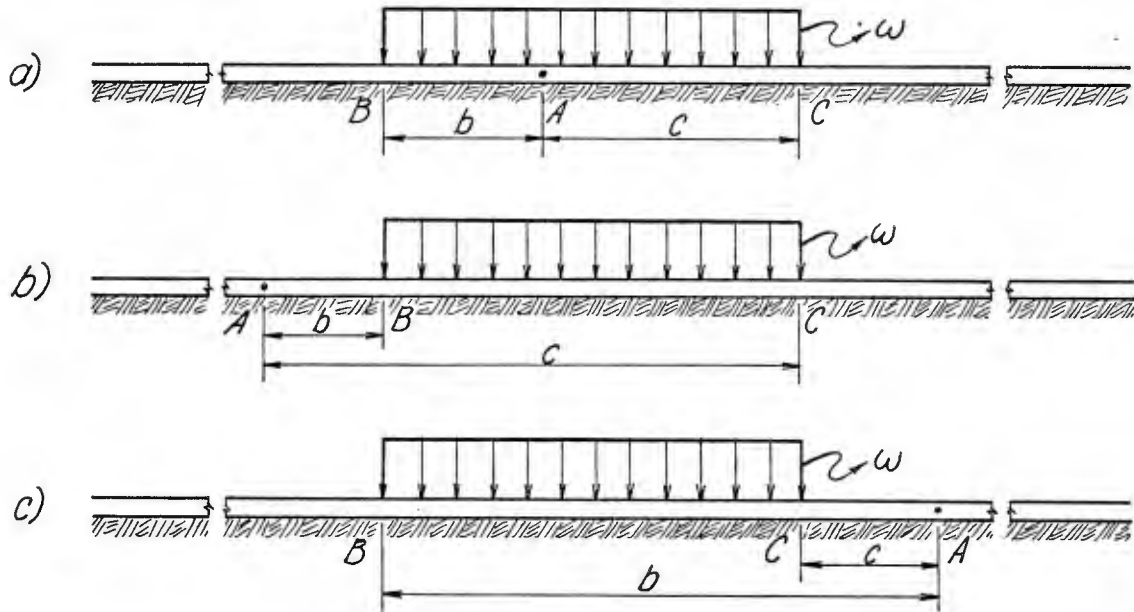


Fig. 11

- a) el punto A está entre B y C ;
- b) el punto A está a la izquierda de B .
- c) el punto A está a la derecha de C .

Caso a)

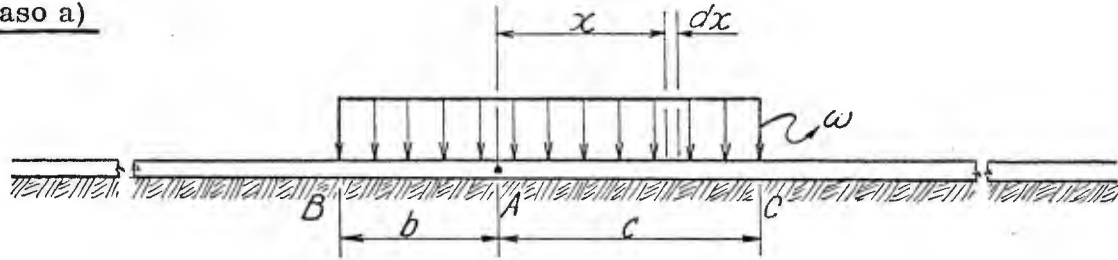


Fig. 12

Se considera la carga distribuida como una serie de cargas concentradas infinitamente pequeñas $w dx$. La expresión para la deflexión en A producida por el elemento dx se obtiene sustituyendo $w dx$ por P en la ecuación (2-3) de la Página 21.

$$dy = \frac{w dx \beta}{2K} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)$$

La deflexión en A producida por toda la carga distribuida será igual a:

$$y = \int_0^b \frac{w dx \beta}{2K} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x) + \int_0^c \frac{w dx \beta}{2K} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \operatorname{sen} \beta x)$$

$$y = \frac{w}{2K} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c) \quad (2-17)$$

De acuerdo con (2-7), se puede escribir:

$$y = \frac{w}{2K} (2 - D_{\beta b} - D_{\beta c}) \quad (2-18)$$

Observando la ecuación (2-17) se ve que si b y c son grandes, los valores de $e^{-\beta b}$ y $e^{-\beta c}$ son pequeños, y la deflexión es aproximadamente igual a $\frac{w}{K}$, es decir, en un punto bajo la carga que esté alejado de ambos extremos, puede desprejarse la flexión de la viga y suponerse que la carga uniforme se trasmite directamente a la fundación.

Si se toma el punto A en uno de los extremos de la región cargada (por ejemplo se hace coincidir A con B), entonces se tiene $b = 0$, $c = L$. Si L es bastante grande, $e^{-\beta c} \cos \beta c \approx 0$ y $e^{-\beta b} \cos \beta b = 1$. Por lo tanto, y de acuerdo con (2-17), -

la deflexión será

$$y = \frac{w}{2k} [2 - 1 - 0] = \frac{w}{2k}$$

o sea la mitad de la encontrada anteriormente.

Haciendo un análisis similar al que se hizo para y y partiendo de las ecuaciones (2-4), (2-5) y (2-6) de la página 21, se halla que

$$\theta = \frac{w\beta}{2k} (A_{\beta b} - A_{\beta c}) \quad (2-19)$$

$$M = \frac{w}{4\beta^2} (B_{\beta b} + B_{\beta c}) \quad (2-20)$$

$$V = \frac{w}{4\beta} (C_{\beta b} - C_{\beta c}) \quad (2-21)$$

Caso b)

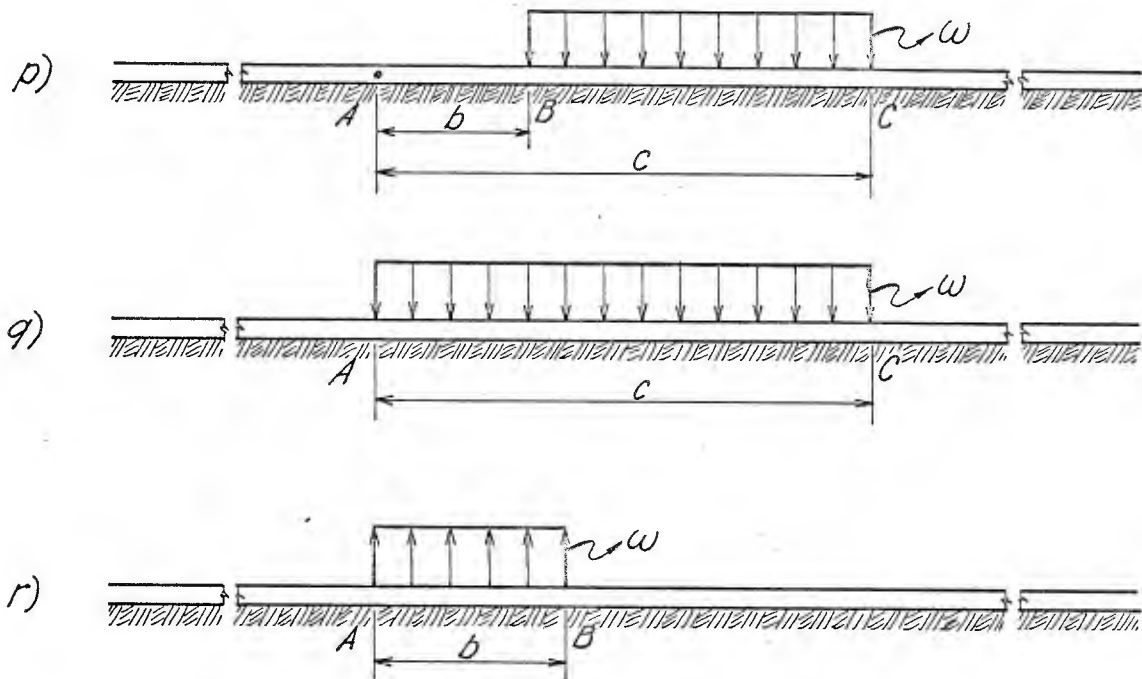


Fig. 13

En este caso se tiene que el punto A está fuera y a la izquierda de la carga distribuida.

Para encontrar las expresiones para y , θ , M y V se utiliza el método de superposición. La situación que se muestra en la Fig.13 p es equivalente a la suma de las otras dos 13q y 13r. Por lo tanto, aplicando la ecuación (2-18), se tiene:

$$y = \frac{\omega}{2R} [(2-1-D_{\beta c}) - (2-1-D_{\beta b})]$$

$$y = \frac{\omega}{2R} (D_{\beta b} - D_{\beta c}) \quad (2-22)$$

Mediante análisis similares se obtiene:

$$\theta = \frac{\omega\beta}{2R} (A_{\beta b} - A_{\beta c}) \quad (2-23)$$

$$M = -\frac{\omega}{4\beta^2} (B_{\beta b} - B_{\beta c}) \quad (2-24)$$

$$V = \frac{\omega}{4\beta} (C_{\beta b} - C_{\beta c}) \quad (2-25)$$

Caso C)

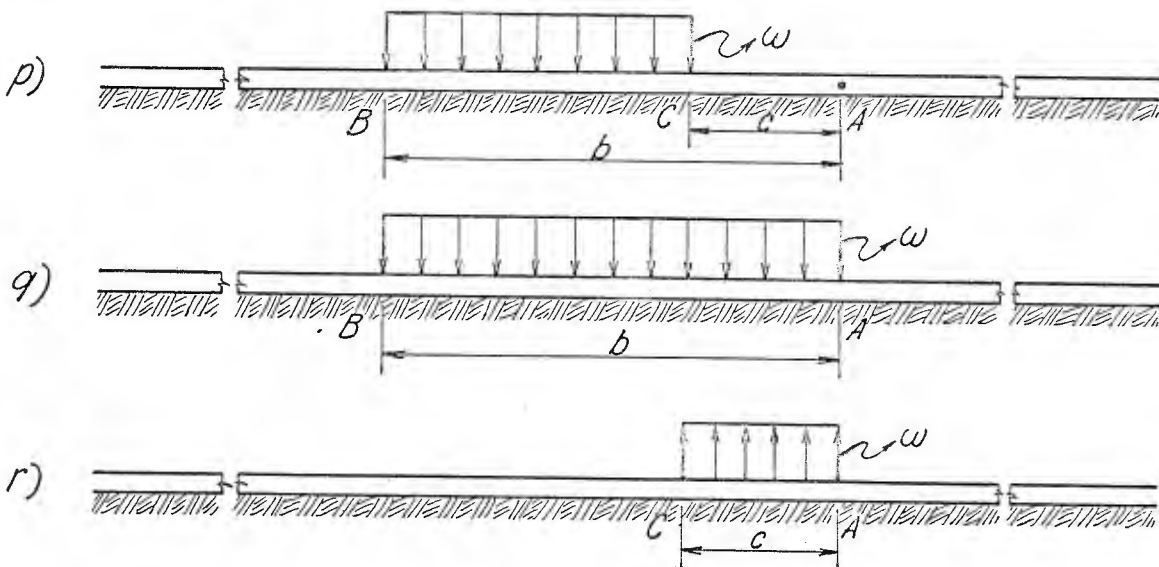


Fig. 14

Analizando este caso en forma similar al caso b) y utilizando el método de superposición, se tiene:

$$y = \frac{w}{2k} [(2 - D_{\beta b} - 1) - (2 - D_{\beta c} - 1)]$$

$$y = -\frac{w}{2k} (D_{\beta b} - D_{\beta c}) \quad (2-26)$$

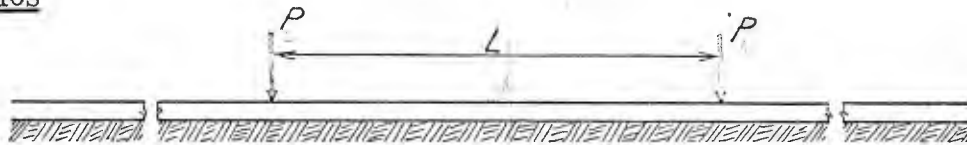
y similarmente

$$\theta = \frac{w\beta}{2k} (A_{\beta b} - A_{\beta c}) \quad (2-27)$$

$$M = \frac{w}{4\beta^2} (B_{\beta b} - B_{\beta c}) \quad (2-28)$$

$$V = \frac{w}{4\beta} (C_{\beta b} - C_{\beta c}) \quad (2-29)$$

2.3 Ejemplos II-1)



La figura anterior muestra una viga infinita sobre fundación elástica sobre la que actúan dos cargas iguales P separadas una distancia L . Para qué valor de L la deflexión en el punto medio entre las cargas es igual a la deflexión bajo cualquiera de ellas?

De acuerdo con la expresión (2-9) y con el enunciado del problema, se puede escribir:

$$\frac{P\beta}{2k} A_{\beta}(0) + \frac{P\beta}{2k} A_{\beta}(L) = 2 \frac{P\beta}{2k} A_{\beta}\left(\frac{L}{2}\right)$$

O sea

$$1 + A_{\beta}L = 2A_{\beta}\left(\frac{L}{2}\right)$$

Haciendo uso de la Tabla II y probando valores para βL , se encuentra que la igualdad anterior es satisfecha para $\beta L = 1.86$ ($\frac{\beta L}{2} = 0.93$)

Luego,

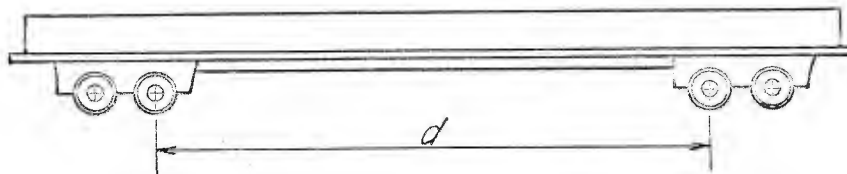
$$L = \frac{1.86}{\beta}$$

Como se puede apreciar, la separación entre las cargas es independiente del valor de las mismas; depende de la fundación (R) y de las dimensiones (I) y del material (E) de la viga.

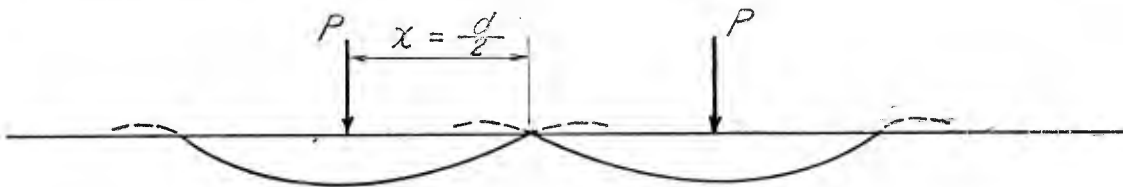


II-2)

Suponiendo que la fundación de los rieles de un ferrocarril tiene una $R = 100 \text{ K/cm}^2$ y que para los rieles $I = 3645 \text{ cm}^4$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, calcular la separación máxima d entre las dos ruedas interiores de un carro del ferrocarril de manera que el riel no se levante en ningún punto.



De acuerdo con la Fig. 7 el gráfico de deflexiones de las dos ruedas es como sigue:



Para una rueda,

$$y = \frac{PB}{2R} - A\beta x$$

De acuerdo con la Tabla II, y comienza a tomar valores negativos cuando βx es mayor de $\frac{3\pi}{4}$. Luego, para nuestro caso tendremos:

$$x = \frac{d}{2} = \frac{3\pi}{4\beta} = \frac{2.36}{\beta}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{100}{4 \times 2.1 \times 10^6 \times 3645}} = \frac{0.76}{100} \text{ cm}^{-1} = 0.76 \text{ m}^{-1}$$

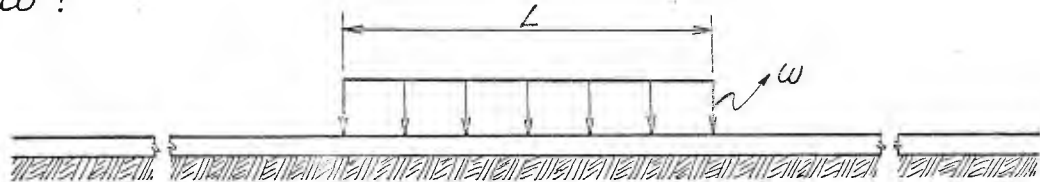
Luego,

$$d = \frac{4.72}{0.76} = \underline{\underline{6.20 \text{ m}}}$$

II-3)

En la Figura siguiente se muestra una viga infinita sobre fundación elástica con una carga uniforme ω de longitud L .

Qué valor debe tener I para que la presión máxima sobre el suelo sea igual a $\frac{1}{2} \omega$?



La presión máxima es igual a Ky_{max} . Esto ocurre en el centro de la carga uniforme, o sea para $\frac{L}{2}$.

De acuerdo con la expresión (2-18) se puede entonces escribir:

$$K \cdot \frac{\omega}{2K} \left[2 - D_{\beta} \left(\frac{L}{2} \right) - D_{\beta} \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{\omega}{2}$$

O sea:

$$D_{\beta} \left(\frac{L}{2}\right) - 0.50 = 0$$

Utilizando la tabla II y dándole valores a $\frac{\beta L}{2}$, se encuentra que la ecuación de arriba se satisface para $\frac{\beta L}{2} = 0.53975$ (habiéndose interpolado).

Entonces

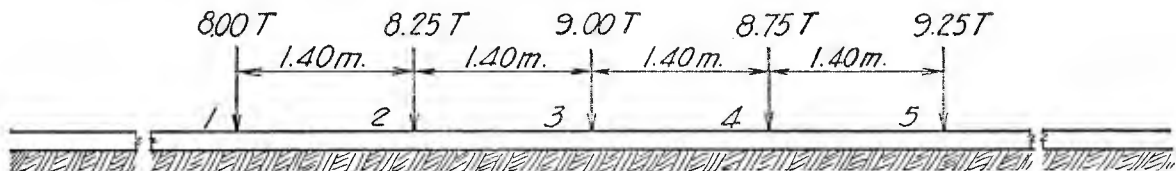
$$\beta = \frac{1.0795}{L} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

de donde se obtiene que

$$\underline{I = 0.1841 \frac{kL^4}{E}}$$

II-4)

Las ruedas de una locomotora ejercen sobre cada riel de la vía las fuerzas que se muestran en la siguiente figura:



Suponiendo que

$$k = 100 \text{ Kg/cm}^2; I = 3645 \text{ cm}^4; Z = 180 \text{ cm}^3$$
$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

calcular el esfuerzo que se produce en el riel debajo de la rueda número 5.

Los rieles del ferrocarril no descansan estrictamente en forma continua sobre su fundación. Sin embargo, la separación de los durmientes o traviesas es muy peque

ña comparada con la longitud de onda de la línea elástica del riel, por lo que se puede suponer que el riel está apoyado en forma continua sin incurrir en errores considerables.

Primeramente se calcula el momento flector bajo la rueda 5 debido a la acción de todas las ruedas de la locomotora. Para ello se utiliza el principio de superposición y la fórmula (2-11):

$$M_{\textcircled{5}} = \sum \frac{P}{4\beta} C_{\beta x}; \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{R}{4EI}} = 0.76 \text{ m}^{-1} \text{ (del ejemplo II-2)}$$

RUEDA	x	βx	$C_{\beta x}$	P	$PC_{\beta x}$
1	5.60	4.260	0.0065	8.00	0.0520
2	4.20	3.195	-0.0387	8.25	-0.3193
3	2.80	2.130	-0.1637	9.00	-1.4733
4	1.40	1.065	-0.1345	8.75	-1.1769
5	0.00	0.000	1.0000	9.25	9.2500

$$\Sigma PC_{\beta x} = 6.3325$$

Luego,

$$M_{\textcircled{5}} = \frac{6.3325}{4 \times 0.76} = 2.0831 \text{ T-M}$$

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{208310}{180} = \underline{\underline{1157 \text{ kg/cm}^2}}$$

CAPITULO III
LA VIGA SEMI - INFINITA

Se llama viga semi-infinita aquella viga que se extiende ilimitadamente sólo en una dirección, teniendo un punto A (Fig. 15) que la limita en la dirección contraria. Este extremo A puede estar libre, articulado o empotrado.

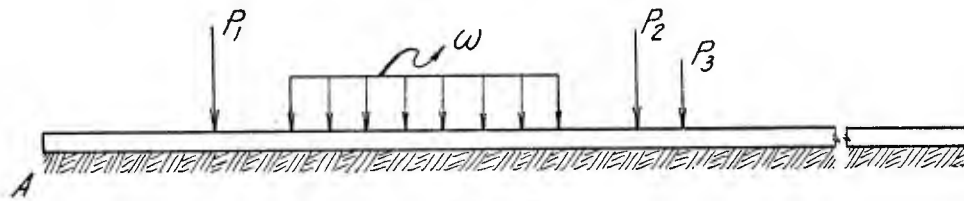


Fig. 15

3.1 Viga Semi -infinita con el extremo libre

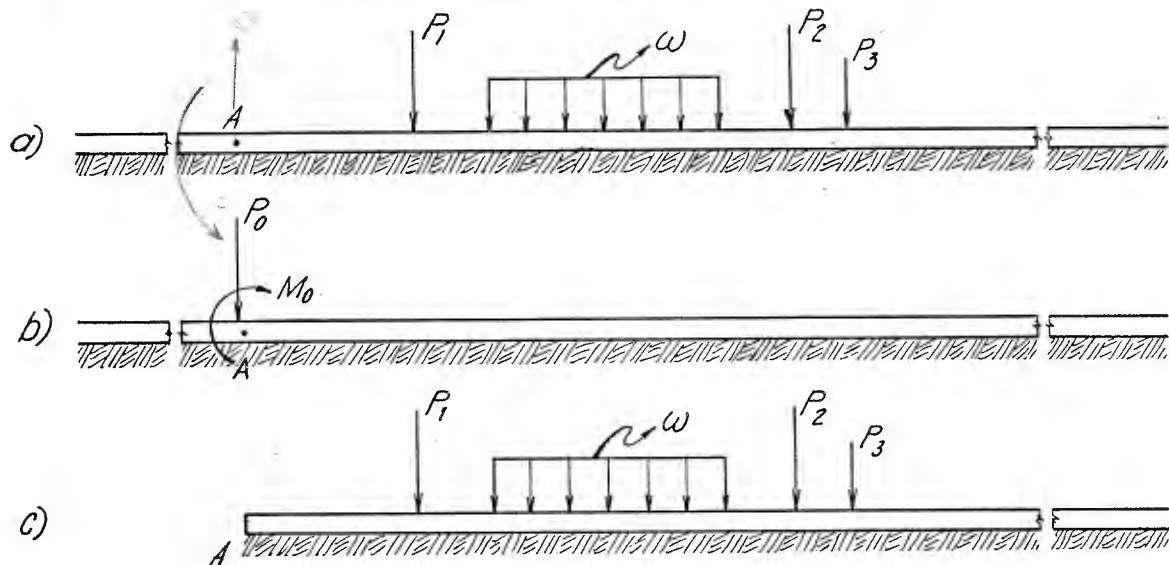


Fig. 16

Considérese la viga infinita mostrada en la Fig. 16 a. Debido a las cargas externas aplicadas P_1, w, P_2 y P_3 se producen en el punto A de la viga un momento flector y un esfuerzo cortante iguales a M_A y V_A .

Si se decide limitar la viga en la dirección izquierda hasta el punto A y dejar este extremo libre, Fig. 16c, para satisfacer esta condición de la viga semi-infinita ne

cesariamente el momento y el esfuerzo cortante en A deben ser nulos.

Para lograr esta condición en la viga infinita, se aplican las cargas M_0 y P_0 en la sección situada infinitamente próxima a la izquierda del punto A. (Fig. 16b). Estas cargas deben ser tales que produzcan en el punto A un momento y un esfuerzo cortante iguales a $-M_A$ y $-V_A$ para así anular los efectos producidos en A por las cargas externas aplicadas.

En resumen, se ve que la situación de la viga semi-infinita mostrada en la Fig. 16c es equivalente a la que se obtiene mediante la superposición de las vigas infinitas de las Figuras 16 a y 16 b.

El análisis de la viga semi-infinita consistirá entonces en determinar los valores apropiados de M_0 y P_0 que hagan nulos el momento y el esfuerzo cortante en A. Como estas cargas M_0 y P_0 lo que hacen es compensar los efectos de las cargas externas, reciben el nombre de cargas compensadoras.

Para encontrar M_0 y P_0 se hace coincidir el origen de coordenadas con el punto A y se utilizan las expresiones (2-11), (2-15), (2-12), y (2-16) anteriormente establecidas:

$$\begin{aligned}\frac{P_0}{4\beta} + \frac{M_0}{l} + M_A &= 0 \\ -\frac{P_0}{2} - \frac{M_0\beta}{2} + V_A &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$P_0 = 4(V_A + \beta M_A) \quad (3-1)$$

$$M_0 = -\frac{2}{\beta}(V_A + 2\beta M_A) \quad (3-2)$$

Estas expresiones determinan los valores de las cargas compensadoras que aplicadas en el punto A de la viga infinita hacen que ésta se comporte idénticamente como una viga semi-infinita con su extremo A libre.

3.2 Viga semi-infinita con el extremo articulado

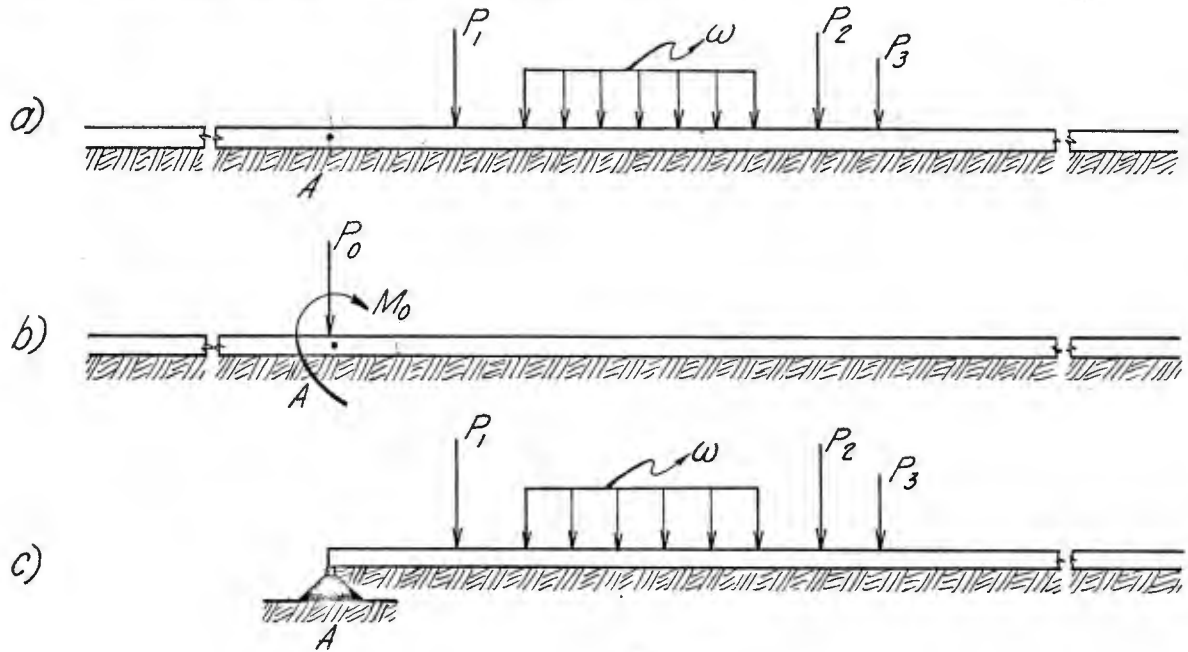


Fig. 17

El análisis de este caso se hace de manera similar al de la viga semi-infinita con el extremo libre. Por superposición se nota que la suma de las vigas infinitas de las Figuras 17 a y 17b es equivalente a la viga semi-infinita de la Fig. 17c con su extremo A articulado, siempre y cuando las cargas compensadoras P_0 y M_0 sean convenientemente escogidas, de tal manera que $\sum y_A = 0$ y $\sum M_A = 0$, es decir, que P_0 y M_0 deben producir un efecto tal que anulen la deflexión y el momento en A provocados por las cargas externas aplicadas a la viga, considerada ésta como infinita.

Haciendo coincidir el origen de coordenadas con el punto A y aplicando las expresiones (2-9), (2-13), (2-11) y (2-15) se tiene:

$$\frac{P_0 \beta}{2K} + y_A = 0$$

$$\frac{P_0}{4\beta} + \frac{M_0}{2} + M_A = 0$$

Resolviendo el sistema anterior resulta:

$$P_0 = -\frac{2k}{\beta} y_A \quad (3-3)$$

$$M_0 = \frac{k}{\beta^2} y_A - 2M_A \quad (3-4)$$

Aplicando estas cargas compensadoras a la viga infinita en la sección infinitamente próxima a la izquierda del punto A, se producen las condiciones necesarias para considerar la viga como semi-infinita con el extremo A articulado.

3.3 Viga semi-infinita con el extremo empotrado

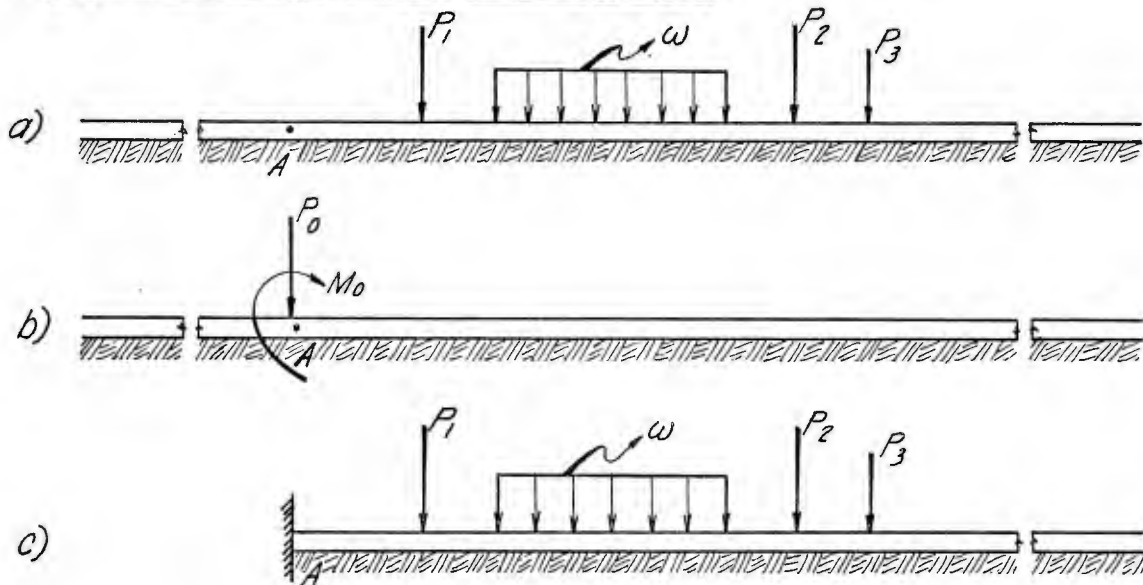


Fig. 18

Análisis semejante al de los dos casos anteriores.

La viga semi-infinita de la Fig. 18 c es equivalente a la superposición de las infinitas de las Figuras 18a y 18b habida cuenta que las cargas compensadoras deben producir las condiciones de empotramiento en el punto A, esto es $\sum y_A = 0$, $\sum \theta_A = 0$.

Haciendo uso de las expresiones (2-9), (2-13), (2-10) y (2-14) es posible escribir:

$$y_A + \frac{P_0 \beta}{2K} = 0$$

$$\theta_A + \frac{M_0 \beta^3}{K} = 0$$

de donde resulta:

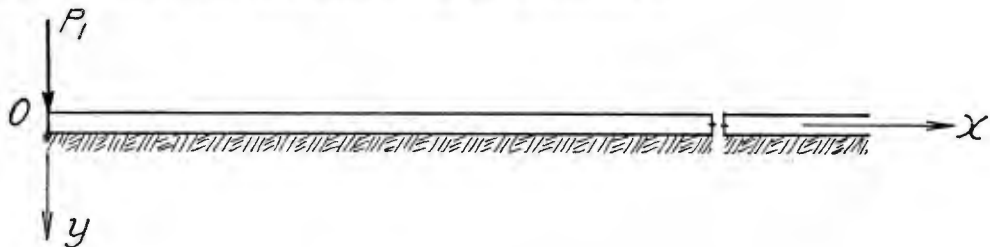
$$P_0 = -\frac{2K}{\beta} y_A \quad (3-5)$$

$$M_0 = -\frac{K}{\beta^3} \theta_A \quad (3-6)$$

3.4 Ejemplos

Como una aplicación de lo anteriormente visto, se desarrollarán fórmulas para vigas semi-infinitas sujetas a varios tipos de carga y apoyadas en diferente forma.

III-1) Extremo libre; carga concentrada en el extremo



Se tiene que $M_A = 0$; $V_A = P_1$.

Sustituyendo estos valores en las expresiones (3-1) y (3-2) se obtiene:

$$P_0 = 4P_1 ; \quad M_0 = -\frac{2}{\beta} P_1$$

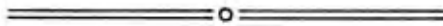
Aplicando las cargas compensadoras a la viga considerada como infinita y utilizando las expresiones (2-3), (2-4), (2-5) y (2-6) se obtiene:

$$y = \frac{2P_1 \beta}{K} D_{\beta x}$$

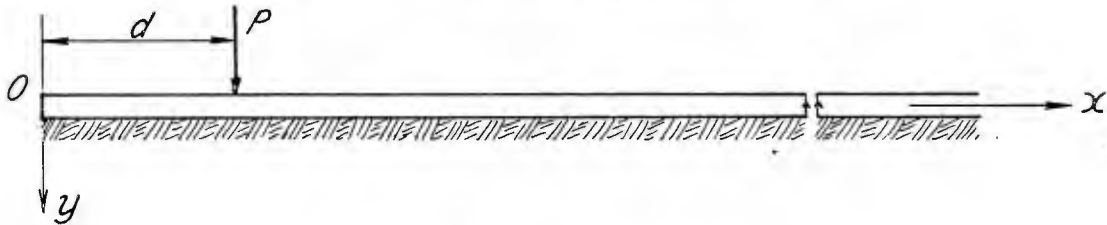
$$\theta = -\frac{2P_1 \beta^2}{K} A_{\beta x}$$

$$M = -\frac{P_1}{\beta} B_{\beta x}$$

$$V = -P_1 C_{\beta x}$$



III-2) Extremo libre; carga concentrada en cualquier punto



Primeramente se determinan M_A y V_A . Aplicando las expresiones (2-11) y (2-12) se obtiene:

$$M_A = \frac{P}{4\beta} C_{\beta d}; \quad V_A = \frac{P}{2} D_{\beta d}$$

Aplicando estos valores en las fórmulas (3-1) y (3-2) se encuentran los valores de las cargas compensadoras:

$$P_0 = P(C_{\beta d} + 2D_{\beta d}); \quad M_0 = -\frac{P}{\beta} (C_{\beta d} + D_{\beta d})$$

Llamando $(C_{\beta d} + 2D_{\beta d}) = m$ y $(C_{\beta d} + D_{\beta d}) = n$, y aplicando las cargas compensadoras a la viga considerada como infinita, por medio de las expresiones (2-9), (2-10), (2-11) y (2-12) se obtiene:

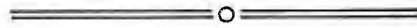
$$y = \frac{P\beta}{2R} (m A_{\beta x} - 2n B_{\beta x} + A_{\beta} |d-x|)$$

$$\theta = -\frac{P\beta^2}{R} (m B_{\beta x} + n C_{\beta x} \pm B_{\beta} |d-x|)$$

$$M = \frac{P}{4\beta} (m C_{\beta x} - 2n D_{\beta x} + C_{\beta} |d-x|)$$

$$V = -\frac{P}{2} (m D_{\beta x} - n A_{\beta x} \pm D_{\beta} |d-x|)$$

La diferencia $d-x$ debe tomarse siempre como su valor absoluto. En el último término de las expresiones para θ y V el doble signo se toma así: el superior (+) para $x > d$; el inferior (-) para $x < d$.



III-3) Extremo libre; momento aplicado en el extremo;



Se tiene que

$$M_A = -M_1 ; \quad V_A = 0$$

Sustituyendo esos valores en (3-1) y (3-2) se encuentran las cargas compensadoras:

$$P_0 = -4\beta M_1 ; \quad M_0 = 4M_1$$

La aplicación de esas cargas a la viga considerada como infinita da como resultado las siguientes expresiones:

$$y = -\frac{2M_1\beta^2}{R} C_{\beta x}$$

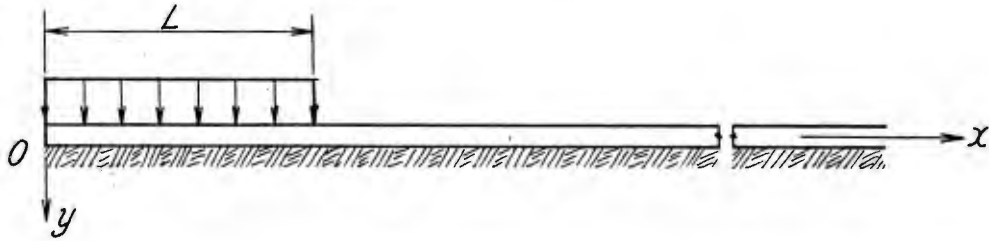
$$\theta = \frac{4M_1\beta^3}{R} D_{\beta x}$$

$$M = M_1 A_{\beta x}$$

$$V = -2M_1 \beta B_{\beta x}$$



III-4) Extremo libre; carga uniforme



Para determinar M_A y V_A se utilizan las expresiones (2-20) y (2-21). Así se obtiene que:

$$M_A = \frac{\omega}{4\beta^2} B_{\beta L}; \quad V_A = \frac{\omega}{4\beta} (1 - C_{\beta L})$$

Sustituyendo esos valores en las expresiones (3-1) y (3-2) se encuentran las cargas compensadoras:

$$P_0 = \frac{\omega}{\beta} (1 + B_{\beta L} - C_{\beta L}); \quad M_0 = -\frac{\omega}{2\beta^2} (1 + 2B_{\beta L} - C_{\beta L})$$

Llamando $(1 + B_{\beta L} - C_{\beta L}) = u$; $(1 + 2B_{\beta L} - C_{\beta L}) = v$ y aplicando las cargas compensadoras a la viga considerada como infinita, se obtiene que:

$$y = \frac{\omega}{2K} [u A_{\beta x} - v B_{\beta x} + \{2 - D_{\beta x} - D_{\beta}(L-x)\}] \quad \text{para } 0 < x < L$$

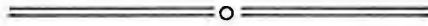
$$y = \frac{\omega}{2K} [u A_{\beta x} - v B_{\beta x} - \{D_{\beta x} - D_{\beta}(x-L)\}] \quad \text{para } x > L$$

$$\theta = -\frac{\omega\beta}{2K} [2u B_{\beta x} + v C_{\beta x} - (A_{\beta x} - A_{\beta}|x-L|)]$$

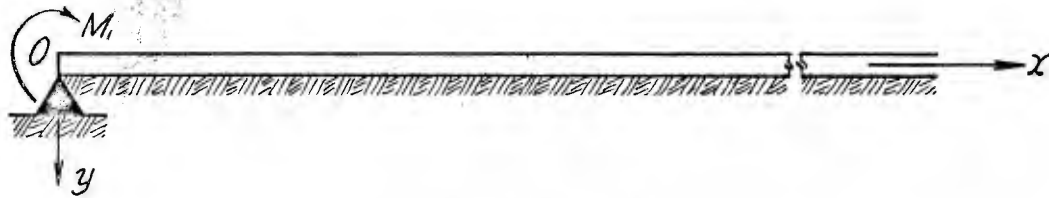
$$M = \frac{\omega}{4\beta^2} [u C_{\beta x} - v D_{\beta x} + (B_{\beta x} \pm B_{\beta}|x-L|)]$$

$$V = -\frac{\omega}{4\beta} [2U D_{\beta x} - V A_{\beta x} - (C_{\beta x} - C_{\beta |x-L|})]$$

Debe tomarse siempre el valor absoluto de la diferencia $|x-L|$; en el doble signo del último término de la expresión para M , se toma el positivo para $x < L$ y el negativo para $x > L$.



III-5) Extremo articulado; momento aplicado en el extremo



Para este caso se tiene que $y_A = 0$; $M_A = -M_1$

Si se sustituyen esos valores en las expresiones (3-3) y (3-4) se obtiene que:

$$P_0 = 0; \quad M_0 = 2M_1$$

Si se aplican las cargas compensadoras a la viga considerada como infinita se llega a las siguientes expresiones:

$$y = \frac{2M_1 \beta^2}{K} B_{\beta x}$$

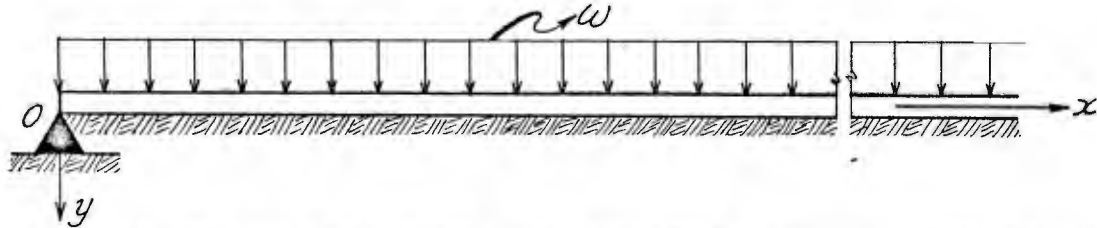
$$\theta = \frac{2M_1 \beta^3}{K} C_{\beta x}$$

$$M = M_1 D_{\beta x}$$

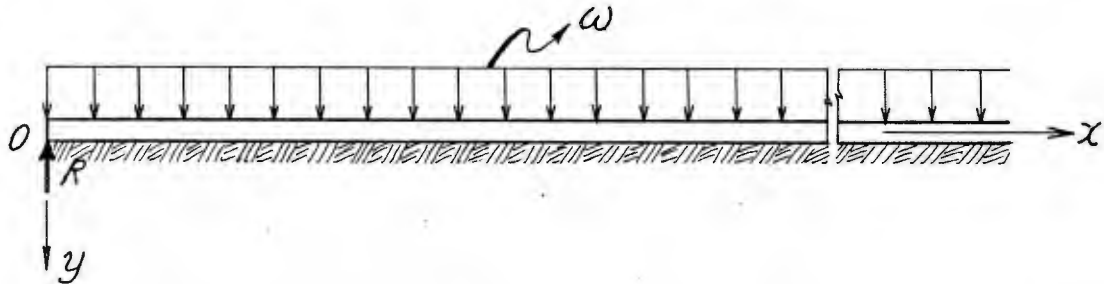
$$V = -M_1 \beta A_{\beta x}$$



III-6) Extremo articulado; carga uniformemente distribuida



El análisis de este caso se hará por medio del método de superposición. La viga del problema es equivalente a una viga semi-infinita con su extremo libre cargada así:



R es la reacción del apoyo en la viga original. Para hallar su valor se recurre a la condición $\sum y_A = 0$ y se hace uso de la expresión para y encontrada en el ejemplo III-1:

$$\frac{\omega}{R} - \frac{2R\beta}{R} D_{\beta}(0) = 0$$

de donde

$$R = \frac{\omega}{2\beta}$$

Aplicando ω y R a la viga semi-infinita considerando su extremo libre se obtiene:

$$y = \frac{\omega}{R}(1 - D_{\beta x})$$

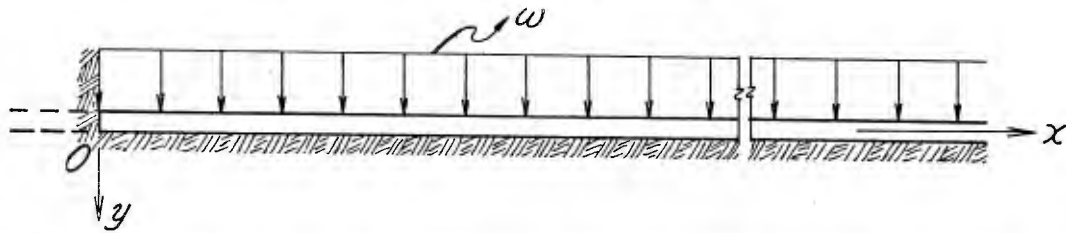
$$\theta = \frac{\omega\beta}{R} A_{\beta x}$$

$$M = \frac{\omega}{2\beta^2} B_{\beta x}$$

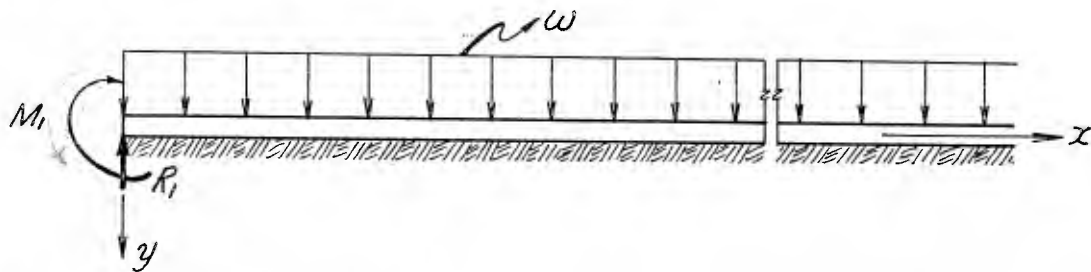
$$V = \frac{\omega}{2\beta} C_{\beta x}$$



III-7) Extremo fijo; carga uniformemente distribuida



Al igual que el ejemplo anterior, este caso se resolverá por superposición. La viga mostrada arriba es equivalente a una viga semi-infinita con su extremo libre y cargada como se muestra a continuación.



M_1 y R_1 son el momento y la reacción que desarrolla el empotramiento sobre la viga original. Para encontrar sus valores se utilizan las condiciones $\sum y = 0$; $\sum \theta = 0$ en el apoyo. Se hará uso de las expresiones para y y θ halladas con anterioridad en los ejemplos III-1 y III-3 respectivamente.

$$\frac{\omega}{K} - \frac{2R_1\beta}{K} D_{\beta}(0) - \frac{2M_1\beta^2}{K} C_{\beta}(0) = 0$$

$$\frac{2R_1\beta^2}{K} A_{\beta}(0) + \frac{4M_1\beta^3}{K} D_{\beta}(0) = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $R_1 = \frac{\omega}{\beta}$; $M_1 = -\frac{\omega}{2\beta^2}$

Aplicando ω , R , y M , a la viga semi-infinita con su extremo libre se llega a obtener:

$$y = \frac{\omega}{R} (1 - A_{\beta x})$$

$$\theta = \frac{2\omega\beta}{R} B_{\beta x}$$

$$M = -\frac{\omega}{2\beta^2} C_{\beta x}$$

$$V = \frac{\omega}{\beta} D_{\beta x}$$

CAPITULO IV

LA VIGA DE LONGITUD FINITA

4.1 Método General de Análisis

Para analizar una viga finita sometida a la acción de cargas externas, se hará uso del método de las cargas compensadoras ya antes utilizado en el Capítulo III.

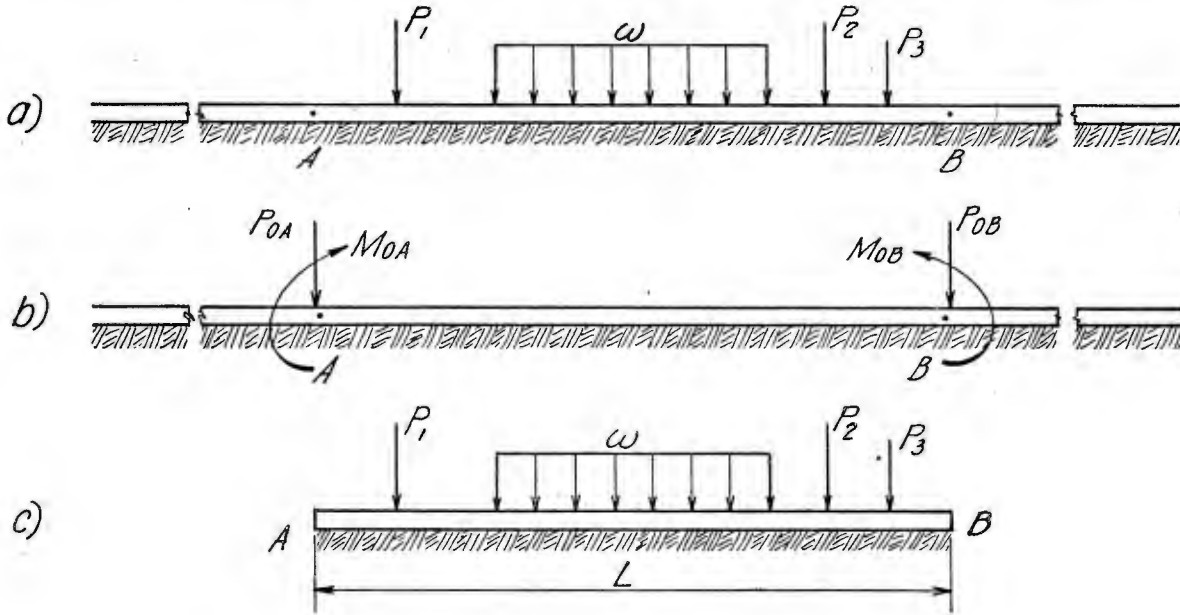


Fig. 19

Tal y como se expuso en el capítulo anterior, el método consiste en considerar la viga como una viga infinita (Fig. 19a) a la que se le aplican una carga y un momento - cargas compensadoras - en los puntos A y B (Fig. 19b). Estos puntos A y B son los que en realidad delimitan la extensión de la viga finita que se está analizando. (Fig. 19c).

Si se escogen adecuadamente los valores para P_{0A} , M_{0A} , P_{0B} y M_{0B} es posible por superposición de las situaciones representadas en las Figs. 19 a y 19b obtener una situación idéntica en el tramo AB de la viga infinita a la de la viga finita - AB representada en la Fig. 19c.

En otras palabras, mediante una conveniente escogencia de las cargas compensadoras se pueden reproducir en los puntos A y B de la viga finita las mismas condiciones que prevalecen en los extremos de la viga finita.

Este método de compensar los efectos de las cargas exteriores en los extremos de la viga se utilizó para obtener expresiones para la viga semi-infinita en el capítulo anterior; ahora, en el análisis de la viga finita hay una diferencia: como la viga tiene dos extremos, hay que considerar el efecto que producen las cargas compensadoras de un extremo en el otro, es decir P_{OA} y M_{OA} tendrán efecto sobre las condiciones existentes en el extremo B, y recíprocamente P_{OB} y M_{OB} ejercerán cierta influencia sobre el extremo A.

Se van a suponer como positivos para las cargas compensadoras los sentidos mostrados en la Fig. 19b.

Los valores correctos de estas cargas se determinan a partir de un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas. Estas ecuaciones deben satisfacer las condiciones de los extremos de la viga finita.

En las secciones siguientes se obtendrán las expresiones para las cargas compensadoras en vigas finitas que tienen sus extremos libres, articulados y empotrados.

4.2 Viga con los extremos libres

Considérese una viga de longitud infinita como la mostrada en la Fig. 20a, sometida a la acción de varias cargas externas. A partir de esa viga se obtendrá una solución para la viga finita AB mostrada en la Fig. 20c que tiene sus extremos libres y soporta las mismas cargas externas que la viga infinita.

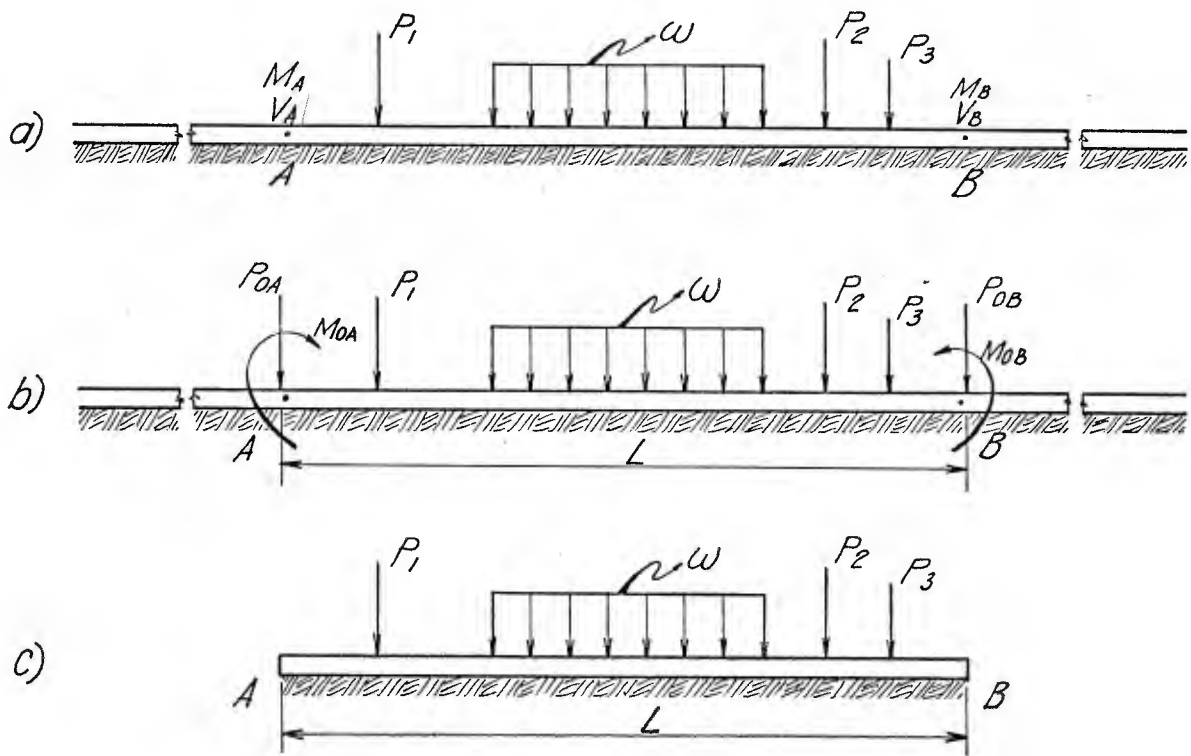


Fig. 20

Debido a la acción de las cargas externas, en la viga infinita de la Fig. 20a se producen en los puntos A y B momentos flectores y esfuerzos cortantes de valores M_A , V_A , M_B y V_B respectivamente. En cambio, en los puntos extremos A y B de la viga finita de la Fig. 20c., el momento y el esfuerzo cortante son nulos debido a su condición de extremos libres de una viga.

Para asemejar el tramo AB de la viga finita de la Fig. 20a. con la viga finita AB de la Fig. 20c, se debe anular el momento flector y el esfuerzo cortante en los puntos A y B de la primera. Para lograrlo se aplican las cargas compensadoras P_{OA} , M_{OA} , P_{OB} y M_{OB} en dichos puntos, tal y como se muestra en la Fig. 20b. Estas cargas compensadoras por lo tanto deben tener valores tales que produzcan $-M_A$, $-V_A$, $-M_B$ y $-V_B$ en los puntos A y B.

Para obtener los valores de las cargas compensadoras se utilizan las condiciones $\sum V=0$, $\sum M=0$ en A y B y las expresiones (2-11), (2-12), (2-15) y (2-16):

$$\left. \begin{aligned}
 V_A - \frac{P_{OA}}{2} + \frac{P_{OB}}{2} D_{\beta L} - \frac{\beta M_{OA}}{2} + \frac{\beta M_{OB}}{2} A_{\beta L} &= 0 \\
 M_A + \frac{P_{OA}}{4\beta} + \frac{P_{OB}}{4\beta} C_{\beta L} + \frac{M_{OA}}{2} + \frac{M_{OB}}{2} D_{\beta L} &= 0 \\
 V_B - \frac{P_{OA}}{2} D_{\beta L} + \frac{P_{OB}}{2} - \frac{\beta M_{OA}}{2} A_{\beta L} + \frac{\beta M_{OB}}{2} &= 0 \\
 M_B + \frac{P_{OA}}{4\beta} C_{\beta L} + \frac{P_{OB}}{4\beta} + \frac{M_{OA}}{2} D_{\beta L} + \frac{M_{OB}}{2} &= 0
 \end{aligned} \right\} (4-1)$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones se podría determinar los valores de las cargas compensadoras, pero las operaciones y cálculos que sería necesario efectuar serían muy engorrosos y las expresiones obtenidas serían muy complicadas. Así las cosas, y para simplificar la solución del problema se va a descomponer cualquier carga original sobre la viga en dos partes: una parte simétrica y otra antisimétrica. Lo anterior se ilustra a continuación en forma sencilla - para una carga concentrada en la Fig. 21.

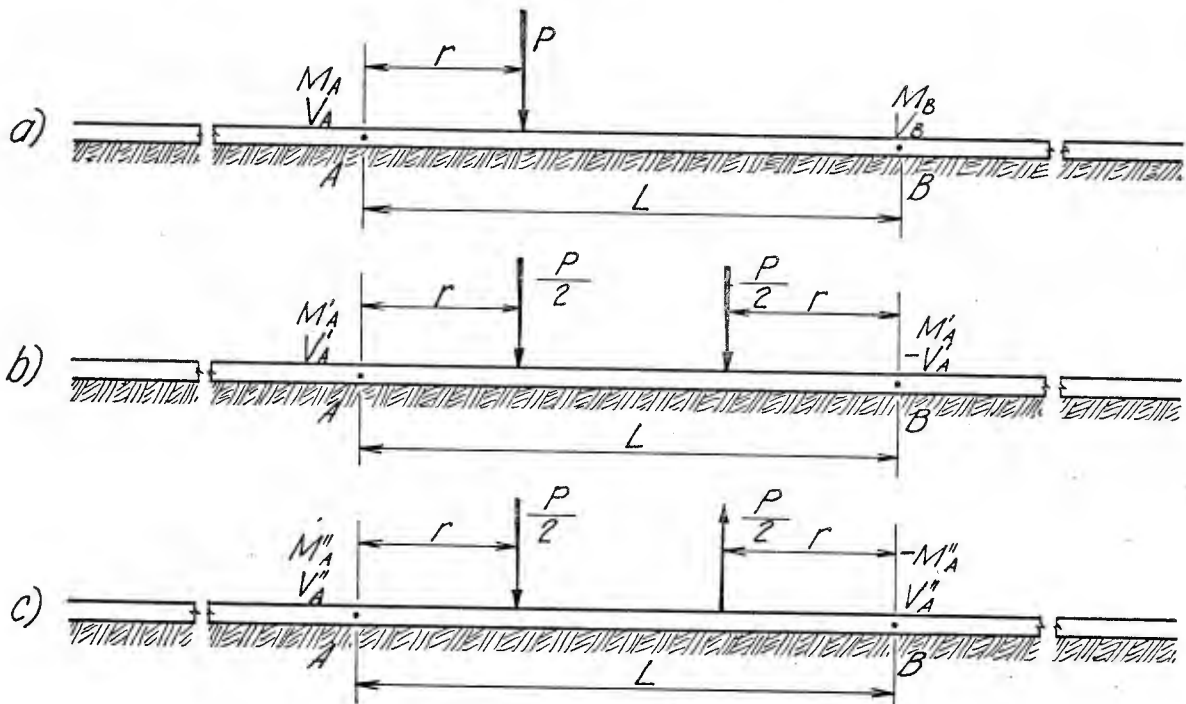


Fig. 21

Al descomponer la carga original en dos partes, en realidad lo que se está haciendo es descomponer el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas en dos sistemas de dos incógnitas cada uno; esto se nota con más claridad observando las Figs. 21b y 21c donde los momentos y los esfuerzos cortantes en A y B son iguales en valor absoluto, diferenciándose únicamente en los signos. Por lo tanto la determinación de los valores de las cargas compensadoras en cada uno de los casos representados en las Figs. 21b y 21c requiere la solución de un sistema con sólo dos ecuaciones.

El valor de las cargas compensadoras para la carga original se obtiene sumando los valores obtenidos para la parte simétrica y para la parte anti-simétrica.

Se llamará con M_A , V_A , M_B y V_B los momentos y esfuerzos cortantes en A y B debidos a la carga original; M'_A y V'_A representan el momento y el esfuerzo cortante en A debidos a la parte simétrica de la carga. En el punto B los valores son los mismos con la diferencia de que el esfuerzo cortante tiene signo contrario; y se denotará con M''_A y V''_A el momento y el esfuerzo cortante en A debidos a la parte anti-simétrica de la carga original. En B los valores son los mismos, sólo que el momento tiene signo contrario.

De lo dicho anteriormente y de la Fig. 21 se deduce que:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= M'_A + M''_A \\ V_A &= V'_A + V''_A \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} M_B &= M'_A - M''_A \\ V_B &= -V'_A + V''_A \end{aligned} \right\}$$

De las igualdades anteriores se obtienen las siguientes expresiones para las partes simétricas y antisimétricas de M_A y V_A :

$$\left. \begin{aligned} M'_A &= \frac{1}{2} (M_A + M_B) & V'_A &= \frac{1}{2} (V_A - V_B) \\ M''_A &= \frac{1}{2} (M_A - M_B) & V''_A &= \frac{1}{2} (V_A + V_B) \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

Seguidamente se procede a anular los momentos y esfuerzos cortantes que las cargas externas producen en A y B. Para ello se aplican en esos puntos P'_0 y M'_0 en la parte simétrica, y P''_0 y M''_0 en la parte antisimétrica. Esto se muestra claramente en la Fig. 22.

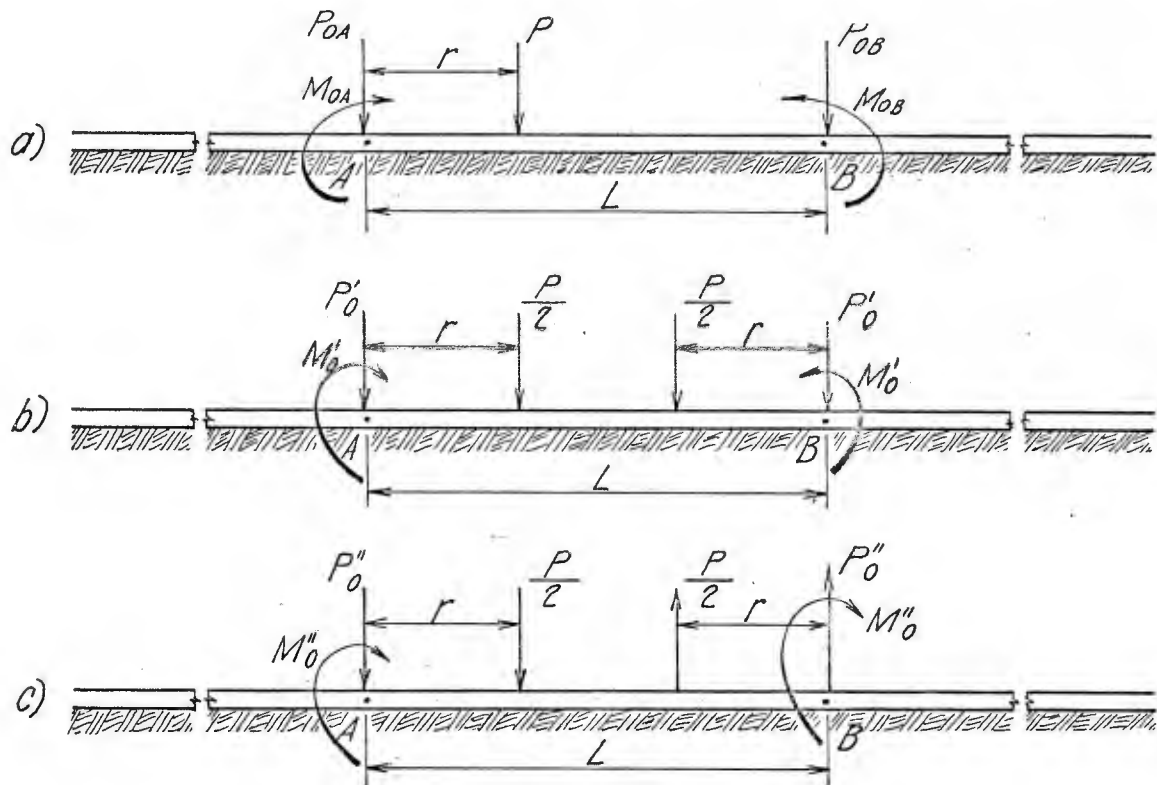


Fig. 22.

El sentido en que actúan las cargas compensadoras en la Fig. 22 se considerará como positivo.

Si se superponen las componentes simétricas y antisimétricas de las Figs. 22b y 22 c, se obtendrán las cargas compensadoras para el caso inicial mostrado en la Fig. 22 a.

$$\left. \begin{aligned} P_{OA} &= P'_0 + P''_0 & P_{OB} &= P'_0 - P''_0 \\ M_{OA} &= M'_0 + M''_0 & M_{OB} &= M'_0 - M''_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

Tal y como se apuntó anteriormente, para anular los momentos y esfuerzos cortantes de los puntos A y B de la viga infinita es necesario que las cargas compensadoras P_{OA} , M_{OA} , P_{OB} y M_{OB} produzcan $-M_A$ y $-V_A$ en el punto A, y $-M_B$ y $-V_B$ en el punto B. Haciendo referencia a las componentes simétricas y antisimétricas de las Figs. 21, 22, se ve que lo anterior se cumple siempre y cuando:

$$\begin{aligned} a) \quad P'_0 \text{ y } M'_0 \text{ produzcan} & \left\{ \begin{aligned} -M'_A \text{ y } -V'_A \text{ en el punto A} \\ -M'_A \text{ y } +V'_A \text{ en el punto B} \end{aligned} \right. \\ y \quad b) \quad P''_0 \text{ y } M''_0 \text{ produzcan} & \left\{ \begin{aligned} -M''_A \text{ y } -V''_A \text{ en el punto A} \\ +M''_A \text{ y } -V''_A \text{ en el punto B} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si se aplican las expresiones (2-11), (2-12), (2-15), y (2-16) a la condición a), se podrá escribir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P'_0}{4\beta}(1+C_{\beta L}) + \frac{M'_0}{2}(1+D_{\beta L}) &= -M'_A \\ -\frac{P'_0}{2}(1-D_{\beta L}) - \frac{\beta M'_0}{2}(1-A_{\beta L}) &= -V'_A \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

Aplicando las mismas expresiones a la condición b), se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P''_0}{4\beta}(1-C_{\beta L}) + \frac{M''_0}{2}(1-D_{\beta L}) &= -M''_A \\ -\frac{P''_0}{2}(1+D_{\beta L}) - \frac{\beta M''_0}{2}(1+A_{\beta L}) &= -V''_A \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

Resolviendo el sistema (4-4), se llega a obtener:

$$P'_0 = 4Y' \left[V'_A (1 + D_{\beta L}) + \beta M'_A (1 - A_{\beta L}) \right] \quad (4-6)$$

$$M'_0 = -\frac{2}{\beta} Y' \left[V'_A (1 + C_{\beta L}) + 2\beta M'_A (1 - D_{\beta L}) \right] \quad (4-7)$$

donde

$$Y' = \frac{1}{2(1 + D_{\beta L})(1 - D_{\beta L}) - (1 - A_{\beta L})(1 + C_{\beta L})}$$

Asimismo, resolviendo el sistema (4-5), se obtiene:

$$P''_0 = 4Y'' \left[V''_A (1 - D_{\beta L}) + \beta M''_A (1 + A_{\beta L}) \right] \quad (4-8)$$

$$M''_0 = -\frac{2}{\beta} Y'' \left[V''_A (1 - C_{\beta L}) + 2\beta M''_A (1 + D_{\beta L}) \right] \quad (4-9)$$

donde

$$Y'' = \frac{1}{2(1 + D_{\beta L})(1 - D_{\beta L}) - (1 + A_{\beta L})(1 - C_{\beta L})}$$

En las páginas finales se encuentra una tabla con los valores de Y' y Y'' , para una variación de βL desde 0.00 hasta 5.00.

Vale la pena hacer notar que en las expresiones (4-6), (4-7), (4-8) y (4-9) tanto los valores de Y' como los de los términos que aparecen multiplicando a V'_A , M'_A , V''_A y M''_A son funciones exclusivas de βL , y por lo tanto sus valores se calculan una sola vez para cada viga, pudiéndose utilizar para calcular las cargas compensadoras con cualquier tipo de carga externa que afecte a la viga. Se resume a continuación el procedimiento seguido para el cálculo de las cargas compensadoras de una viga finita con los extremos libres. Primeramente se calculan por medio de las expresiones encontradas en el Capítulo II los valores de los momentos y esfuerzos cortantes en los puntos extremos debidos a las cargas externas sobre la viga; luego se descomponen esos valores en dos partes: simétrica y antisimétrica de acuerdo con (4-2); seguidamente por medio de (4-6), (4-7), (4-8),

y (4-9) se encuentran los componentes de las cargas compensadoras y finalmente se suman de acuerdo con (4-3).

4.3 Viga con los extremos articulados

En este caso se trata de asemejar la viga infinita de la Fig. 23 a. mediante la aplicación de las cargas compensadoras (Fig. 23b) a la viga finita AB con sus extremos articulados que se muestran en la Fig. 23c.

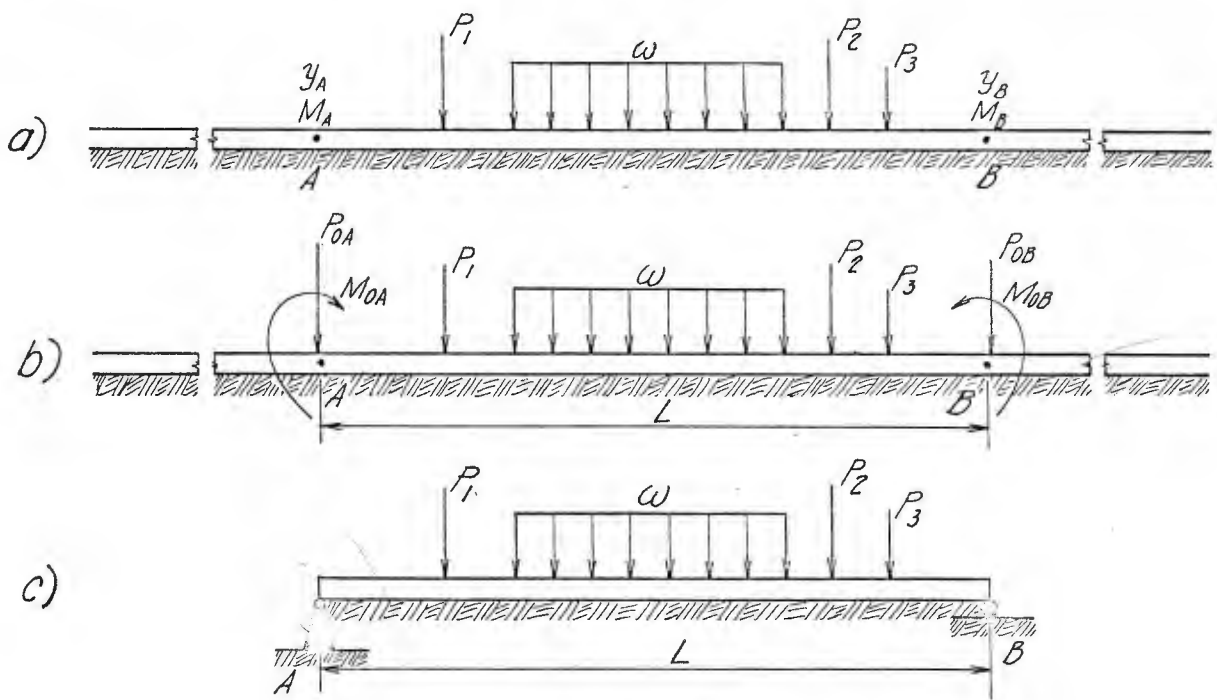


Fig. 23

En virtud de tener la viga finita sus extremos articulados, los efectos de las cargas compensadoras deben ser tales que produzcan las condiciones $\sum y = 0$, $\sum M = 0$ en los puntos A y B.

Para simplificar el procedimiento mediante el cual se hallarán los valores de las cargas compensadoras, se descomponen las cargas externas aplicadas a la viga con arreglo al siguiente esquema:

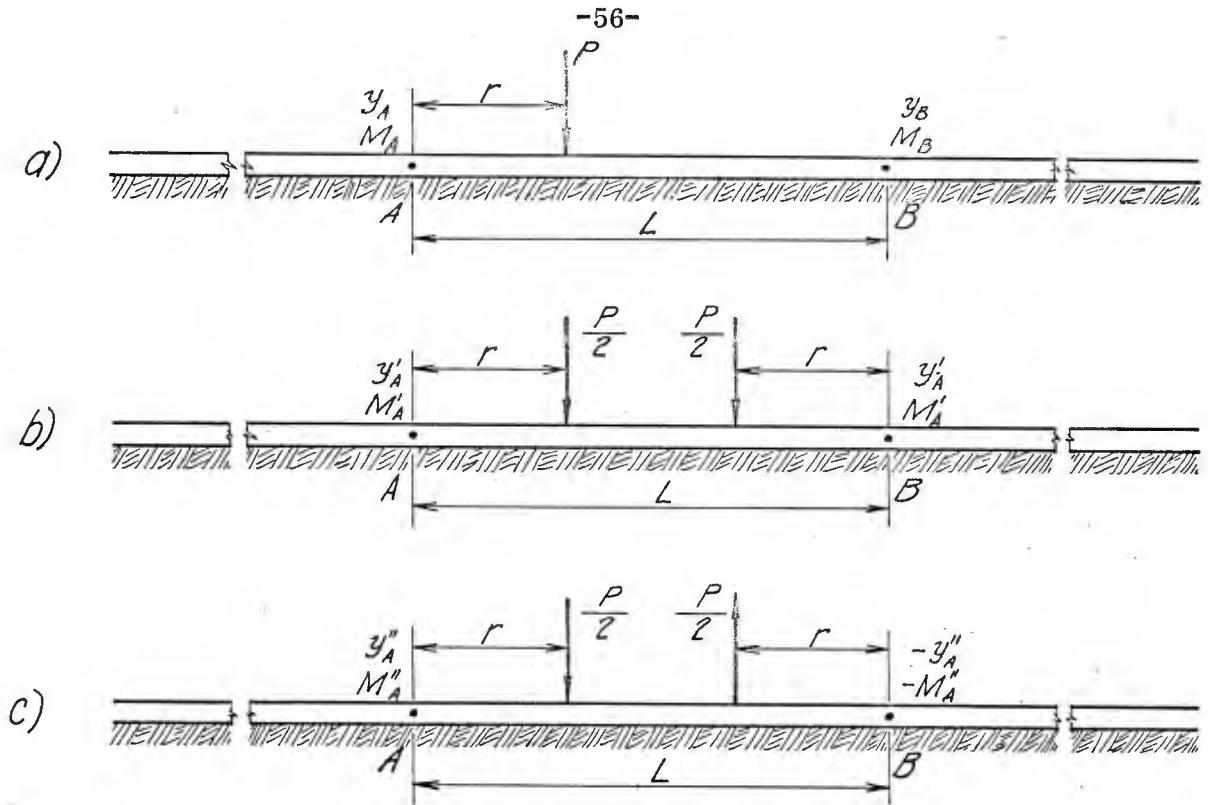


Fig. 24

Se designa con y_A, M_A, y_B y M_B las deflexiones y momentos que producen en A y B debidos a la carga original; y'_A y M'_A son la deflexión y el momento en A y B debidos a la parte simétrica de la carga; y y''_A y M''_A representan la deflexión y el momento en A debidos a la parte antisimétrica de dicha carga. En el punto B los valores son los mismos pero con signo contrario.

De acuerdo con lo dicho y con la Fig. 24 se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} y_A &= y'_A + y''_A \\ y_B &= y'_A - y''_A \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} M_A &= M'_A + M''_A \\ M_B &= M'_A - M''_A \end{aligned} \right\}$$

De estos dos sistemas se derivan las siguientes expresiones para las partes simétrica y antisimétrica de y_A y M_A :

$$\left. \begin{aligned} y'_A &= \frac{1}{2}(y_A + y_B) \\ y''_A &= \frac{1}{2}(y_A - y_B) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} M'_A &= \frac{1}{2}(M_A + M_B) \\ M''_A &= \frac{1}{2}(M_A - M_B) \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

Para anular las deflexiones y momentos que las cargas externas producen en A y B (Fig. 23a), se aplican en esos puntos las partes simétrica y antisimétrica - de las cargas compensadoras, tal y como se mostró anteriormente en la Fig. 22. Es necesario que P_{0A} , M_{0A} , P_{0B} y M_{0B} produzcan $-y_A$ y $-M_A$ en el punto A, y $-y_B$ y $-M_B$ en el punto B. Haciendo referencia a las componentes simétricas y antisimétricas de las Figs. 24, y 22, se nota que eso se cumple siempre y cuando:

$$\begin{aligned}
 a) P'_0 \text{ y } M'_0 \text{ produzcan } & \left\{ \begin{array}{l} -y'_A \text{ y } -M'_A \text{ en el punto A} \\ -y'_A \text{ y } -M'_A \text{ en el punto B} \end{array} \right. \\
 \text{y } b) P''_0 \text{ y } M''_0 \text{ produzcan } & \left\{ \begin{array}{l} -y''_A \text{ y } -M''_A \text{ en el punto A} \\ +y''_A \text{ y } +M''_A \text{ en el punto B} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones (2-9), (2-13), (2-11) y (2-15) a la condición a) se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{P'_0 \beta}{2R} (1 + A_{\beta L}) + \frac{M'_0 \beta^2}{R} B_{\beta L} &= -y'_A \\
 \frac{P'_0}{4\beta} (1 + C_{\beta L}) + \frac{M'_0}{2} (1 + D_{\beta L}) &= -M'_A
 \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

Las mismas expresiones aplicadas a la condición b) permiten escribir:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{P''_0 \beta}{2R} (1 - A_{\beta L}) - \frac{M''_0 \beta^2}{R} B_{\beta L} &= -y''_A \\
 \frac{P''_0}{4\beta} (1 - C_{\beta L}) + \frac{M''_0}{2} (1 - D_{\beta L}) &= -M''_A
 \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

Resolviendo el sistema (4-11) se obtiene:

$$P'_0 = 4\beta Z' \left[M'_A \cdot B_{\beta L} - 2\beta^2 EI y'_A (1 + D_{\beta L}) \right] \quad (4-13)$$

$$M'_0 = 2Z' \left[-M'_A (1 + A_{\beta L}) + 2\beta^2 EI y'_A (1 + C_{\beta L}) \right] \quad (4-14)$$

donde:

$$Z' = - \frac{1}{B_{\beta L}(1+C_{\beta L}) - (1+D_{\beta L})(1+A_{\beta L})}$$

Igualmente, resolviendo el sistema (4-12) se tiene:

$$P_0'' = - 4\beta Z'' [M_A'' B_{\beta L} + 2\beta^2 EI y_A'' (1-D_{\beta L})] \quad (4-15)$$

$$M_0'' = - 2 Z'' [M_A'' (1-A_{\beta L}) - 2\beta^2 EI y_A'' (1-C_{\beta L})] \quad (4-16)$$

donde:

$$Z'' = \frac{1}{B_{\beta L}(1-C_{\beta L}) + (1-D_{\beta L})(1-A_{\beta L})}$$

En las páginas finales se encuentra una tabla para valores de Z' y Z'' , variando βL desde 0.00 hasta 5.00

Finalmente por medio de las expresiones (4-3) se obtienen los valores buscados de las cargas compensadoras.

4.4 Viga con los extremos fijos

Por medio de la aplicación de cargas compensadoras se llevará una viga infinita a condiciones equivalentes a las de una viga finita con sus extremos fijos (Fig. 25).

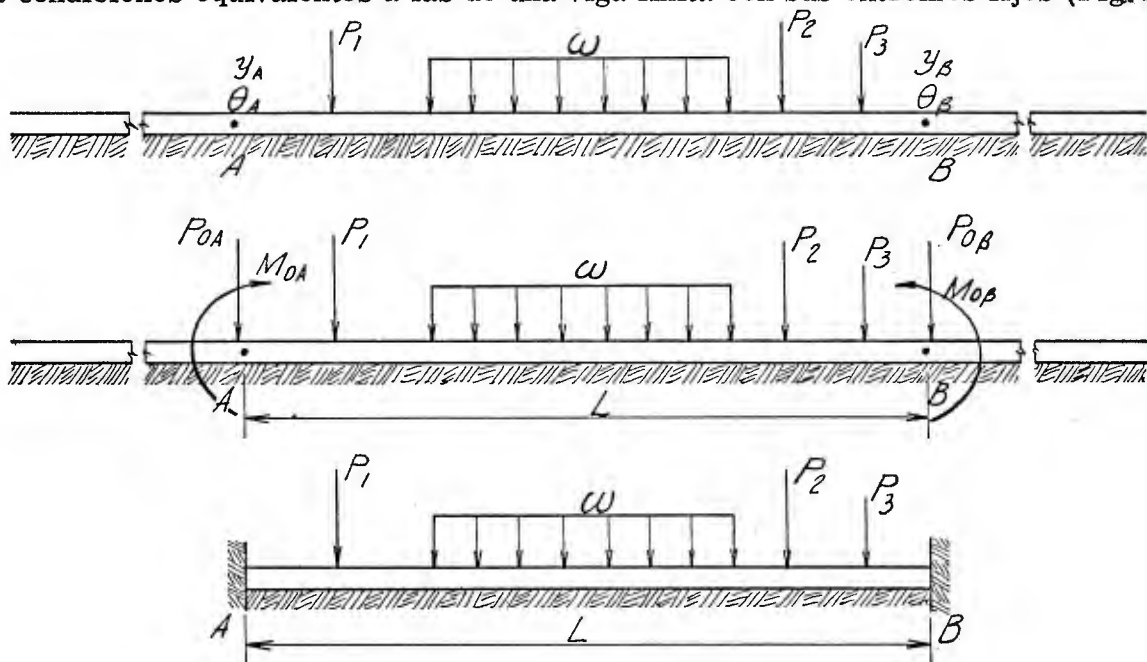


Fig. 25

Las condiciones que deben propiciar las cargas compensadoras de la viga infinita son $\sum y = 0$, $\sum \theta = 0$ en los puntos A y B.

Al igual que en los casos anteriores, se descomponen las cargas externas en dos partes: simétrica y antisimétrica.

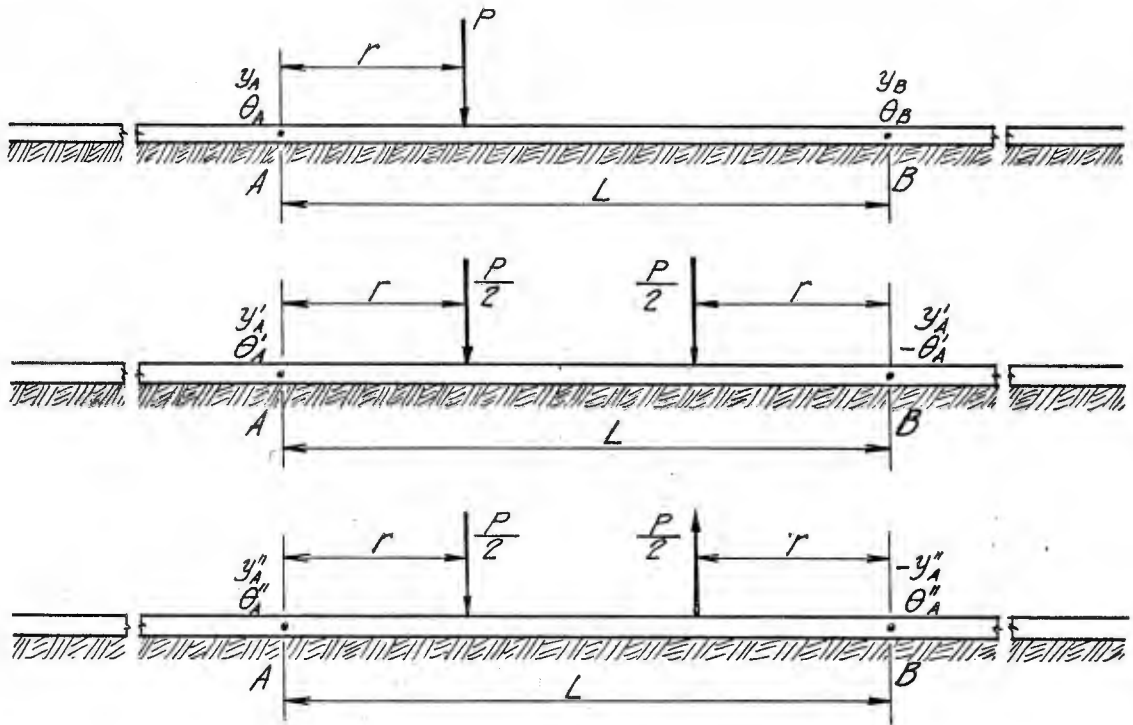


Fig. 26

De acuerdo con la Fig. 26 se tiene:

$$\left. \begin{aligned} y_A &= y'_A + y''_A \\ y_B &= y'_A - y''_A \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \theta_A &= \theta'_A + \theta''_A \\ \theta_B &= -\theta'_A + \theta''_A \end{aligned} \right\}$$

Luego,

$$\left. \begin{aligned} y'_A &= \frac{1}{2} (y_A + y_B) \\ y''_A &= \frac{1}{2} (y_A - y_B) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \theta'_A &= \frac{1}{2} (\theta_A - \theta_B) \\ \theta''_A &= \frac{1}{2} (\theta_A + \theta_B) \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

Para anular las deflexiones y los giros que las cargas externas producen en A y B (Fig. 25a) es necesario que las cargas compensadoras P_{DA} , M_{DA} , P_{DB} y M_{DB} produzcan $-y_A$ y $-\theta_A$ en el punto A y $-y_B$ y $-\theta_B$ en el punto B. De acuer

do con las Figs. 22 y 26 lo anterior implica que:

$$\begin{aligned}
 a) P'_0 \text{ y } M'_0 \text{ deben producir } & \left\{ \begin{array}{l} -y'_A \text{ y } -\theta'_A \text{ en el punto } A \\ -y'_A \text{ y } +\theta'_A \text{ en el punto } B \end{array} \right. \\
 \text{y } b) P''_0 \text{ y } M''_0 \text{ deben producir } & \left\{ \begin{array}{l} -y''_A \text{ y } -\theta''_A \text{ en el punto } A \\ +y''_A \text{ y } -\theta''_A \text{ en el punto } B \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Mediante la aplicación de (2-9), (2-13), (2-10) y (2-14) a la condición a), se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{P'_0 \beta}{2R} (1+A_{\beta L}) + \frac{M'_0 \beta^2}{R} \cdot B_{\beta L} &= -y'_A \\
 \frac{P'_0 \beta^2}{R} \cdot B_{\beta L} + \frac{M'_0 \beta^3}{R} (1-C_{\beta L}) &= -\theta'_A
 \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

Si se aplican a la condición b) las mismas expresiones, es posible escribir:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{P''_0 \beta}{2R} (1-A_{\beta L}) - \frac{M''_0 \beta^2}{R} \cdot B_{\beta L} &= -y''_A \\
 -\frac{P''_0 \beta^2}{R} \cdot B_{\beta L} + \frac{M''_0 \beta^3}{R} (1+C_{\beta L}) &= -\theta''_A
 \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

De la solución del sistema (4-18) resulta que:

$$P'_0 = 8\beta^2 EIY' \left[\theta'_A \cdot B_{\beta L} - y'_A \beta (1-C_{\beta L}) \right] \quad (4-20)$$

$$M'_0 = -4\beta EIY' \left[\theta'_A (1+A_{\beta L}) - y'_A \cdot 2\beta B_{\beta L} \right] \quad (4-21)$$

Resolviendo el sistema (4-19) se encuentra que:

$$P''_0 = -8\beta^2 EIY'' \left[\theta''_A \cdot B_{\beta L} + \beta y''_A (1+C_{\beta L}) \right] \quad (4-22)$$

$$M''_0 = -4\beta EIY'' \left[\theta''_A (1-A_{\beta L}) + y''_A \cdot 2\beta B_{\beta L} \right] \quad (4-23)$$

Finalmente, los valores de las cargas compensadoras se obtienen sumando los componentes de acuerdo con las expresiones (4-3).

4.5 Clasificación de las vigas de acuerdo con su rigidez

En general el análisis de las vigas sobre fundación elástica se hace clasificándolas en tres grupos, de acuerdo con los valores de βL que caracterizan la rigidez relativa de las vigas. Estos grupos son:

- 1) Vigas cortas: $\beta L < \frac{\pi}{4}$ (vigas rígidas)
- 2) Vigas de longitud media: $\frac{\pi}{4} < \beta L < \pi$ (vigas finitas)
- 3) Vigas largas: $\beta L > \pi$ (vigas infinitas)

Para efectos prácticos, en las vigas del primer grupo la flexión puede despreciarse y considerar la viga como absolutamente rígida. Por lo tanto, la deflexión de una fundación a la que se le aplica una carga puede obtenerse con gran aproximación empleando la fórmula $y = \frac{P}{kL}$.

La característica esencial de las vigas del segundo grupo es que una carga actuando en un extremo tiene un efecto considerable, no despreciable sobre el otro. Las vigas de este grupo deben analizarse de acuerdo con lo expuesto para las vigas de longitud finita.

En las vigas del tercer grupo puede suponerse al analizar un extremo que el otro está infinitamente lejos, y por consiguiente puede considerarse la viga como de longitud infinita. Esto quiere decir que βL es tan grande que con aproximación los valores de $A_{\beta L}$, $B_{\beta L}$, $C_{\beta L}$ y $D_{\beta L}$ pueden tomarse como iguales a cero, sin que por ello se obtengan variaciones sustanciales en los resultados.

Cabe señalar que los valores para βL antes apuntados y que clasifican las vigas en tres grupos son sólo una recomendación general. Esos valores-límite para βL pueden disminuirse o aumentarse según sea la menor o mayor precisión que se desee obtener en los resultados al resolver un problema específico. Al respecto, Pasternak insinúa para vigas de longitud media, $0.75 < \beta L < 3.00$; al contrario, Timoshenko es mucho más riguroso y para el mismo grupo de vigas recomienda -.....

$$0.60 < \beta L < 5.00.$$

Finalmente, como ilustración, considérese la viga de la Fig. 27 con sus extremos libres y con una carga P al centro.

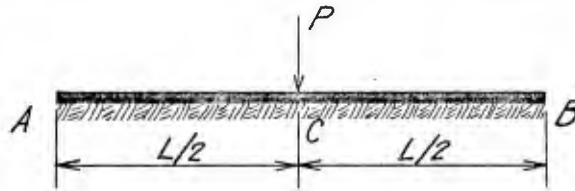


Fig. 27

Suponiendo que para dicha viga -

$\beta L = 0.60$, si se analiza como viga finita se obtiene que :

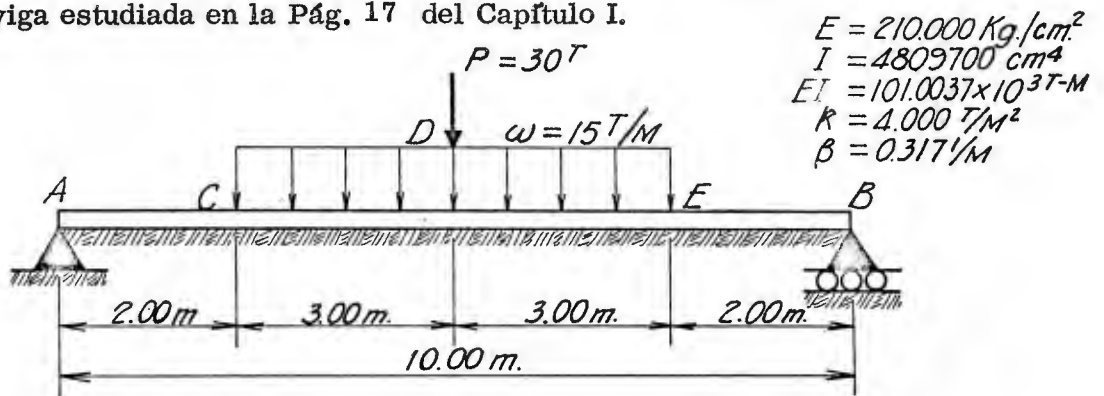
$$y_A = 0.9976 \frac{P}{RL} \quad \text{y} \quad y_C = 1.0017 \frac{P}{RL}$$

Como se ve, la diferencia entre -

las deflexiones del centro y de los extremos es menos que el 0.5%. Esta diferencia tan pequeña demuestra que no se incurre en ningún error apreciable si se desprecia y se considera la viga como rígida, utilizando la expresión $y = \frac{P}{RL}$ para calcular su deflexión, considerada como uniforme en toda su longitud.

4.6 Ejemplo

Para ilustrar el empleo del método de las cargas compensadoras se analizará la misma viga estudiada en la Pág. 17 del Capítulo I.



$$\begin{aligned} E &= 210.000 \text{ Kg./cm}^2 \\ I &= 4809700 \text{ cm}^4 \\ EI &= 101.0037 \times 10^3 \text{ T-M} \\ R &= 4.000 \text{ T/M}^2 \\ \beta &= 0.317 \text{ 1/M} \end{aligned}$$

Se van a encontrar

$$\theta_A, V_A, y_D \text{ y } M_D$$

- 1) Se hallan los valores para y y M en los extremos de la viga considerada como finita. Para ello se utilizan las expresiones (2-9), (2-11), (2-18) y (2-20).

$$y_A^p = \frac{P\beta}{2R} A_{\beta x} = \frac{30 \times 0.317}{2 \times 4000} (0.2020) = 0.2401 \times 10^{-3} m.$$

$$M_A^p = \frac{P}{4\beta} C_{\beta x} = \frac{30}{4 \times 0.317} (-0.2078) = -4.9164 T-M$$

$$y_A^w = \frac{w}{2R} (D_{\beta b} - D_{\beta c}) = \frac{15}{2 \times 4000} (0.4272 + 0.0651) = 0.9231 \times 10^{-3} M$$

$$M_A^w = \frac{-w}{4\beta^2} (B_{\beta b} - B_{\beta c}) = \frac{15}{4(0.317)^2} (0.0450 - 0.3143) = -10.0485 T-M$$

$$y_A = y_B = 1.1632 \times 10^{-3} M$$

$$M_A = M_B = -14.9649 T-M$$

- 2) Se obtienen las componentes simétricas y antisimétricas.

Por ser la carga simétrica, las componentes antisimétricas son iguales a cero; las simétricas serán:

$$\left. \begin{array}{l} y'_A = 1.1632 \times 10^{-3} M \\ M'_A = -14.9649 T-M \end{array} \right\} \text{A partir de las expresiones (4-10)}$$

- 3) Se calculan las componentes de las cargas compensadoras. Se hace uso de las expresiones (4-13) y (4-14).

$$\begin{aligned} P'_0 &= 4\beta Z' [M'_A B_{\beta L} - 2\beta^2 EI y'_A (1 + D_{\beta L})] \\ &= 4(0.317) \times 1.08959 [-14.9649(-0.0012) - 2(0.317)^2 \times 101.0037 \times 10^3 \times 1.1632 \times 10^{-3} (0.9580)] \\ \underline{P'_0} &= \underline{-31.2279 T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'_0 &= 2Z' [-M'_A (1 + A_{\beta L}) + 2\beta^2 EI y'_A (1 + C_{\beta L})] \\ &= 2 \times 1.08959 [+14.9649(0.9568) + 2(0.317)^2 \times 101.0037 \times 10^3 \times 1.1632 \times 10^{-3} \times (0.9593)] \\ \underline{M'_0} &= \underline{82.2658 T-M} \end{aligned}$$

- 4) Se obtienen los valores para las cargas compensadoras por medio de la expresión (4-3).

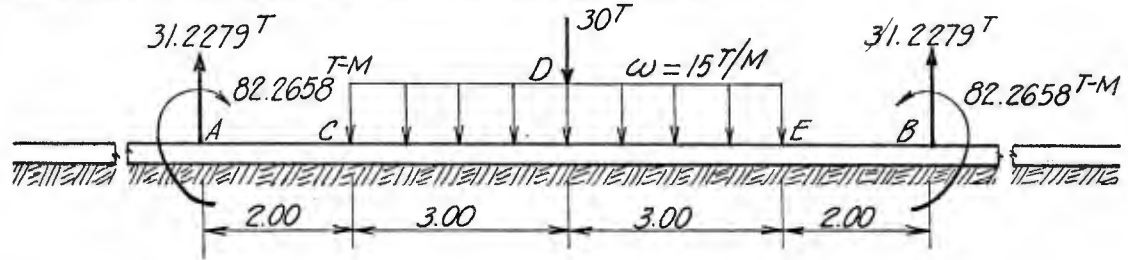
Por simetría, en este caso las componentes antisimétricas son iguales a cero.

Luego,

$$P_{OA} = P_{OB} = -31.2279 \text{ TON}$$

$$M_{OA} = M_{OB} = 82.2658 \text{ T-M}$$

La viga infinita queda entonces en la siguiente forma:



- 5) Haciendo uso de las expresiones encontradas en el Capítulo II para la viga infinita y por superposición, se encontrarán θ_A , V_A , y_D y M_D para la viga finita según el cuadro siguiente:

CARGAS	θ_A en $\text{rad} \times 10^{-3}$	V_A en TON	y_D en mm	M_D en TON-M
P	0.1545	-0.0435	1.1887	23.6593
ω	0.4527	2.6416	2.9081	23.4503
P_{OA}	0.0004	8.1349	-0.2499	5.1176
M_{OA}	0.3409	-6.8012	0.4237	-0.1193
P_{OB}	0.0004	8.1349	-0.2499	5.1176
M_{OB}	0.3409	-6.8012	0.4237	-0.1193
Sobre la viga finita	1.2898	5.2655	4.4444	57.1062

APENDICE

TABLAS

A continuación aparecen Tablas con las diferentes funciones usadas en la Tesis, para diferentes valores de βx .

$$F_1(\beta x) = \text{Cosh } \beta x \cdot \cos \beta x$$

$$F_2(\beta x) = \frac{1}{2}(\text{Cosh } \beta x \cdot \text{sen } \beta x + \text{Senh } \beta x \cdot \cos \beta x)$$

$$F_3(\beta x) = \frac{1}{2} \text{Senh } \beta x \cdot \text{sen } \beta x$$

$$F_4(\beta x) = \frac{1}{4}(\text{Cosh } \beta x \cdot \text{sen } \beta x - \text{Senh } \beta x \cdot \cos \beta x)$$

$$A_{\beta x} = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \text{sen } \beta x)$$

$$B_{\beta x} = e^{-\beta x} \text{sen } \beta x$$

$$C_{\beta x} = e^{-\beta x}(\cos \beta x - \text{sen } \beta x)$$

$$D_{\beta x} = e^{-\beta x} \cos \beta x$$

$$Y' = \frac{1}{2(1+D_{\beta x})(1-D_{\beta x}) - (1-A_{\beta x})(1+C_{\beta x})}$$

$$Y'' = \frac{1}{2(1+D_{\beta x})(1-D_{\beta x}) - (1+A_{\beta x})(1-C_{\beta x})}$$

$$Z' = -\frac{1}{B_{\beta x}(1+C_{\beta x}) - (1+D_{\beta x})(1+A_{\beta x})}$$

$$Z'' = \frac{1}{B_{\beta x}(1-C_{\beta x}) + (1-D_{\beta x})(1-A_{\beta x})}$$

TABLE I

β_x	$F_1(\beta_x)$	$F_2(\beta_x)$	$F_3(\beta_x)$	$F_4(\beta_x)$
0.000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.001	1.0000	0.0010	0.0000	0.0000
0.002	1.0000	0.0020	0.0000	0.0000
0.003	1.0000	0.0030	0.0000	0.0000
0.004	1.0000	0.0040	0.0000	0.0000
0.005	1.0000	0.0050	0.0000	0.0000
0.006	1.0000	0.0060	0.0000	0.0000
0.007	1.0000	0.0070	0.0000	0.0000
0.008	1.0000	0.0080	0.0000	0.0000
0.009	1.0000	0.0090	0.0000	0.0000
<hr/>				
0.010	1.0000	0.0100	0.0001	0.0000
0.011	1.0000	0.0110	0.0001	0.0000
0.012	1.0000	0.0120	0.0001	0.0000
0.013	1.0000	0.0130	0.0001	0.0000
0.014	1.0000	0.0140	0.0001	0.0000
0.015	1.0000	0.0150	0.0001	0.0000
0.016	1.0000	0.0160	0.0001	0.0000
0.017	1.0000	0.0170	0.0001	0.0000
0.018	1.0000	0.0180	0.0002	0.0000
0.019	1.0000	0.0190	0.0002	0.0000
<hr/>				
0.02	1.0000	0.0200	0.0002	0.0000
0.03	1.0000	0.0300	0.0004	0.0000
0.04	1.0000	0.0400	0.0008	0.0000
0.05	1.0000	0.0500	0.0012	0.0000
0.06	1.0000	0.0600	0.0018	0.0000
0.07	1.0000	0.0700	0.0024	0.0000
0.08	1.0000	0.0800	0.0032	0.0001
0.09	1.0000	0.0900	0.0040	0.0001
<hr/>				
0.10	1.0000	0.1000	0.0050	0.0001
0.11	1.0000	0.1100	0.0060	0.0002
0.12	0.9999	0.1200	0.0072	0.0003
0.13	0.9999	0.1300	0.0084	0.0003
0.14	0.9999	0.1400	0.0098	0.0004
0.15	0.9999	0.1500	0.0112	0.0005
0.16	0.9998	0.1600	0.0128	0.0006
0.17	0.9998	0.1700	0.0144	0.0008
0.18	0.9997	0.1800	0.0162	0.0009
0.19	0.9997	0.1900	0.0180	0.0011

- 51 -
TABLA I

β_x	$F_1 (\beta_x)$	$F_2 (\beta_x)$	$F_3 (\beta_x)$	$F_4 (\beta_x)$
0.20	0.9997	0.2000	0.0200	0.0013
0.21	0.9996	0.2100	0.0220	0.0015
0.22	0.9996	0.2200	0.0242	0.0017
0.23	0.9996	0.2300	0.0264	0.0020
0.24	0.9995	0.2400	0.0288	0.0024
0.25	0.9994	0.2500	0.0312	0.0027
0.26	0.9993	0.2600	0.0338	0.0029
0.27	0.9992	0.2700	0.0365	0.0033
0.28	0.9991	0.2800	0.0392	0.0037
0.29	0.9988	0.2900	0.0421	0.0041
0.30	0.9986	0.3000	0.0450	0.0045
0.31	0.9984	0.3100	0.0481	0.0050
0.32	0.9982	0.3199	0.0512	0.0054
0.33	0.9980	0.3299	0.0545	0.0060
0.34	0.9978	0.3399	0.0578	0.0065
0.35	0.9975	0.3498	0.0613	0.0071
0.36	0.9972	0.3598	0.0648	0.0078
0.37	0.9968	0.3697	0.0685	0.0084
0.38	0.9966	0.3797	0.0722	0.0091
0.39	0.9961	0.3897	0.0761	0.0099
0.40	0.9958	0.3997	0.0800	0.0106
0.41	0.9952	0.4096	0.0841	0.0115
0.42	0.9948	0.4196	0.0882	0.0123
0.43	0.9944	0.4296	0.0925	0.0132
0.44	0.9938	0.4305	0.0968	0.0142
0.45	0.9931	0.4494	0.1012	0.0152
0.46	0.9925	0.4593	0.1058	0.0162
0.47	0.9919	0.4693	0.1104	0.0173
0.48	0.9911	0.4792	0.1152	0.0184
0.49	0.9904	0.4890	0.1199	0.0196
0.50	0.9896	0.4889	0.1249	0.0208
0.51	0.9887	0.5089	0.1300	0.0221
0.52	0.9878	0.5188	0.1351	0.0234
0.53	0.9869	0.5286	0.1403	0.0248
0.54	0.9858	0.5385	0.1457	0.0262
0.55	0.9847	0.5484	0.1511	0.0277
0.56	0.9836	0.5582	0.1566	0.0293
0.57	0.9824	0.5680	0.1623	0.0309
0.58	0.9812	0.5779	0.1680	0.0325
0.59	0.9798	0.5876	0.1738	0.0343

TABLA I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
0.60	0.9784	0.5974	0.1797	0.0360
0.61	0.9769	0.6072	0.1858	0.0378
0.62	0.9754	0.6170	0.1919	0.0397
0.63	0.9737	0.6267	0.1981	0.0416
0.64	0.9721	0.6364	0.2044	0.0437
0.65	0.9703	0.6462	0.2109	0.0457
0.66	0.9684	0.6558	0.2174	0.0479
0.67	0.9664	0.6656	0.2240	0.0501
0.68	0.9644	0.6751	0.2307	0.0524
0.69	0.9621	0.6848	0.2375	0.0547
0.70	0.9600	0.6944	0.2444	0.0571
0.71	0.9577	0.7040	0.2514	0.0596
0.72	0.9552	0.7136	0.2584	0.0621
0.73	0.9527	0.7231	0.2657	0.0648
0.74	0.9501	0.7326	0.2729	0.0675
0.75	0.9473	0.7421	0.2803	0.0702
0.76	0.9444	0.7515	0.2877	0.0731
0.77	0.9415	0.7610	0.2953	0.0760
0.78	0.9383	0.7704	0.3030	0.0790
$\frac{1}{4}\pi$	0.9366	0.7755	0.3072	0.0806
0.79	0.9351	0.7798	0.3108	0.0820
0.80	0.9318	0.7891	0.3186	0.0852
0.81	0.9283	0.7984	0.3265	0.0884
0.82	0.9247	0.8077	0.3345	0.0917
0.83	0.9210	0.8168	0.3426	0.0951
0.84	0.9171	0.8261	0.3508	0.0985
0.85	0.9131	0.8352	0.3591	0.1021
0.86	0.9089	0.8443	0.3675	0.1057
0.87	0.9046	0.8533	0.3760	0.1094
0.88	0.9002	0.8624	0.3846	0.1132
0.89	0.8956	0.8714	0.3933	0.1171
0.90	0.8908	0.8803	0.4020	0.1211
0.91	0.8860	0.8892	0.4109	0.1252
0.92	0.8808	0.8980	0.4198	0.1293
0.93	0.8755	0.9067	0.4288	0.1336
0.94	0.8701	0.9156	0.4380	0.1379
0.95	0.8645	0.9242	0.4471	0.1423
0.96	0.8587	0.9328	0.4564	0.1469
0.97	0.8528	0.9414	0.4658	0.1515
0.98	0.8466	0.9499	0.4753	0.1562
0.99	0.8403	0.9583	0.4848	0.1610

TABLA I

β_x	$F_1(\beta_x)$	$F_2(\beta_x)$	$F_3(\beta_x)$	$F_4(\beta_x)$
1.00	0.8337	0.9667	0.4944	0.1659
1.01	0.8271	0.9759	0.5041	0.1708
1.02	0.8201	0.9833	0.5139	0.1759
1.03	0.8129	0.9914	0.5238	0.1811
1.04	0.8055	0.9994	0.5337	0.1864
1.05	0.7981	1.0075	0.5438	0.1918
1.06	0.7903	1.0155	0.5539	0.1973
1.07	0.7822	1.0233	0.5641	0.2024
1.08	0.7739	1.0311	0.5744	0.2086
1.09	0.7655	1.0387	0.5847	0.2144
1.10	0.7568	1.0464	0.5951	0.2203
1.11	0.7480	1.0540	0.6056	0.2263
1.12	0.7388	1.0614	0.6162	0.2324
1.13	0.7294	1.0687	0.6269	0.2386
1.14	0.7197	1.0759	0.6376	0.2449
1.15	0.7097	1.0831	0.6484	0.2514
1.16	0.6994	1.0901	0.6592	0.2579
1.17	0.6892	1.0972	0.6702	0.2645
1.18	0.6783	1.1039	0.6812	0.2713
1.19	0.6674	1.1107	0.6923	0.2781
1.20	0.6562	1.1173	0.7034	0.2851
1.21	0.6445	1.1237	0.7146	0.2922
1.22	0.6326	1.1301	0.7259	0.2995
1.23	0.6205	1.1364	0.7372	0.3068
1.24	0.6082	1.1426	0.7486	0.3142
1.25	0.5954	1.1486	0.7601	0.3217
1.26	0.5824	1.1545	0.7716	0.3294
1.27	0.5691	1.1602	0.7832	0.3372
1.28	0.5554	1.1658	0.7948	0.3450
1.29	0.5415	1.1713	0.8065	0.3530
1.30	0.5272	1.1767	0.8183	0.3612
1.31	0.5125	1.1819	0.8300	0.3694
1.32	0.4977	1.1869	0.8418	0.3778
1.33	0.4824	1.1919	0.8538	0.3863
1.34	0.4668	1.1966	0.8657	0.3948
1.35	0.4508	1.2011	0.8777	0.4036
1.36	0.4344	1.2056	0.8898	0.4124
1.37	0.4177	1.2098	0.9018	0.4214
1.38	0.4007	1.2138	0.9139	0.4304
1.39	0.3833	1.2178	0.9261	0.4397

TABLA I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
1.40	0.3657	1.2216	0.9382	0.4489
1.41	0.3474	1.2251	0.9505	0.4584
1.42	0.3288	1.2284	0.9627	0.4680
1.43	0.3099	1.2317	0.9751	0.4777
1.44	0.2906	1.2348	0.9875	0.4875
1.45	0.2710	1.2375	0.9998	0.4974
1.46	0.2510	1.2403	1.0122	0.5075
1.47	0.2303	1.2425	1.0245	0.5177
1.48	0.2095	1.2448	1.0379	0.5280
1.49	0.1881	1.2467	1.0495	0.5384
1.50	0.1663	1.2485	1.0620	0.5490
1.51	0.1443	1.2502	1.0745	0.5596
1.52	0.1217	1.2515	1.0870	0.5704
1.53	0.0986	1.2526	1.0995	0.5814
1.54	0.0751	1.2534	1.1120	0.5924
1.55	0.0512	1.2541	1.1246	0.6036
1.56	0.0268	1.2544	1.1370	0.6149
1.57	0.0020	1.2546	1.1496	0.6264
$\frac{1}{2} \pi$	0.0000	1.2546	1.1506	0.6273
1.58	-0.0233	1.2545	1.1622	0.6380
1.59	-0.0490	1.2541	1.1747	0.6496
1.60	-0.0753	1.2535	1.1873	0.6615
1.61	-0.1020	1.2526	1.1998	0.6733
1.62	-0.1292	1.2514	1.2123	0.6854
1.63	-0.1569	1.2499	1.2248	0.6976
1.64	-0.1851	1.2482	1.2373	0.7100
1.65	-0.2135	1.2464	1.2498	0.7223
1.66	-0.2428	1.2440	1.2622	0.7349
1.67	-0.2723	1.2415	1.2747	0.7476
1.68	-0.3026	1.2385	1.2870	0.7604
1.69	-0.3332	1.2354	1.2994	0.7733
1.70	-0.3643	1.2320	1.3118	0.7864
1.71	-0.3963	1.2280	1.3240	0.7996
1.72	-0.4282	1.2241	1.3363	0.8128
1.73	-0.4611	1.2196	1.3486	0.8263
1.74	-0.4839	1.2147	1.3607	0.8398
1.75	-0.5282	1.2098	1.3729	0.8535
1.76	-0.5628	1.2042	1.3850	0.8674
1.77	-0.5978	1.1984	1.3970	0.8812
1.78	-0.6333	1.1922	1.4089	0.8953
1.79	-0.6692	1.1859	1.4208	0.9094

TABLE I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
1.80	-0.7060	1.1788	1.4326	0.9237
1.81	-0.7432	1.1716	1.4444	0.9380
1.82	-0.7810	1.1640	1.4560	0.9525
1.83	-0.8194	1.1561	1.4677	0.9672
1.84	-0.8586	1.1476	1.4792	0.9820
1.85	-0.8980	1.1389	1.4907	0.9968
1.86	-0.9382	1.1297	1.5020	1.0118
1.87	-0.9791	1.1200	1.5133	1.0269
1.88	-1.0203	1.1101	1.5244	1.0420
1.89	-1.0623	1.0997	1.5355	1.0573
1.90	-1.1049	1.0888	1.5464	1.0727
1.91	-1.1480	1.0776	1.5572	1.0882
1.92	-1.1922	1.0657	1.5678	1.1039
1.93	-1.2363	1.0538	1.5786	1.1196
1.94	-1.2816	1.0410	1.5889	1.1354
1.95	-1.3274	1.0281	1.5993	1.1514
1.96	-1.3735	1.0146	1.6095	1.1673
1.97	-1.4207	1.0006	1.6196	1.1836
1.98	-1.4684	0.9860	1.6294	1.1998
1.99	-1.5165	0.9712	1.6393	1.2161
2.00	-1.5658	0.9557	1.6489	1.2326
2.01	-1.6152	0.9400	1.6584	1.2491
2.02	-1.6654	0.9236	1.6677	1.2657
2.03	-1.7164	0.9066	1.6769	1.2824
2.04	-1.7682	0.8890	1.6858	1.2993
2.05	-1.8206	0.8712	1.6947	1.3162
2.06	-1.8734	0.8528	1.7033	1.3331
2.07	-1.9270	0.8339	1.7118	1.3502
2.08	-1.9815	0.8141	1.7199	1.3674
2.09	-2.0366	0.7941	1.7280	1.3846
2.10	-2.0920	0.7735	1.7358	1.4019
2.11	-2.1484	0.7523	1.7434	1.4193
2.12	-2.2058	0.7304	1.7508	1.4368
2.13	-2.2635	0.7082	1.7581	1.4544
2.14	-2.3223	0.6851	1.7650	1.4720
2.15	-2.3816	0.6616	1.7718	1.4897
2.16	-2.4413	0.6376	1.7783	1.5074
2.17	-2.5020	0.6129	1.7845	1.5252
2.18	-2.5633	0.5876	1.7905	1.5431
2.19	-2.6255	0.5615	1.7962	1.5610

TABLA I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
2.20	-2.6882	0.5350	1.8018	1.5790
2.21	-2.7519	0.5078	1.8070	1.5972
2.22	-2.8162	0.4800	1.8120	1.6153
2.23	-2.8810	0.4515	1.8166	1.6334
2.24	-2.9468	0.4222	1.8209	1.6515
2.25	-3.0132	0.3926	1.8251	1.6698
2.26	-3.0801	0.3623	1.8289	1.6880
2.27	-3.1481	0.3311	1.8323	1.7064
2.28	-3.2166	0.2993	1.8355	1.7246
2.29	-3.2862	0.2665	1.8381	1.7430
<hr/>				
2.30	-3.3563	0.2333	1.8407	1.7614
2.31	-3.4270	0.1995	1.8429	1.7798
2.32	-3.4988	0.1647	1.8446	1.7983
2.33	-3.5706	0.1297	1.8462	1.8167
2.34	-3.6441	0.0935	1.8474	1.8353
2.35	-3.7176	0.0568	1.8481	1.8537
$\frac{3}{4}\pi$	-3.7638	0.0335	1.8483	1.8651
2.36	-3.7922	0.0191	1.8484	1.8721
2.37	-3.8674	-0.0191	1.8485	1.8907
2.38	-3.9432	-0.0581	1.8481	1.9091
2.39	-4.0202	-0.0980	1.8473	1.9276
<hr/>				
2.40	-4.0977	-0.1385	1.8462	1.9461
2.41	-4.1758	-0.1798	1.8446	1.9646
2.42	-4.2551	-0.2222	1.8426	1.9830
2.43	-4.3344	-0.2651	1.8399	2.0013
2.44	-4.4148	-0.3088	1.8371	2.0197
2.45	-4.4959	-0.3532	1.8340	2.0381
2.46	-4.5781	-0.3989	1.8300	2.0564
2.47	-4.6604	-0.4449	1.8258	2.0746
2.48	-4.7439	-0.4918	1.8213	2.0930
2.49	-4.8279	-0.5399	1.8159	2.1110
<hr/>				
2.50	-4.9126	-0.5883	1.8105	2.1292
2.51	-4.9985	-0.6382	1.8042	2.1473
2.52	-5.0849	-0.6888	1.7976	2.1654
2.53	-5.1714	-0.7396	1.7906	2.1833
2.54	-5.2591	-0.7917	1.7830	2.2012
2.55	-5.3474	-0.8448	1.7748	2.2189
2.56	-5.4369	-0.8988	1.7662	2.2368
2.57	-5.5264	-0.9535	1.7568	2.2543
2.58	-5.6171	-1.0096	1.7468	2.2717
2.59	-5.7084	-1.0663	1.7364	2.2892

TABLA I

β_x	$F_1(\beta_x)$	$F_2(\beta_x)$	$F_3(\beta_x)$	$F_4(\beta_x)$
2.60	-5.8004	-1.1236	1.7255	2.3065
2.61	-5.8929	-1.1821	1.7140	2.3237
2.62	-5.9860	-1.2412	1.7020	2.3408
2.63	-6.0804	-1.3018	1.6893	2.3578
2.64	-6.1747	-1.3631	1.6758	2.3745
2.65	-6.2702	-1.4255	1.6618	2.3912
2.66	-6.3664	-1.4886	1.6474	2.4079
2.67	-6.4624	-1.5525	1.6321	2.4241
2.68	-6.5597	-1.6175	1.6164	2.4404
2.69	-6.6583	-1.6839	1.5998	2.4566
2.70	-6.7568	-1.7509	1.5827	2.4725
2.71	-6.8558	-1.8190	1.5647	2.4882
2.72	-6.9553	-1.8879	1.5462	2.5036
2.73	-7.0561	-1.9580	1.5271	2.5192
2.74	-7.1568	-2.0289	1.5071	2.5342
2.75	-7.2588	-2.1010	1.4866	2.5493
2.76	-7.3613	-2.1744	1.4651	2.5641
2.77	-7.4643	-2.2486	1.4429	2.5786
2.78	-7.5670	-2.3233	1.4202	2.5929
2.79	-7.6711	-2.3996	1.3965	2.6069
2.80	-7.7757	-2.4768	1.3721	2.6208
2.81	-7.8808	-2.5550	1.3471	2.6344
2.82	-7.9863	-2.6344	1.3211	2.6477
2.83	-8.0924	-2.7147	1.2943	2.6607
2.84	-8.1998	-2.7968	1.2665	2.6736
2.85	-8.3068	-2.8790	1.2384	2.6862
2.86	-8.4143	-2.9625	1.2091	2.6983
2.87	-8.5222	-3.0470	1.1792	2.7103
2.88	-8.6314	-3.1333	1.4880	2.7219
2.89	-8.7401	-3.2196	1.1166	2.7334
2.90	-8.8503	-3.3083	1.0835	2.7443
2.91	-8.9598	-3.3971	1.0501	2.7549
2.92	-9.0707	-3.4873	1.0159	2.7654
2.93	-9.1811	-3.5784	0.9804	2.7752
2.94	-9.2928	-3.6711	0.9441	2.7849
2.95	-9.4039	-3.7643	0.9069	2.7941
2.96	-9.5162	-3.8590	0.8689	2.8031
2.97	-9.6280	-3.9542	0.8301	2.8116
2.98	-9.7410	-4.0514	0.7899	2.8197
2.99	-9.8534	-4.1492	0.7488	2.8272

TABLE I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
3.00	- 9.9670	-4.2485	0.7067	2.8346
3.01	-10.0810	-4.3489	0.6638	2.8415
3.02	-10.1940	-4.4499	0.6199	2.8478
3.03	-10.3085	-4.5525	0.5750	2.8540
3.04	-10.4220	-4.6561	0.5287	2.8592
3.05	-10.5370	-4.7608	0.4819	2.8645
3.06	-10.6519	-4.8671	0.4336	2.8690
3.07	-10.7661	-4.9740	0.3842	2.8729
3.08	-10.8815	-5.0820	0.3343	2.8768
3.09	-10.9970	-5.1916	0.2829	2.8799
<hr/>				
3.10	-11.1115	-5.3018	0.2304	2.8823
3.11	-11.2272	-5.4138	0.1767	2.8844
3.12	-11.3430	-5.5268	0.1220	2.8860
3.13	-11.4577	-5.6405	0.0662	2.8867
3.14	-11.5736	-5.7559	0.0092	2.8872
π	-11.5920	-5.7743	0.0000	2.8872
3.15	-11.6895	-5.8724	-0.0489	2.8871
3.16	-11.8041	-5.9894	-0.1082	2.8861
3.17	-11.9199	-6.1083	-0.1687	2.8848
3.18	-12.0358	-6.2283	-0.2304	2.8829
3.19	-12.1502	-6.3489	-0.2934	2.8801
<hr/>				
3.20	-12.2657	-6.4713	-0.3576	2.8769
3.21	-12.3812	-6.5949	-0.4230	2.8730
3.22	-12.4951	-6.7184	-0.4891	2.8685
3.23	-12.6102	-6.8443	-0.5571	2.8632
3.24	-12.7250	-6.9708	-0.6259	2.8576
3.25	-12.8384	-7.0986	-0.6966	2.8506
3.26	-12.9527	-7.2275	-0.7680	2.8435
3.27	-13.0667	-7.3577	-0.8407	2.8356
3.28	-13.1790	-7.4890	-0.9155	2.8263
3.29	-13.2923	-7.6216	-0.9911	2.8169
<hr/>				
3.30	-13.4051	-7.7554	-1.0681	2.8066
3.31	-13.5161	-7.8890	-1.1459	2.7955
3.32	-13.6280	-8.0253	-1.2258	2.7836
3.33	-13.7395	-8.1621	-1.3065	2.7711
3.34	-13.8504	-8.3000	-1.3887	2.7578
3.35	-13.9607	-8.4392	-1.4725	2.7435
3.36	-14.0690	-8.5805	-1.5592	2.7272
3.37	-14.1780	-8.7200	-1.6439	2.7122
3.38	-14.2863	-8.8630	-1.7323	2.6951
3.39	-14.3939	-9.0064	-1.8216	2.6774

TABLA I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
3.40	-14.5007	-9.1503	-1.9118	2.6591
3.41	-14.6068	-9.2962	-2.0044	2.6393
3.42	-14.7120	-9.4426	-2.0979	2.6190
3.43	-14.8162	-9.5902	-2.1930	2.5975
3.44	-14.9196	-9.7390	-2.2899	2.5749
3.45	-15.0219	-9.8883	-2.3877	2.5516
3.46	-15.1232	-10.0388	-2.4872	2.5273
3.47	-15.2250	-10.1913	-2.5885	2.5021
3.48	-15.3242	-10.3442	-2.6916	2.4754
3.49	-15.4221	-10.4976	-2.7956	2.4479
3.50	-15.5204	-10.6529	-2.9015	2.4196
3.51	-15.6159	-10.8078	-3.0085	2.3901
3.52	-15.7100	-10.9639	-3.1172	2.3593
3.53	-15.8044	-11.1221	-3.2279	2.3276
3.54	-15.8975	-11.2815	-3.3405	2.2946
3.55	-15.9890	-11.4411	-3.4541	2.2608
3.56	-16.0773	-11.6002	-3.5688	2.2255
3.57	-16.1658	-11.7614	-3.6854	2.1893
3.58	-16.2526	-11.9237	-3.8041	2.1518
3.59	-16.3377	-12.0862	-3.9238	2.1133
3.60	-16.4229	-12.2509	-4.0456	2.0737
3.61	-16.5045	-12.4158	-4.1695	2.0323
3.62	-16.5842	-12.5808	-4.2944	1.9898
3.63	-16.6638	-12.7470	-4.4206	1.9467
3.64	-16.7414	-12.9143	-4.5488	1.9020
3.65	-16.8151	-13.0817	-4.6792	1.8553
3.66	-16.8886	-13.2503	-4.8107	1.8080
3.67	-16.9600	-13.4199	-4.9445	1.7590
3.68	-17.0290	-13.5896	-5.0794	1.7089
3.69	-17.0978	-13.7603	-5.2156	1.6580
3.70	-17.1622	-13.9311	-5.3539	1.6050
3.71	-17.2261	-14.1039	-5.4946	1.5508
3.72	-17.2855	-14.2757	-5.6365	1.4947
3.73	-17.3444	-14.4485	-5.7796	1.4379
3.74	-17.4005	-14.6222	-5.9251	1.3793
3.75	-17.4560	-14.7980	-6.0729	1.3194
3.76	-17.5066	-14.9715	-6.2209	1.2581
3.77	-17.5566	-15.1481	-6.3724	1.1949
3.78	-17.6013	-15.3224	-6.5241	1.1303
3.79	-17.6452	-15.4986	-6.6782	1.0643

TABLA I

β_x	$F_1(\beta_x)$	$F_2(\beta_x)$	$F_3(\beta_x)$	$F_4(\beta_x)$
3.80	-17.6882	-15.6768	-6.8347	0.9968
3.81	-17.7257	-15.8525	-6.9915	0.9279
3.82	-17.7623	-16.0313	-7.1518	0.8569
3.83	-17.7954	-16.2086	-7.3124	0.7850
3.84	-17.8252	-16.3868	-7.4755	0.7109
3.85	-17.8514	-16.5645	-7.6399	0.6353
3.86	-17.8739	-16.7429	-7.8069	0.5575
3.87	-17.8951	-16.9220	-7.9753	0.4787
3.88	-17.9125	-17.1006	-8.1451	0.3983
3.89	-17.9285	-17.2811	-8.3175	0.3161
<hr/>				
3.90	-17.9380	-17.4599	-8.4912	0.2317
3.91	-17.9459	-17.6392	-8.6665	0.1461
3.92	-17.9496	-17.8190	-8.8443	0.0582
$\frac{5}{4}\pi$	-17.9511	-17.9441	-8.9685	-0.0035
3.93	-17.9516	-17.9982	-9.0223	-0.0302
3.94	-17.9467	-18.1765	-9.2030	-0.1217
3.95	-17.9399	-18.3567	-9.3864	-0.2150
3.96	-17.9312	-18.5373	-9.5713	-0.3096
3.97	-17.9151	-18.7157	-9.7576	-0.4067
3.98	-17.8970	-18.8945	-9.9453	-0.5050
3.99	-17.8767	-19.0736	-10.1345	-0.6046
<hr/>				
4.00	-17.8486	-19.2517	-10.3265	-0.7075
4.10	-17.3465	-21.0160	-12.3407	-1.8395
4.20	-16.3518	-22.7065	-14.5277	-3.1810
4.30	-14.7722	-24.2674	-16.8778	-4.7503
4.40	-12.5168	-25.6366	-19.3742	-6.5618
4.50	-9.4890	-26.7439	-21.9952	-8.6287
4.60	-5.5816	-27.5071	-24.7119	-10.9633
4.70	-0.6817	-27.8271	-27.4817	-13.5727
$\frac{3}{2}\pi$	0.0000	-27.8317	-27.8272	-13.9158
4.80	5.3164	-27.6063	-30.2601	-16.4610
4.90	12.5232	-26.7225	-32.9797	-19.6221
<hr/>				
5.00	21.0534	-25.0543	-35.5767	-23.0528
5.10	31.0013	-22.4648	-37.9614	-26.7319
5.20	42.4643	-18.8043	-40.0327	-30.6330
5.30	55.5347	-13.9201	-41.6840	-34.7260
5.40	70.2648	-7.6456	-42.7748	-38.9538
$\frac{7}{4}\pi$	86.3211	-0.0014	-43.1591	-43.1598
5.50	86.7080	0.1943	-43.1568	-43.2554
5.60	104.8728	9.7544	-42.6795	-47.5578
5.70	124.7337	21.2184	-41.1461	-51.7562
5.80	146.2415	34.7547	-38.3639	-55.7420
5.90	169.2874	50.5203	-34.1216	-59.3823

TABLE I

βx	$F_1(\beta x)$	$F_2(\beta x)$	$F_3(\beta x)$	$F_4(\beta x)$
6.00	193.6873	68.6628	-28.1793	-62.5111
6.10	219.2071	89.2935	-20.3087	-64.9557
6.20	245.5132	112.5191	-10.2368	-66.4964
2π	267.7468	133.8724	0.0000	-66.9362
6.30	272.2597	138.4161	2.2872	-66.9208
6.40	298.8970	166.9827	17.5437	-65.9463
6.50	324.7894	198.1621	35.7679	-63.3129
6.60	349.2444	231.8672	57.2454	-58.6879
6.70	371.4325	267.9313	82.2153	-51.7500
6.80	390.2947	306.0535	110.9064	-42.1201
6.90	404.6997	345.8325	143.4828	-29.4332
7.00	413.3762	386.8099	180.1218	-13.2828
$\frac{9}{4}\pi$	415.2388	415.2385	207.6191	0.0001
7.10	414.8566	428.3091	220.8808	6.7266
7.20	407.4551	469.5040	265.7764	31.0247
7.30	389.3931	509.4082	314.7116	60.0078
7.40	358.7715	546.9505	367.5646	94.0897
7.50	313.3319	580.6529	423.9858	133.6596
7.60	251.0734	609.0502	483.5133	178.9884
7.70	169.3803	630.2626	545.5722	230.4411
7.80	65.8963	642.1834	609.2351	288.1436
$\frac{5}{2}\pi$	0.0000	643.9927	643.9925	321.9963
7.90	-62.0375	642.5602	673.5787	352.2988
8.00	-216.8647	628.9075	737.3398	422.8861

TABLE II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
0.000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.001	0.0010	1.0000	0.0010	1.0000	1.0010	0.9990	1.0000	0.0010	0.9980	0.9990
0.002	0.0020	1.0000	0.0020	1.0000	1.0020	0.9980	1.0000	0.0020	0.9960	0.9980
0.003	0.0030	1.0000	0.0030	1.0000	1.0030	0.9970	1.0000	0.0030	0.9940	0.9970
0.004	0.0040	1.0000	0.0040	1.0000	1.0040	0.9960	1.0000	0.0040	0.9920	0.9960
0.005	0.0050	1.0000	0.0050	1.0000	1.0050	0.9950	1.0000	0.0050	0.9900	0.9950
0.006	0.0060	1.0000	0.0060	1.0000	1.0060	0.9940	1.0000	0.0060	0.9880	0.9940
0.007	0.0070	1.0000	0.0070	1.0000	1.0070	0.9930	0.9999	0.0070	0.9861	0.9930
0.008	0.0080	1.0000	0.0080	1.0000	1.0080	0.9920	0.9999	0.0080	0.9841	0.9920
0.009	0.0090	1.0000	0.0090	1.0000	1.0090	0.9910	0.9999	0.0087	0.9821	0.9910
0.010	0.0100	1.0000	0.0100	1.0000	1.0100	0.9900	0.9999	0.0099	0.9801	0.9900
0.011	0.0110	0.9999	0.0110	1.0001	1.0111	0.9891	0.9999	0.0109	0.9781	0.9890
0.012	0.0120	0.9999	0.0120	1.0001	1.0121	0.9881	0.9999	0.0119	0.9761	0.9880
0.013	0.0130	0.9999	0.0130	1.0001	1.0131	0.9871	0.9998	0.0129	0.9742	0.9870
0.014	0.0140	0.9999	0.0140	1.0001	1.0141	0.9861	0.9998	0.0138	0.9722	0.9860
0.015	0.0150	0.9999	0.0150	1.0001	1.0151	0.9851	0.9998	0.0148	0.9702	0.9850
0.016	0.0160	0.9999	0.0160	1.0001	1.0161	0.9841	0.9997	0.0158	0.9683	0.9840
0.017	0.0170	0.9999	0.0170	1.0001	1.0172	0.9831	0.9997	0.0167	0.9663	0.9830
0.018	0.0180	0.9998	0.0180	1.0002	1.0182	0.9822	0.9997	0.0177	0.9643	0.9820
0.019	0.0190	0.9998	0.0190	1.0002	1.0192	0.9812	0.9996	0.0187	0.9624	0.9810
0.02	0.0200	0.9998	0.0200	1.0002	1.0202	0.9802	0.9996	0.0196	0.9604	0.9800
0.03	0.0300	0.9996	0.0300	1.0004	1.0304	0.9704	0.9991	0.0291	0.9409	0.9700
0.04	0.0400	0.9992	0.0400	1.0008	1.0408	0.9608	0.9984	0.0384	0.9216	0.9600
0.05	0.0500	0.9988	0.0500	1.0012	1.0513	0.9512	0.9976	0.0476	0.9025	0.9501
0.06	0.0600	0.9982	0.0600	1.0018	1.0618	0.9418	0.9966	0.0565	0.8836	0.9401
0.07	0.0699	0.9976	0.0701	1.0024	1.0725	0.9324	0.9954	0.0653	0.8649	0.9302
0.08	0.0799	0.9968	0.0801	1.0032	1.0833	0.9231	0.9940	0.0738	0.8464	0.9202
0.09	0.0899	0.9960	0.0901	1.0040	1.0942	0.9139	0.9924	0.0822	0.8281	0.9103

TABLA II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
0.10	0.0998	0.9950	0.1002	1.0050	1.1052	0.9048	0.9906	0.0903	0.8100	0.9003
0.11	0.1098	0.9940	0.1102	1.0061	1.1163	0.8958	0.9887	0.0983	0.7921	0.8904
0.12	0.1197	0.9928	0.1203	1.0072	1.1275	0.8869	0.9867	0.1062	0.7744	0.8806
0.13	0.1296	0.9916	0.1304	1.0085	1.1388	0.8781	0.9844	0.1138	0.7568	0.8707
0.14	0.1395	0.9902	0.1405	1.0098	1.1503	0.8694	0.9821	0.1213	0.7395	0.8608
0.15	0.1494	0.9888	0.1506	1.0113	1.1618	0.8607	0.9796	0.1286	0.7224	0.8510
0.16	0.1593	0.9872	0.1607	1.0128	1.1735	0.8521	0.9770	0.1358	0.7055	0.8413
0.17	0.1692	0.9856	0.1708	1.0145	1.1853	0.8437	0.9742	0.1427	0.6888	0.8315
0.18	0.1790	0.9838	0.1810	1.0162	1.1972	0.8353	0.9713	0.1495	0.6722	0.8218
0.19	0.1889	0.9820	0.1912	1.0181	1.2092	0.8270	0.9683	0.1562	0.6550	0.8121
0.20	0.1987	0.9801	0.2013	1.0201	1.2214	0.8187	0.9651	0.1627	0.6398	0.8024
0.21	0.2085	0.9780	0.2116	1.0221	1.2337	0.8106	0.9618	0.1690	0.6238	0.7928
0.22	0.2182	0.9759	0.2218	1.0243	1.2461	0.8025	0.9583	0.1752	0.6080	0.7832
0.23	0.2280	0.9737	0.2320	1.0266	1.2586	0.7945	0.9547	0.1812	0.5924	0.7736
0.24	0.2377	0.9713	0.2423	1.0289	1.2712	0.7866	0.9511	0.1870	0.5771	0.7641
0.25	0.2474	0.9689	0.2526	1.0314	1.2840	0.7788	0.9472	0.1927	0.5619	0.7546
0.26	0.2571	0.9664	0.2629	1.0340	1.2969	0.7710	0.9433	0.1982	0.5469	0.7451
0.27	0.2667	0.9638	0.2733	1.0367	1.3100	0.7634	0.9393	0.2036	0.5321	0.7357
0.28	0.2764	0.9611	0.2837	1.0395	1.3231	0.7558	0.9353	0.2089	0.5175	0.7264
0.29	0.2860	0.9582	0.2941	1.0424	1.3364	0.7483	0.9310	0.2140	0.5030	0.7171
0.30	0.2955	0.9553	0.3045	1.0453	1.3500	0.7408	0.9267	0.2189	0.4888	0.7078
0.31	0.3051	0.9523	0.3150	1.0484	1.3634	0.7334	0.9222	0.2237	0.4748	0.6985
0.32	0.3146	0.9492	0.3255	1.0516	1.3771	0.7262	0.9177	0.2284	0.4609	0.6893
0.33	0.3240	0.9460	0.3360	1.0550	1.3910	0.7189	0.9130	0.2330	0.4472	0.6801
0.34	0.3335	0.9428	0.3466	1.0584	1.4050	0.7118	0.9084	0.2374	0.4337	0.6710
0.35	0.3429	0.9394	0.3572	1.0619	1.4191	0.7047	0.9036	0.2416	0.4204	0.6620
0.36	0.3523	0.9359	0.3678	1.0655	1.4333	0.6977	0.8986	0.2457	0.4072	0.6530
0.37	0.3616	0.9323	0.3785	1.0692	1.4477	0.6907	0.8938	0.2497	0.3943	0.6440
0.38	0.3709	0.9287	0.3892	1.0731	1.4623	0.6839	0.8887	0.2536	0.3815	0.6351
0.39	0.3802	0.9249	0.4000	1.0770	1.4770	0.6771	0.8836	0.2574	0.3688	0.6262

TABLE II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
0.40	0.3894	0.9211	0.4108	1.0811	1.4918	0.6703	0.8784	0.2610	0.3564	0.6174
0.41	0.3986	0.9171	0.4216	1.0852	1.5068	0.6636	0.8732	0.2646	0.3441	0.6087
0.42	0.4078	0.9131	0.4325	1.0895	1.5220	0.6570	0.8679	0.2680	0.3320	0.6000
0.43	0.4169	0.9090	0.4434	1.0939	1.5373	0.6505	0.8625	0.2712	0.3201	0.5913
0.44	0.4259	0.9048	0.4543	1.0984	1.5527	0.6440	0.8570	0.2743	0.3084	0.5827
0.45	0.4350	0.9004	0.4653	1.1030	1.5683	0.6376	0.8515	0.2774	0.2968	0.5742
0.46	0.4440	0.8960	0.4764	1.1077	1.5841	0.6313	0.8459	0.2803	0.2853	0.5657
0.47	0.4529	0.8916	0.4875	1.1125	1.6000	0.6250	0.8403	0.2832	0.2742	0.5573
0.48	0.4618	0.8870	0.4986	1.1174	1.6161	0.6188	0.8346	0.2857	0.2632	0.5489
0.49	0.4706	0.8823	0.5098	1.1225	1.6323	0.6126	0.8289	0.2883	0.2522	0.5406
0.50	0.4794	0.8776	0.5211	1.1276	1.6487	0.6065	0.8231	0.2908	0.2414	0.5323
0.51	0.4882	0.8727	0.5324	1.1329	1.6653	0.6005	0.8173	0.2932	0.2307	0.5241
0.52	0.4969	0.8678	0.5438	1.1383	1.6820	0.5945	0.8113	0.2954	0.2204	0.5159
0.53	0.5055	0.8628	0.5552	1.1438	1.6989	0.5886	0.8054	0.2976	0.2103	0.5079
0.54	0.5141	0.8577	0.5666	1.1494	1.7160	0.5828	0.7994	0.2996	0.2002	0.4998
0.55	0.5227	0.8525	0.5782	1.1551	1.7332	0.5770	0.7934	0.3016	0.1902	0.4918
0.56	0.5312	0.8473	0.5897	1.1609	1.7507	0.5712	0.7873	0.3035	0.1805	0.4839
0.57	0.5396	0.8419	0.6014	1.1669	1.7683	0.5655	0.7813	0.3052	0.1709	0.4761
0.58	0.5480	0.8365	0.6131	1.1730	1.7860	0.5599	0.7752	0.3068	0.1615	0.4683
0.59	0.5564	0.8309	0.6248	1.1792	1.8040	0.5543	0.7690	0.3084	0.1522	0.4606
0.60	0.5646	0.8253	0.6366	1.1855	1.8221	0.5488	0.7628	0.3099	0.1430	0.4529
0.61	0.5729	0.8196	0.6485	1.1919	1.8404	0.5434	0.7566	0.3113	0.1340	0.4453
0.62	0.5810	0.8139	0.6605	1.1984	1.8589	0.5379	0.7503	0.3126	0.1252	0.4378
0.63	0.5891	0.8080	0.6725	1.2051	1.8776	0.5326	0.7442	0.3138	0.1166	0.4301
0.64	0.5972	0.8021	0.6846	1.2119	1.8965	0.5273	0.7379	0.3150	0.1080	0.4230
0.65	0.6052	0.7961	0.6968	1.2188	1.9155	0.5220	0.7315	0.3160	0.0996	0.4156
0.66	0.6131	0.7900	0.7090	1.2258	1.9348	0.5168	0.7252	0.3169	0.0914	0.4083
0.67	0.6210	0.7838	0.7213	1.2330	1.9542	0.5117	0.7189	0.3178	0.0833	0.4011
0.68	0.6288	0.7776	0.7336	1.2402	1.9739	0.5066	0.7126	0.3186	0.0754	0.3940
0.69	0.6365	0.7712	0.7461	1.2476	1.9937	0.5016	0.7062	0.3193	0.0676	0.3869

TABLA II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
0.70	0.6442	0.7648	0.7586	1.2552	2.0138	0.4966	0.6997	0.3199	0.0599	0.3798
0.71	0.6518	0.7584	0.7712	1.2628	2.0340	0.4916	0.6933	0.3205	0.0524	0.3729
0.72	0.6594	0.7518	0.7838	1.2706	2.0544	0.4868	0.6869	0.3210	0.0449	0.3659
0.73	0.6669	0.7452	0.7966	1.2785	2.0751	0.4819	0.6805	0.3214	0.0377	0.3591
0.74	0.6743	0.7385	0.8094	1.2865	2.0959	0.4771	0.6741	0.3217	0.0307	0.3524
0.75	0.6816	0.7317	0.8223	1.2947	2.1170	0.4724	0.6676	0.3220	0.0237	0.3456
0.76	0.6889	0.7248	0.8353	1.3030	2.1383	0.4677	0.6611	0.3221	0.0168	0.3389
0.77	0.6961	0.7179	0.8484	1.3114	2.1598	0.4630	0.6547	0.3223	0.0101	0.3324
0.78	0.7033	0.7109	0.8615	1.3199	2.1815	0.4584	0.6483	0.3224	0.0035	0.3259
$\frac{1}{2} \pi$	0.7071	0.7071	0.8687	1.3246	2.1933	0.4559	0.6448	0.3224	0.0000	0.3224
0.79	0.7104	0.7038	0.8748	1.3286	2.2034	0.4538	0.6418	0.3224	-0.0030	0.3195
0.80	0.7174	0.6967	0.8881	1.3374	2.2255	0.4493	0.6353	0.3223	-0.0093	0.3131
0.81	0.7243	0.6895	0.9015	1.3464	2.2479	0.4449	0.6289	0.3222	-0.0155	0.3067
0.82	0.7312	0.6822	0.9150	1.3555	2.2705	0.4404	0.6225	0.3221	-0.0217	0.3004
0.83	0.7379	0.6749	0.9286	1.3647	2.2933	0.4360	0.6160	0.3219	-0.0276	0.2943
0.84	0.7446	0.6675	0.9423	1.3740	2.3164	0.4317	0.6096	0.3215	-0.0334	0.2881
0.85	0.7513	0.6600	0.9561	1.3835	2.3396	0.4274	0.6032	0.3212	-0.0391	0.2821
0.86	0.7578	0.6524	0.9700	1.3932	2.3632	0.4232	0.5968	0.3207	-0.0446	0.2761
0.87	0.7643	0.6448	0.9840	1.4029	2.3869	0.4190	0.5904	0.3202	-0.0500	0.2702
0.88	0.7707	0.6372	0.9981	1.4128	2.4109	0.4148	0.5840	0.3197	-0.0554	0.2643
0.89	0.7771	0.6294	1.0122	1.4229	2.4351	0.4107	0.5776	0.3191	-0.0606	0.2585
0.90	0.7833	0.6216	1.0265	1.4331	2.4596	0.4066	0.5712	0.3185	-0.0658	0.2527
0.91	0.7895	0.6138	1.0409	1.4434	2.4843	0.4025	0.5648	0.3178	-0.0708	0.2470
0.92	0.7956	0.6058	1.0554	1.4539	2.5093	0.3985	0.5584	0.3171	-0.0757	0.2414
0.93	0.8016	0.5978	1.0700	1.4645	2.5345	0.3946	0.5521	0.3169	-0.0805	0.2359
0.94	0.8076	0.5898	1.0847	1.4753	2.5600	0.3906	0.5459	0.3155	-0.0851	0.2304
0.95	0.8134	0.5817	1.0995	1.4862	2.5857	0.3867	0.5396	0.3146	-0.0896	0.2250
0.96	0.8192	0.5735	1.1144	1.4973	2.6117	0.3829	0.5333	0.3137	-0.0941	0.2196
0.97	0.8249	0.5653	1.1294	1.5085	2.6379	0.3791	0.5270	0.3127	-0.0984	0.2143
0.98	0.8305	0.5570	1.1446	1.5200	2.6645	0.3753	0.5207	0.3117	-0.1027	0.2090
0.99	0.8360	0.5487	1.1598	1.5314	2.6912	0.3716	0.5145	0.3107	-0.1069	0.2038

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
1.00	0.8415	0.5403	1.1752	1.5431	2.7183	0.3679	0.5083	0.3096	-0.1109	0.1987
1.01	0.8468	0.5319	1.1907	1.5549	2.7456	0.3642	0.5021	0.3085	-0.1147	0.1937
1.02	0.8521	0.5234	1.2063	1.5669	2.7732	0.3606	0.4960	0.3073	-0.1185	0.1888
1.03	0.8573	0.5148	1.2220	1.5790	2.8011	0.3570	0.4899	0.3061	-0.1223	0.1839
1.04	0.8624	0.5062	1.2379	1.5913	2.8292	0.3534	0.4839	0.3049	-0.1259	0.1790
1.05	0.8674	0.4976	1.2539	1.6038	2.8576	0.3499	0.4778	0.3036	-0.1294	0.1742
1.06	0.8724	0.4889	1.2700	1.6164	2.8864	0.3465	0.4716	0.3023	-0.1328	0.1694
1.07	0.8772	0.4801	1.2862	1.6292	2.9154	0.3430	0.4656	0.3009	-0.1362	0.1647
1.08	0.8820	0.4713	1.3025	1.6421	2.9447	0.3396	0.4596	0.2995	-0.1394	0.1601
1.09	0.8866	0.4625	1.3190	1.6552	2.9743	0.3362	0.4536	0.2981	-0.1426	0.1555
1.10	0.8912	0.4536	1.3356	1.6685	3.0042	0.3329	0.4476	0.2967	-0.1458	0.1509
1.11	0.8957	0.4447	1.3524	1.6820	3.0344	0.3296	0.4416	0.2952	-0.1488	0.1464
1.12	0.9001	0.4357	1.3693	1.6956	3.0648	0.3263	0.4356	0.2936	-0.1516	0.1420
1.13	0.9044	0.4267	1.3863	1.7093	3.0957	0.3230	0.4298	0.2921	-0.1543	0.1378
1.14	0.9086	0.4176	1.4035	1.7233	3.1268	0.3198	0.4240	0.2906	-0.1570	0.1335
1.15	0.9128	0.4085	1.4208	1.7374	3.1582	0.3166	0.4183	0.2890	-0.1597	0.1293
1.16	0.9168	0.3993	1.4382	1.7517	3.1899	0.3135	0.4126	0.2874	-0.1622	0.1252
1.17	0.9208	0.3902	1.4558	1.7662	3.2220	0.3104	0.4069	0.2858	-0.1647	0.1241
1.18	0.9246	0.3809	1.4736	1.7808	3.2544	0.3073	0.4012	0.2842	-0.1671	0.1171
1.19	0.9284	0.3717	1.4914	1.7956	3.2871	0.3042	0.3955	0.2825	-0.1694	0.1131
1.20	0.9320	0.3624	1.5095	1.8107	3.3201	0.3012	0.3898	0.2807	-0.1716	0.1091
1.21	0.9356	0.3530	1.5276	1.8258	3.3535	0.2982	0.3842	0.2790	-0.1737	0.1053
1.22	0.9391	0.3436	1.5460	1.8412	3.3872	0.2952	0.3786	0.2773	-0.1758	0.1014
1.23	0.9425	0.3342	1.5645	1.8568	3.4212	0.2923	0.3731	0.2755	-0.1778	0.0977
1.24	0.9458	0.3248	1.5831	1.8725	3.4556	0.2894	0.3677	0.2737	-0.1797	0.0940
1.25	0.9490	0.3153	1.6019	1.8884	3.4903	0.2865	0.3623	0.2719	-0.1815	0.0904
1.26	0.9521	0.3058	1.6209	1.9045	3.5254	0.2836	0.3569	0.2701	-0.1833	0.0868
1.27	0.9551	0.2963	1.6400	1.9208	3.5608	0.2808	0.3515	0.2683	-0.1849	0.0833
1.28	0.9580	0.2867	1.6593	1.9373	3.5966	0.2780	0.3462	0.2664	-0.1865	0.0798
1.29	0.9608	0.2771	1.6788	1.9540	3.6328	0.2753	0.3408	0.2645	-0.1881	0.0763

TABLA II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
1.30	0.9636	0.2675	1.6984	1.9709	3.6693	0.2725	0.3355	0.2626	-0.1897	0.0729
1.31	0.9662	0.2578	1.7182	1.9880	3.7062	0.2698	0.3303	0.2607	-0.1911	0.0696
1.32	0.9687	0.2482	1.7381	2.0053	3.7434	0.2671	0.3251	0.2588	-0.1925	0.0663
1.33	0.9712	0.2385	1.7583	2.0228	3.7810	0.2645	0.3199	0.2569	-0.1938	0.0631
1.34	0.9735	0.2288	1.7786	2.0404	3.8190	0.2618	0.3148	0.2550	-0.1950	0.0600
1.35	0.9757	0.2190	1.7991	2.0583	3.8574	0.2592	0.3098	0.2530	-0.1962	0.0568
1.36	0.9779	0.2092	1.8198	2.0764	3.8962	0.2567	0.3047	0.2510	-0.1973	0.0537
1.37	0.9799	0.1994	1.8406	2.0947	3.9354	0.2541	0.2997	0.2490	-0.1983	0.0507
1.38	0.9818	0.1896	1.8617	2.1132	3.9749	0.2516	0.2948	0.2470	-0.1993	0.0478
1.39	0.9837	0.1798	1.8829	2.1320	4.0148	0.2491	0.2898	0.2450	-0.2003	0.0448
1.40	0.9854	0.1700	1.9043	2.1509	4.0552	0.2466	0.2849	0.2430	-0.2011	0.0419
1.41	0.9871	0.1601	1.9259	2.1700	4.0960	0.2441	0.2801	0.2410	-0.2019	0.0391
1.42	0.9886	0.1502	1.9477	2.1894	4.1371	0.2417	0.2753	0.2390	-0.2027	0.0363
1.43	0.9901	0.1403	1.9697	2.2090	4.1787	0.2393	0.2705	0.2370	-0.2033	0.0336
1.44	0.9915	0.1304	1.9919	2.2288	4.2207	0.2369	0.2658	0.2349	-0.2039	0.0309
1.45	0.9927	0.1205	2.0143	2.2488	4.2631	0.2346	0.2611	0.2329	-0.2045	0.0283
1.46	0.9939	0.1106	2.0369	2.2691	4.3060	0.2322	0.2565	0.2308	-0.2051	0.0257
1.47	0.9949	0.1006	2.0596	2.2896	4.3492	0.2299	0.2519	0.2288	-0.2056	0.0232
1.48	0.9959	0.0907	2.0826	2.3103	4.3930	0.2276	0.2474	0.2267	-0.2060	0.0207
1.49	0.9967	0.0807	2.1059	2.3312	4.4371	0.2254	0.2429	0.2247	-0.2064	0.0183
1.50	0.9975	0.0707	2.1293	2.3524	4.4817	0.2231	0.2384	0.2226	-0.2068	0.0158
1.51	0.9982	0.0608	2.1529	2.3738	4.5267	0.2209	0.2339	0.2205	-0.2071	0.0134
1.52	0.9987	0.0508	2.1768	2.3955	4.5722	0.2187	0.2295	0.2184	-0.2073	0.0111
1.53	0.9992	0.0408	2.2008	2.4174	4.6182	0.2165	0.2252	0.2164	-0.2075	0.0089
1.54	0.9995	0.0308	2.2251	2.4395	4.6646	0.2144	0.2209	0.2143	-0.2077	0.0066
1.55	0.9998	0.0208	2.2496	2.4619	4.7115	0.2122	0.2166	0.2122	-0.2078	0.0044
1.56	0.9999	0.0108	2.2743	2.4815	4.7588	0.2101	0.2123	0.2101	-0.2079	0.0022
1.57	1.0000	0.0008	2.2993	2.5074	4.8066	0.2080	0.2082	0.2081	-0.2079	0.0002
$\frac{1}{2}\pi$	1.0000	0.0000	2.3013	2.5092	4.8105	0.2079	0.2079	0.2079	-0.2079	0.0000
1.58	1.0000	-0.0092	2.3245	2.5305	4.8550	0.2060	0.2041	0.2060	-0.2079	-0.0019
1.59	0.9998	-0.0192	2.3499	2.5538	4.9038	0.2039	0.2000	0.2039	-0.2078	-0.0040

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
1.60	0.9996	-0.0292	2.3756	2.5775	4.9530	0.2019	0.1960	0.2018	-0.2077	-0.0059
1.61	0.9992	-0.0392	2.4015	2.6014	5.0028	0.1999	0.1919	0.1997	-0.2075	-0.0078
1.62	0.9988	-0.0492	2.4276	2.6255	5.0531	0.1979	0.1879	0.1976	-0.2073	-0.0097
1.63	0.9982	-0.0592	2.4540	2.6499	5.1039	0.1959	0.1840	0.1956	-0.2071	-0.0116
1.64	0.9976	-0.0692	2.4806	2.6746	5.1552	0.1940	0.1801	0.1935	-0.2069	-0.0134
1.65	0.9969	-0.0791	2.5075	2.6995	5.2070	0.1920	0.1763	0.1915	-0.2067	-0.0152
1.66	0.9960	-0.0891	2.5346	2.7247	5.2593	0.1901	0.1725	0.1894	-0.2064	-0.0170
1.67	0.9951	-0.0990	2.5620	2.7502	5.3122	0.1882	0.1686	0.1873	-0.2060	-0.0187
1.68	0.9940	-0.1090	2.5896	2.7760	5.3656	0.1864	0.1648	0.1852	-0.2056	-0.0204
1.69	0.9929	-0.1189	2.6175	2.8020	5.4195	0.1845	0.1612	0.1832	-0.2051	-0.0220
1.70	0.9917	-0.1288	2.6456	2.8283	5.4740	0.1827	0.1576	0.1812	-0.2046	-0.0236
1.71	0.9903	-0.1388	2.6740	2.8549	5.5290	0.1809	0.1540	0.1791	-0.2042	-0.0251
1.72	0.9889	-0.1486	2.7027	2.8818	5.5845	0.1791	0.1505	0.1771	-0.2037	-0.0266
1.73	0.9874	-0.1585	2.7317	2.9090	5.6406	0.1773	0.1470	0.1751	-0.2032	-0.0281
1.74	0.9857	-0.1684	2.7609	2.9364	5.6973	0.1755	0.1435	0.1730	-0.2026	-0.0296
1.75	0.9840	-0.1782	2.7904	2.9642	5.7546	0.1738	0.1400	0.1720	-0.2020	-0.0310
1.76	0.9822	-0.1881	2.8202	2.9922	5.8124	0.1720	0.1365	0.1690	-0.2013	-0.0324
1.77	0.9802	-0.1979	2.8503	3.0206	5.8708	0.1703	0.1332	0.1670	-0.2006	-0.0338
1.78	0.9782	-0.2077	2.8806	3.0492	5.9299	0.1686	0.1299	0.1650	-0.2000	-0.0351
1.79	0.9761	-0.2174	2.9112	3.0782	5.9894	0.1670	0.1266	0.1630	-0.1993	-0.0364
1.80	0.9738	-0.2272	2.9422	3.1075	6.0496	0.1653	0.1234	0.1610	-0.1985	-0.0376
1.81	0.9715	-0.2369	2.9734	3.1270	6.1104	0.1636	0.1202	0.1590	-0.1978	-0.0388
1.82	0.9691	-0.2466	3.0049	3.1669	6.1719	0.1620	0.1170	0.1570	-0.1970	-0.0400
1.83	0.9666	-0.2563	3.0367	3.1972	6.2339	0.1604	0.1138	0.1550	-0.1962	-0.0412
1.84	0.9640	-0.2660	3.0689	3.2277	6.2965	0.1588	0.1108	0.1531	-0.1953	-0.0423
1.85	0.9613	-0.2756	3.1013	3.2585	6.3598	0.1572	0.1078	0.1512	-0.1945	-0.0434
1.86	0.9585	-0.2852	3.1340	3.2897	6.4237	0.1557	0.1048	0.1492	-0.1936	-0.0444
1.87	0.9556	-0.2948	3.1671	3.3212	6.4883	0.1541	0.1018	0.1473	-0.1927	-0.0454
1.88	0.9526	-0.3043	3.2005	3.3530	6.5535	0.1526	0.0989	0.1453	-0.1917	-0.0464
1.89	0.9495	-0.3138	3.2342	3.3852	6.6194	0.1511	0.0960	0.1434	-0.1908	-0.0474

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
1.90	0.9463	-0.3233	3.2682	3.4177	6.6859	0.1496	0.0932	0.1415	-0.1899	-0.0484
1.91	0.9430	-0.3327	3.3025	3.4506	6.7531	0.1481	0.0904	0.1396	-0.1889	-0.0493
1.92	0.9396	-0.3422	3.3372	3.4838	6.8210	0.1466	0.0876	0.1377	-0.1879	-0.0501
1.93	0.9362	-0.3515	3.3722	3.5173	6.8895	0.1452	0.0849	0.1359	-0.1869	-0.0510
1.94	0.9326	-0.3609	3.4075	3.5512	6.9588	0.1437	0.0822	0.1340	-0.1859	-0.0519
1.95	0.9290	-0.3702	3.4432	3.5855	7.0287	0.1423	0.0795	0.1322	-0.1849	-0.0527
1.96	0.9252	-0.3794	3.4792	3.6201	7.0993	0.1409	0.0769	0.1304	-0.1838	-0.0535
1.97	0.9214	-0.3887	3.5156	3.6551	7.1707	0.1395	0.0743	0.1285	-0.1827	-0.0543
1.98	0.9174	-0.3979	3.5523	3.6904	7.2427	0.1381	0.0717	0.1267	-0.1816	-0.0550
1.99	0.9134	-0.4070	3.5894	3.7261	7.3155	0.1367	0.0692	0.1249	-0.1804	-0.0556
2.00	0.9093	-0.4162	3.6269	3.7622	7.3891	0.1353	0.0667	0.1230	-0.1793	-0.0563
2.01	0.9051	-0.4252	3.6647	3.7986	7.4633	0.1340	0.0643	0.1213	-0.1782	-0.0569
2.02	0.9008	-0.4342	3.7028	3.8355	7.5383	0.1327	0.0619	0.1195	-0.1771	-0.0576
2.03	0.8964	-0.4432	3.7414	3.8727	7.6141	0.1313	0.0595	0.1178	-0.1759	-0.0582
2.04	0.8919	-0.4522	3.7803	3.9103	7.6906	0.1300	0.0571	0.1160	-0.1748	-0.0588
2.05	0.8874	-0.4611	3.8196	3.9483	7.7679	0.1287	0.0549	0.1143	-0.1737	-0.0594
2.06	0.8827	-0.4699	3.8593	3.9867	7.8460	0.1274	0.0526	0.1126	-0.1725	-0.0599
2.07	0.8780	-0.4787	3.8993	4.0255	7.9248	0.1262	0.0504	0.1108	-0.1712	-0.0604
2.08	0.8731	-0.4875	3.9398	4.0647	8.0045	0.1249	0.0482	0.1091	-0.1700	-0.0609
2.09	0.8682	-0.4962	3.9806	4.1043	8.0849	0.1237	0.0460	0.1074	-0.1688	-0.0614
2.10	0.8632	-0.5048	4.0219	4.1443	8.1662	0.1225	0.0438	0.1057	-0.1676	-0.0619
2.11	0.8581	-0.5134	4.0635	4.1847	8.2482	0.1212	0.0417	0.1040	-0.1663	-0.0620
2.12	0.8529	-0.5220	4.1056	4.2256	8.3311	0.1200	0.0397	0.1024	-0.1650	-0.0627
2.13	0.8477	-0.5305	4.1480	4.2668	8.4149	0.1188	0.0377	0.1007	-0.1637	-0.0632
2.14	0.8423	-0.5390	4.1909	4.3086	8.4994	0.1176	0.0357	0.0981	-0.1625	-0.0634
2.15	0.8369	-0.5474	4.2342	4.3507	8.5849	0.1165	0.0337	0.0975	-0.1613	-0.0638
2.16	0.8314	-0.5557	4.2779	4.3932	8.6711	0.1153	0.0317	0.0959	-0.1600	-0.0641
2.17	0.8258	-0.5640	4.3220	4.4362	8.7583	0.1142	0.0288	0.0943	-0.1587	-0.0645
2.18	0.8201	-0.5722	4.3666	4.4797	8.8463	0.1130	0.0280	0.0927	-0.1574	-0.0647
2.19	0.8143	-0.5804	4.4116	4.5236	8.9352	0.1119	0.0262	0.0911	-0.1560	-0.0650

TABLE II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
2.20	0.8085	-0.5885	4.4571	4.5679	9.0250	0.1108	0.0244	0.0895	-0.1547	-0.0652
2.21	0.8026	-0.5966	4.5030	4.6127	9.1157	0.1097	0.0226	0.0880	-0.1534	-0.0655
2.22	0.7966	-0.6046	4.5494	4.6580	9.2073	0.1086	0.0208	0.0865	-0.1522	-0.0657
2.23	0.7905	-0.6125	4.5962	4.7037	9.2999	0.1075	0.0191	0.0850	-0.1509	-0.0660
2.24	0.7843	-0.6204	4.6434	4.7499	9.3933	0.1065	0.0174	0.0835	-0.1496	-0.0661
2.25	0.7781	-0.6282	4.6912	4.7966	9.4877	0.1054	0.0157	0.0820	-0.1482	-0.0663
2.26	0.7718	-0.6359	4.7394	4.8437	9.5831	0.1044	0.0141	0.0805	-0.1469	-0.0664
2.27	0.7654	-0.6436	4.7880	4.8914	9.6794	0.1033	0.0125	0.0790	-0.1455	-0.0665
2.28	0.7589	-0.6512	4.8372	4.9395	9.7767	0.1023	0.0110	0.0776	-0.1442	-0.0666
2.29	0.7523	-0.6588	4.8868	4.9881	9.8749	0.1013	0.0095	0.0762	-0.1429	-0.0667
2.30	0.7457	-0.6663	4.9370	5.0372	9.9742	0.1003	0.0080	0.0748	-0.1416	-0.0668
2.31	0.7390	-0.6737	4.9876	5.0868	10.0744	0.0993	0.0065	0.0734	-0.1403	-0.0669
2.32	0.7322	-0.6811	5.0387	5.1370	10.1757	0.0983	0.0050	0.0720	-0.1389	-0.0670
2.33	0.7254	-0.6883	5.0903	5.1876	10.2779	0.0973	0.0036	0.0706	-0.1376	-0.0670
2.34	0.7185	-0.6956	5.1424	5.2388	10.3812	0.0963	0.0022	0.0692	-0.1362	-0.0671
2.35	0.7115	-0.7027	5.1951	5.2905	10.4856	0.0954	0.0008	0.0679	-0.1349	-0.0671
$\frac{3}{4}\pi$	0.7071	-0.7071	5.2280	5.3228	10.5507	0.0948	0.0000	0.0671	-0.1342	-0.0671
2.36	0.7044	-0.7098	5.2483	5.3427	10.5910	0.0944	-0.0005	0.0666	-0.1336	-0.0671
2.37	0.6973	-0.7168	5.3020	5.3954	10.6974	0.0935	-0.0018	0.0653	-0.1323	-0.0671
2.38	0.6901	-0.7237	5.3562	5.4487	10.8049	0.0926	-0.0031	0.0639	-0.1309	-0.0670
2.39	0.6828	-0.7306	5.4109	5.5026	10.9135	0.0916	-0.0044	0.0626	-0.1296	-0.0670
2.40	0.6755	-0.7374	5.4662	5.5570	11.0232	0.0907	-0.0056	0.0613	-0.1282	-0.0669
2.41	0.6681	-0.7441	5.5221	5.6119	11.1340	0.0898	-0.0068	0.0600	-0.1268	-0.0669
2.42	0.6606	-0.7508	5.5785	5.6674	11.2459	0.0889	-0.0080	0.0588	-0.1255	-0.0668
2.43	0.6530	-0.7573	5.6354	5.7235	11.3589	0.0880	-0.0092	0.0575	-0.1241	-0.0667
2.44	0.6454	-0.7638	5.6929	5.7801	11.4730	0.0872	-0.0103	0.0563	-0.1228	-0.0666
2.45	0.6378	-0.7702	5.7510	5.8373	11.5884	0.0863	-0.0114	0.0550	-0.1215	-0.0665
2.46	0.6300	-0.7766	5.8097	5.8951	11.7048	0.0854	-0.0125	0.0538	-0.1202	-0.0664
2.47	0.6222	-0.7828	5.8689	5.9535	11.8224	0.0846	-0.0135	0.0526	-0.1189	-0.0662
2.48	0.6144	-0.7890	5.9288	6.0125	11.9413	0.0837	-0.0146	0.0514	-0.1175	-0.0661
2.49	0.6064	-0.7951	5.9892	6.0721	12.0613	0.0829	-0.0156	0.0503	-0.1161	-0.0659

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
2.50	0.5985	-0.8011	6.0502	6.1323	12.1825	0.0821	-0.0166	0.0492	-0.1149	-0.0658
2.51	0.5904	-0.8071	6.1118	6.1931	12.3049	0.0813	-0.0176	0.0480	-0.1136	-0.0656
2.52	0.5823	-0.8130	6.1741	6.2545	12.4286	0.0805	-0.0185	0.0464	-0.1123	-0.0654
2.53	0.5742	-0.8187	6.2369	6.3166	12.5535	0.0797	-0.0195	0.0457	-0.1109	-0.0652
2.54	0.5660	-0.8244	6.3004	6.3793	12.6797	0.0789	-0.0204	0.0446	-0.1096	-0.0650
2.55	0.5577	-0.8300	6.3645	6.4426	12.8071	0.0781	-0.0213	0.0435	-0.1093	-0.0648
2.56	0.5494	-0.8356	6.4293	6.5066	12.9358	0.0773	-0.0221	0.0425	-0.1071	-0.0646
2.57	0.5410	-0.8410	6.4946	6.5712	13.0658	0.0765	-0.0228	0.0414	-0.1058	-0.0644
2.58	0.5325	-0.8464	6.5607	6.6365	13.1971	0.0758	-0.0237	0.0403	-0.1045	-0.0642
2.59	0.5240	-0.8517	6.6274	6.7024	13.3298	0.0750	-0.0246	0.0394	-0.1033	-0.0640
2.60	0.5155	-0.8569	6.6947	6.7690	13.4637	0.0743	-0.0254	0.0383	-0.1020	-0.0637
2.61	0.5069	-0.8620	6.7628	6.8363	13.5990	0.0735	-0.0261	0.0373	-0.1007	-0.0634
2.62	0.4983	-0.8670	6.8315	6.9043	13.7357	0.0728	-0.0269	0.0363	-0.0994	-0.0632
2.63	0.4896	-0.8720	6.9008	6.9729	13.8738	0.0721	-0.0276	0.0353	-0.0982	-0.0629
2.64	0.4808	-0.8768	6.9709	7.0423	14.0132	0.0714	-0.0283	0.0343	-0.0969	-0.0626
2.65	0.4720	-0.8816	7.0417	7.1123	14.1540	0.0706	-0.0289	0.0334	-0.0956	-0.0623
2.66	0.4632	-0.8863	7.1132	7.1831	14.2963	0.0700	-0.0296	0.0324	-0.0944	-0.0620
2.67	0.4543	-0.8908	7.1854	7.2546	14.4400	0.0692	-0.0302	0.0315	-0.0932	-0.0617
2.68	0.4454	-0.8953	7.2583	7.3268	14.5851	0.0686	-0.0308	0.0306	-0.0920	-0.0614
2.69	0.4364	-0.8998	7.3319	7.3998	14.7317	0.0679	-0.0314	0.0297	-0.0908	-0.0611
2.70	0.4274	-0.9041	7.4063	7.4735	14.8797	0.0672	-0.0320	0.0287	-0.0895	-0.0608
2.71	0.4183	-0.9083	7.4814	7.5479	15.0293	0.0665	-0.0326	0.0279	-0.0883	-0.0605
2.72	0.4092	-0.9124	7.5572	7.6231	15.1803	0.0659	-0.0331	0.0270	-0.0871	-0.0601
2.73	0.4001	-0.9165	7.6338	7.6990	15.3329	0.0652	-0.0337	0.0261	-0.0859	-0.0598
2.74	0.3909	-0.9204	7.7112	7.7758	15.4870	0.0646	-0.0342	0.0253	-0.0847	-0.0594
2.75	0.3817	-0.9243	7.7894	7.8533	15.6426	0.0639	-0.0347	0.0244	-0.0835	-0.0591
2.76	0.3724	-0.9281	7.8683	7.9316	15.7998	0.0633	-0.0352	0.0236	-0.0823	-0.0588
2.77	0.3631	-0.9318	7.9480	8.0106	15.9586	0.0627	-0.0356	0.0228	-0.0811	-0.0585
2.78	0.3538	-0.9353	8.0285	8.0905	16.1190	0.0620	-0.0361	0.0220	-0.0799	-0.0581
2.79	0.3444	-0.9388	8.1098	8.1712	16.2810	0.0614	-0.0365	0.0212	-0.0787	-0.0577

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
2.80	0.3350	-0.9422	8.1919	8.2527	16.4446	0.0608	-0.0369	0.0204	-0.0777	-0.0573
2.81	0.3256	-0.9455	8.2749	8.3351	16.6099	0.0602	-0.0373	0.0196	-0.0765	-0.0570
2.82	0.3161	-0.9487	8.3586	8.4182	16.7768	0.0596	-0.0377	0.0188	-0.0754	-0.0566
2.83	0.3066	-0.9518	8.4432	8.5022	16.9455	0.0590	-0.0381	0.0181	-0.0742	-0.0562
2.84	0.2970	-0.9549	8.5287	8.5871	17.1158	0.0584	-0.0385	0.0173	-0.0731	-0.0558
2.85	0.2875	-0.9578	8.6150	8.6728	17.2878	0.0578	-0.0388	0.0167	-0.0721	-0.0554
2.86	0.2779	-0.9606	8.7021	8.7594	17.4615	0.0573	-0.0391	0.0160	-0.0710	-0.0550
2.87	0.2683	-0.9633	8.7902	8.8469	17.6370	0.0567	-0.0394	0.0153	-0.0699	-0.0546
2.88	0.2586	-0.9660	8.8791	8.9352	17.8143	0.0561	-0.0397	0.0145	-0.0687	-0.0542
2.89	0.2490	-0.9685	8.9689	9.0244	17.9933	0.0556	-0.0400	0.0138	-0.0676	-0.0538
2.90	0.2392	-0.9710	9.0596	9.1146	18.1742	0.0550	-0.0403	0.0132	-0.0666	-0.0534
2.91	0.2295	-0.9733	9.1512	9.2056	18.3568	0.0545	-0.0406	0.0125	-0.0656	-0.0530
2.92	0.2198	-0.9756	9.2437	9.2976	18.5413	0.0539	-0.0409	0.0114	-0.0645	-0.0526
2.93	0.2100	-0.9777	9.3371	9.3905	18.7276	0.0534	-0.0411	0.0112	-0.0634	-0.0522
2.94	0.2002	-0.9798	9.4315	9.4844	18.8158	0.0529	-0.0413	0.0106	-0.0624	-0.0518
2.95	0.1904	-0.9817	9.5268	9.5792	19.1060	0.0523	-0.0415	0.0100	-0.0614	-0.0514
2.96	0.1806	-0.9836	9.6231	9.6749	19.2980	0.0518	-0.0417	0.0094	-0.0603	-0.0510
2.97	0.1708	-0.9853	9.7203	9.7716	19.4919	0.0513	-0.0419	0.0088	-0.0593	-0.0506
2.98	0.1609	-0.9870	9.8185	9.8693	19.6878	0.0508	-0.0420	0.0082	-0.0583	-0.0502
2.99	0.1510	-0.9885	9.9177	9.9680	19.8857	0.0503	-0.0421	0.0076	-0.0573	-0.0497
3.00	0.1411	-0.9900	10.0179	10.0677	20.0855	0.0498	-0.0422	0.0071	-0.0563	-0.0493
3.01	0.1312	-0.9914	10.1190	10.1684	20.2874	0.0493	-0.0423	0.0065	-0.0553	-0.0489
3.02	0.1213	-0.9926	10.2212	10.2700	20.4913	0.0488	-0.0424	0.0059	-0.0543	-0.0484
3.03	0.1114	-0.9938	10.3245	10.3728	20.6972	0.0483	-0.0425	0.0054	-0.0534	-0.0480
3.04	0.1014	-0.9948	10.4287	10.4765	20.9052	0.0478	-0.0426	0.0049	-0.0524	-0.0476
3.05	0.0915	-0.9958	10.5340	10.5814	21.1153	0.0474	-0.0427	0.0043	-0.0515	-0.0472
3.06	0.0815	-0.9967	10.6403	10.6872	21.3276	0.0469	-0.0428	0.0039	-0.0505	-0.0468
3.07	0.0715	-0.9974	10.7477	10.7942	21.5419	0.0464	-0.0429	0.0034	-0.0496	-0.0464
3.08	0.0616	-0.9981	10.8562	10.9022	21.7584	0.0460	-0.0430	0.0029	-0.0487	-0.0459
3.09	0.0516	-0.9987	10.9658	11.0113	21.9771	0.0455	-0.0431	0.0023	-0.0478	-0.0455

TABLA II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
3.10	0.0416	-0.9991	11.0764	11.1215	22.1980	0.0450	-0.0431	0.0019	-0.0469	-0.0450
3.11	0.0316	-0.9995	11.1882	11.2328	22.4210	0.0446	-0.0431	0.0015	-0.0460	-0.0446
3.12	0.0216	-0.9998	11.3011	11.3453	22.6464	0.0442	-0.0432	0.0010	-0.0451	-0.0441
3.13	0.0116	-0.9999	11.4151	11.4588	22.8740	0.0437	-0.0432	0.0006	-0.0442	-0.0437
3.14	0.0016	-1.0000	11.5303	11.5736	23.1039	0.0433	-0.0432	0.0001	-0.0433	-0.0432
π	0.0000	-1.0000	11.5487	11.5920	23.1407	0.0432	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
3.15	-0.0084	-1.0000	11.6466	11.6895	23.3361	0.0428	-0.0432	-0.0004	-0.0424	-0.0428
3.16	-0.0184	-0.9998	11.7641	11.8065	23.5706	0.0424	-0.0432	-0.0008	-0.0416	-0.0423
3.17	-0.0284	-0.9996	11.8827	11.9247	23.8075	0.0420	-0.0432	-0.0012	-0.0407	-0.0420
3.18	-0.0384	-0.9993	12.0026	12.0442	24.0468	0.0416	-0.0431	-0.0016	-0.0399	-0.0415
3.19	-0.0484	-0.9988	12.1236	12.1648	24.2884	0.0412	-0.0431	-0.0020	-0.0391	-0.0411
3.20	-0.0584	-0.9983	12.2459	12.2866	24.5325	0.0408	-0.0431	-0.0024	-0.0383	-0.0407
3.21	-0.0684	-0.9977	12.3694	12.4097	24.7791	0.0404	-0.0430	-0.0029	-0.0375	-0.0403
3.22	-0.0783	-0.9969	12.4941	12.5340	25.0281	0.0400	-0.0430	-0.0032	-0.0367	-0.0399
3.23	-0.0883	-0.9961	12.6200	12.6596	25.2797	0.0396	-0.0429	-0.0035	-0.0359	-0.0394
3.24	-0.0982	-0.9952	12.7473	12.7864	25.5337	0.0392	-0.0428	-0.0039	-0.0351	-0.0390
3.25	-0.1082	-0.9941	12.8758	12.9146	25.7903	0.0388	-0.0427	-0.0042	-0.0343	-0.0385
3.26	-0.1181	-0.9930	13.0056	13.0440	26.0495	0.0384	-0.0426	-0.0046	-0.0336	-0.0381
3.27	-0.1280	-0.9918	13.1367	13.1747	26.3113	0.0380	-0.0425	-0.0049	-0.0328	-0.0377
3.28	-0.1380	-0.9904	13.2691	13.3067	26.5758	0.0376	-0.0424	-0.0052	-0.0321	-0.0373
3.29	-0.1479	-0.9890	13.4028	13.4401	26.8429	0.0372	-0.0423	-0.0055	-0.0313	-0.0369
3.30	-0.1578	-0.9875	13.5379	13.5748	27.1126	0.0369	-0.0422	-0.0058	-0.0306	-0.0365
3.31	-0.1676	-0.9858	13.6743	13.7108	27.3851	0.0365	-0.0421	-0.0061	-0.0299	-0.0360
3.32	-0.1775	-0.9841	13.8121	13.8482	27.6604	0.0362	-0.0420	-0.0064	-0.0292	-0.0356
3.33	-0.1873	-0.9823	13.9513	13.9871	27.9383	0.0358	-0.0419	-0.0067	-0.0285	-0.0352
3.34	-0.1971	-0.9804	14.0918	14.1273	28.2191	0.0354	-0.0418	-0.0070	-0.0278	-0.0348
3.35	-0.2069	-0.9784	14.2338	14.2689	28.5027	0.0351	-0.0417	-0.0073	-0.0271	-0.0344
3.36	-0.2169	-0.9762	14.3772	14.4120	28.7892	0.0347	-0.0415	-0.0075	-0.0264	-0.0340
3.37	-0.2264	-0.9740	14.5221	14.5565	29.0785	0.0344	-0.0413	-0.0078	-0.0257	-0.0335
3.38	-0.2362	-0.9717	14.6684	14.7024	29.3708	0.0340	-0.0411	-0.0080	-0.0251	-0.0331
3.39	-0.2459	-0.9693	14.8161	14.8498	29.6660	0.0337	-0.0409	-0.0083	-0.0244	-0.0327

TABLE II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	e^{β_x}	$e^{-\beta_x}$	A_{β_x}	B_{β_x}	C_{β_x}	D_{β_x}
3.40	-0.2555	-0.9668	14.9654	14.9987	29.9641	0.0340	-0.0408	-0.0085	-0.0238	-0.0323
3.41	-0.2652	-0.9642	15.1161	15.1491	30.2652	0.0330	-0.0406	-0.0088	-0.0231	-0.0319
3.42	-0.2748	-0.9615	15.2684	15.3011	30.5694	0.0327	-0.0404	-0.0090	-0.0225	-0.0315
3.43	-0.2844	-0.9587	15.4221	15.4545	30.8766	0.0324	-0.0403	-0.0093	-0.0218	-0.0311
3.44	-0.2940	-0.9558	15.5774	15.6095	31.1870	0.0321	-0.0401	-0.0094	-0.0212	-0.0307
3.45	-0.3035	-0.9528	15.7343	15.7661	31.5004	0.0318	-0.0399	-0.0097	-0.0206	-0.0303
3.46	-0.3130	-0.9497	15.8928	15.9242	31.8170	0.0314	-0.0397	-0.0099	-0.0200	-0.0299
3.47	-0.3225	-0.9466	16.0528	16.0839	32.1367	0.0311	-0.0395	-0.0101	-0.0194	-0.0295
3.48	-0.3320	-0.9433	16.2145	16.2453	32.4597	0.0308	-0.0392	-0.0102	-0.0189	-0.0291
3.49	-0.3414	-0.9399	16.3777	16.4082	32.7860	0.0305	-0.0390	-0.0104	-0.0183	-0.0287
3.50	-0.3508	-0.9365	16.5426	16.5728	33.1154	0.0302	-0.0388	-0.0106	-0.0177	-0.0283
3.51	-0.3601	-0.9329	16.7092	16.7391	33.4483	0.0299	-0.0386	-0.0108	-0.0171	-0.0279
3.52	-0.3694	-0.9292	16.8774	16.9070	33.7844	0.0296	-0.0384	-0.0109	-0.0165	-0.0275
3.53	-0.3787	-0.9255	17.0473	17.0766	34.1240	0.0293	-0.0382	-0.0111	-0.0160	-0.0271
3.54	-0.3880	-0.9217	17.2190	17.2480	34.4669	0.0290	-0.0380	-0.0113	-0.0155	-0.0268
3.55	-0.3972	-0.9178	17.3923	17.4210	34.8133	0.0287	-0.0378	-0.0114	-0.0149	-0.0264
3.56	-0.4063	-0.9137	17.5674	17.5958	35.1632	0.0284	-0.0376	-0.0116	-0.0144	-0.0260
3.57	-0.4154	-0.9096	17.7442	17.7724	35.5166	0.0282	-0.0373	-0.0117	-0.0139	-0.0257
3.58	-0.4245	-0.9054	17.9228	17.9507	35.8735	0.0279	-0.0371	-0.0118	-0.0134	-0.0253
3.59	-0.4335	-0.9011	18.1032	18.1308	36.2341	0.0276	-0.0368	-0.0120	-0.0129	-0.0249
3.60	-0.4425	-0.8968	18.2855	18.3128	36.5982	0.0273	-0.0366	-0.0121	-0.0124	-0.0245
3.61	-0.4515	-0.8923	18.4695	18.4966	36.9660	0.0270	-0.0363	-0.0122	-0.0119	-0.0242
3.62	-0.4604	-0.8877	18.6554	18.6822	37.3376	0.0268	-0.0361	-0.0123	-0.0114	-0.0238
3.63	-0.4692	-0.8831	18.8432	18.8697	37.7128	0.0265	-0.0359	-0.0124	-0.0109	-0.0234
3.64	-0.4780	-0.8784	19.0328	19.0590	38.0918	0.0262	-0.0356	-0.0125	-0.0105	-0.0231
3.65	-0.4868	-0.8735	19.2243	19.2503	38.4747	0.0260	-0.0354	-0.0126	-0.0101	-0.0227
3.66	-0.4955	-0.8686	19.4178	19.4435	38.8613	0.0257	-0.0351	-0.0127	-0.0096	-0.0223
3.67	-0.5042	-0.8636	19.6132	19.6387	39.2519	0.0255	-0.0348	-0.0128	-0.0092	-0.0220
3.68	-0.5128	-0.8585	19.8106	19.8358	39.6464	0.0252	-0.0346	-0.0129	-0.0088	-0.0217
3.69	-0.5213	-0.8534	20.0099	20.0349	40.0448	0.0250	-0.0343	-0.0130	-0.0083	-0.0214

TABLE II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
3.70	-0.5298	-0.8481	20.2113	20.2360	40.4473	0.0247	-0.0341	-0.0131	-0.0079	-0.0210
3.71	-0.5383	-0.8428	20.4147	20.4391	40.8538	0.0245	-0.0338	-0.0132	-0.0075	-0.0207
3.72	-0.5467	-0.8373	20.6201	20.6443	41.2644	0.0242	-0.0336	-0.0132	-0.0071	-0.0203
3.73	-0.5550	-0.8318	20.8276	20.8516	41.6791	0.0240	-0.0333	-0.0133	-0.0067	-0.0200
3.74	-0.5633	-0.8262	21.0371	21.0609	42.0980	0.0238	-0.0330	-0.0133	-0.0063	-0.0197
3.75	-0.5716	-0.8206	21.2488	21.2723	42.5211	0.0235	-0.0327	-0.0134	-0.0059	-0.0193
3.76	-0.5797	-0.8148	21.4626	21.4858	42.9484	0.0233	-0.0324	-0.0135	-0.0055	-0.0190
3.77	-0.5879	-0.8090	21.6785	21.7016	43.3801	0.0230	-0.0322	-0.0136	-0.0051	-0.0187
3.78	-0.5959	-0.8030	21.8966	21.9194	43.8160	0.0228	-0.0319	-0.0136	-0.0048	-0.0184
3.79	-0.6039	-0.7970	22.1169	22.1395	44.2564	0.0226	-0.0316	-0.0137	-0.0044	-0.0180
3.80	-0.6119	-0.7910	22.3394	22.3618	44.7012	0.0224	-0.0314	-0.0137	-0.0040	-0.0177
3.81	-0.6197	-0.7848	22.5642	22.5863	45.1504	0.0222	-0.0311	-0.0138	-0.0036	-0.0174
3.82	-0.6276	-0.7786	22.7911	22.8131	45.6042	0.0219	-0.0308	-0.0138	-0.0033	-0.0171
3.83	-0.6353	-0.7723	23.0204	23.0421	46.0625	0.0217	-0.0305	-0.0138	-0.0030	-0.0168
3.84	-0.6430	-0.7659	23.2520	23.2735	46.5255	0.0215	-0.0303	-0.0138	-0.0027	-0.0165
3.85	-0.6506	-0.7594	23.4859	23.5072	46.9931	0.0213	-0.0300	-0.0139	-0.0023	-0.0162
3.86	-0.6582	-0.7528	23.7221	23.7432	47.4654	0.0211	-0.0297	-0.0139	-0.0020	-0.0159
3.87	-0.6657	-0.7462	23.9608	23.9816	47.9424	0.0209	-0.0294	-0.0139	-0.0017	-0.0156
3.88	-0.6731	-0.7395	24.2018	24.2224	48.4242	0.0206	-0.0292	-0.0139	-0.0014	-0.0153
3.89	-0.6805	-0.7328	24.4452	24.4657	48.9109	0.0204	-0.0289	-0.0139	-0.0011	-0.0150
3.90	-0.6878	-0.7259	24.6911	24.7114	49.4024	0.0202	-0.0286	-0.0140	-0.0008	-0.0147
3.91	-0.6950	-0.7190	24.9395	24.9595	49.8990	0.0200	-0.0283	-0.0140	-0.0005	-0.0144
3.92	-0.7022	-0.7120	25.1903	25.2101	50.4004	0.0198	-0.0280	-0.0140	-0.0002	-0.0141
$\frac{5}{4} \pi$	-0.7071	-0.7071	25.3672	25.3869	50.7540	0.0197	-0.0278	-0.0140	0.0000	-0.0139
3.93	-0.7092	-0.7050	25.4437	25.4633	50.9070	0.0196	-0.0278	-0.0140	0.0001	-0.0139
3.94	-0.7162	-0.6978	25.6996	25.7190	51.4186	0.0194	-0.0275	-0.0139	0.0003	-0.0136
3.95	-0.7232	-0.6906	25.9581	25.9773	51.9354	0.0192	-0.0272	-0.0139	0.0005	-0.0133
3.96	-0.7301	-0.6834	26.2191	26.2382	52.4573	0.0191	-0.0269	-0.0139	0.0008	-0.0130
3.97	-0.7369	-0.6760	26.4828	26.5017	52.9845	0.0189	-0.0267	-0.0139	0.0011	-0.0128
3.98	-0.7436	-0.6686	26.7492	26.7679	53.5170	0.0187	-0.0264	-0.0139	0.0014	-0.0125
3.99	-0.7502	-0.6612	27.0182	27.0367	54.0549	0.0185	-0.0261	-0.0139	0.0017	-0.0122

TABLA II

βx	$\text{sen } \beta x$	$\text{cos } \beta x$	$\text{Senh } \beta x$	$\text{Cosh } \beta x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
4.00	-0.7568	-0.6536	27.2899	27.3082	54.5982	0.0183	-0.0258	-0.0139	0.0019	-0.0120
4.10	-0.8183	-0.5748	30.1619	30.1784	60.3403	0.0166	-0.0231	-0.0136	0.0040	-0.0096
4.20	-0.8716	-0.4903	33.3357	33.3507	66.6863	0.0150	-0.0204	-0.0131	0.0057	-0.0074
4.30	-0.9162	-0.4008	36.8431	36.8567	73.6998	0.0136	-0.0179	-0.0125	0.0070	-0.0055
4.40	-0.9516	-0.3073	40.7193	40.7316	81.4509	0.0123	-0.0155	-0.0117	0.0079	-0.0038
4.50	-0.9775	-0.2108	45.0030	45.0141	90.0171	0.0111	-0.0132	-0.0108	0.0085	-0.0023
4.60	-0.9937	-0.1122	49.7371	49.7472	99.4843	0.0101	-0.0111	-0.0100	0.0089	-0.0012
4.70	-0.9999	-0.0124	54.9690	54.9781	109.9472	0.0091	-0.0092	-0.0091	0.0090	-0.0001
$\frac{3}{2}\pi$	-1.0000	0.0000	55.6544	55.6634	111.3178	0.0090	-0.0090	-0.0090	0.0090	0.0000
4.80	-0.9962	0.0875	60.7511	60.7593	121.5104	0.0082	-0.0075	-0.0082	0.0089	0.0007
4.90	-0.9824	0.1865	67.1412	67.1486	134.2898	0.0074	-0.0059	-0.0073	0.0087	0.0014
5.00	-0.9589	0.2837	74.2032	74.2100	148.4132	0.0067	-0.0046	-0.0065	0.0084	0.0019
5.10	-0.9258	0.3780	82.0079	82.0140	164.0219	0.0061	-0.0033	-0.0057	0.0080	0.0023
5.20	-0.8834	0.4685	90.6334	90.6389	181.2722	0.0055	-0.0023	-0.0049	0.0075	0.0026
5.30	-0.8323	0.5544	100.1659	100.1709	200.3368	0.0050	-0.0014	-0.0042	0.0069	0.0028
5.40	-0.7728	0.6347	110.7010	110.7055	221.4064	0.0045	-0.0006	-0.0035	0.0064	0.0029
$\frac{7}{4}\pi$	-0.7071	0.7071	122.0735	122.0776	244.1511	0.0051	0.0000	-0.0029	0.0058	0.0029
5.50	-0.7055	0.7087	122.3439	122.3480	244.6919	0.0041	0.0000	-0.0029	0.0058	0.0029
5.60	-0.6313	0.7756	135.2114	135.2150	270.4264	0.0037	0.0005	-0.0023	0.0052	0.0029
5.70	-0.5507	0.8347	149.4320	149.4354	298.8674	0.0033	0.0009	-0.0018	0.0046	0.0028
5.80	-0.4646	0.8855	165.1483	165.1513	330.2996	0.0030	0.0013	-0.0014	0.0041	0.0027
5.90	-0.3739	0.9275	182.5174	182.5201	365.0375	0.0027	0.0015	-0.0010	0.0036	0.0026
6.00	-0.2794	0.9602	201.7132	201.7156	403.4288	0.0025	0.0017	-0.0007	0.0031	0.0024
6.10	-0.1822	0.9833	222.9278	222.9300	445.8578	0.0022	0.0018	-0.0004	0.0026	0.0022
6.20	-0.0831	0.9965	246.3735	246.3755	492.7490	0.0020	0.0019	-0.0002	0.0022	0.0020
2π	0.0000	1.0000	267.7449	267.7468	535.4917	0.0019	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
6.30	0.0168	0.9999	272.2850	272.2869	544.5719	0.0018	0.0019	0.0001	0.0018	0.0019
6.40	0.1166	0.9932	300.9217	300.9434	601.8450	0.0017	0.0018	0.0002	0.0015	0.0017
6.50	0.2151	0.0766	332.5701	332.5716	665.1416	0.0015	0.0018	0.0003	0.0012	0.0018
6.60	0.3115	0.9502	367.5469	367.5483	735.0952	0.0014	0.0017	0.0004	0.0009	0.0015
6.70	0.4048	0.9144	406.2023	406.2035	812.4058	0.0012	0.0016	0.0005	0.0006	0.0013
6.80	0.4941	0.8694	448.9231	448.9242	897.8473	0.0011	0.0015	0.0006	0.0004	0.0011
6.90	0.5784	0.8157	496.1369	496.1379	992.2747	0.0010	0.0014	0.0006	0.0002	0.0009

TABLA II

β_x	$\text{sen } \beta_x$	$\text{cos } \beta_x$	$\text{Senh } \beta_x$	$\text{Cosh } \beta_x$	$e^{\beta x}$	$e^{-\beta x}$	$A_{\beta x}$	$B_{\beta x}$	$C_{\beta x}$	$D_{\beta x}$
7.00	0.6570	0.7539	548.3161	548.3170	1096.6332	0.0009	0.0013	0.0006	0.0001	0.0007
$\frac{9}{4}\pi$	0.7071	0.7071	587.2412	587.2420	1174.4832	0.0009	0.0012	0.0006	0.0000	0.0006
7.10	0.7290	0.6846	605.9831	605.9840	1211.9671	0.0008	0.0012	0.0006	-0.0000	0.0006
7.20	0.7937	0.6084	669.7150	669.7158	1339.4308	0.0007	0.0011	0.0006	-0.0001	0.0005
7.30	0.8504	0.5261	740.1496	740.1503	1380.2999	0.0007	0.0009	0.0006	-0.0002	0.0004
7.40	0.8987	0.4386	817.9919	817.9925	1635.9844	0.0006	0.0008	0.0006	-0.0003	0.0003
7.50	0.9380	0.3466	904.0209	904.0215	1808.0424	0.0006	0.0007	0.0005	-0.0003	0.0002
7.60	0.9679	0.2513	999.0977	999.0982	1998.1959	0.0005	0.0006	0.0005	-0.0004	0.0001
7.70	0.9882	0.1534	1104.1738	1104.1742	2208.3480	0.0005	0.0006	0.0005	-0.0004	0.0001
7.80	0.9985	0.0540	1220.3008	1220.3012	2440.6020	0.0004	0.0004	0.0004	-0.0004	0.0000
$\frac{5}{2}\pi$	1.0000	0.0000	1287.9850	1287.9854	2575.9705	0.0004	0.0004	0.0004	-0.0004	0.0000
7.90	0.9989	-0.0460	1348.6410	1348.6414	2697.2823	0.0004	0.0004	0.0004	-0.0004	-0.0000
8.00	0.9894	-0.1455	1490.4788	1490.4792	2980.9580	0.0003	0.0002	0.0003	-0.0004	-0.0001

TABLA III

βx	Y'	Y''	Z'	Z''
0	∞	∞	0.25000	∞
0.05	5.25320	25000.0	0.26281	215.51724
0.10	2.76342	1492.537	0.27629	55.15720
0.15	1.93656	505.050	0.29046	25.75992
0.20	1.52653	233.645	0.30533	15.26252
0.25	1.28391	123.916	0.32095	10.27432
0.30	1.12487	74.68260	0.33734	7.50694
0.35	1.01357	49.48046	0.35454	5.79408
0.40	0.93225	34.87966	0.37256	4.66135
0.45	0.87091	25.88662	0.39139	3.87342
0.50	0.82391	19.79414	0.41110	3.29728
0.55	0.78720	15.64211	0.43169	2.86311
0.60	0.75837	12.65662	0.45311	2.52915
0.65	0.73558	10.47449	0.47435	2.26588
0.70	0.71777	8.80282	0.49845	2.05339
0.75	0.70379	7.52615	0.52238	1.87995
0.80	0.69314	6.51466	0.54702	1.73702
0.85	0.68506	5.71690	0.57245	1.61687
0.90	0.67949	5.05817	0.59855	1.51538
0.95	0.67584	4.52018	0.62517	1.42945
1.00	0.67392	4.07398	0.65243	1.35512
1.05	0.67352	3.69904	0.67987	1.29189
1.10	0.67449	3.38066	0.70791	1.23609
1.15	0.67671	3.10810	0.73591	1.18813
1.20	0.67996	2.87455	0.76399	1.14611
1.25	0.68412	2.67294	0.79209	1.10904
1.30	0.68921	2.49669	0.81962	1.07704
1.35	0.69503	2.34307	0.84688	1.04865
1.40	0.70166	2.20658	0.87366	1.02353
1.45	0.70883	2.08690	0.89959	1.00158
1.50	0.71664	1.98016	0.92474	0.98213
1.55	0.72498	1.88484	0.94890	0.96502
1.60	0.73376	1.79973	0.97186	0.95006
1.65	0.74288	1.72378	0.99356	0.93696
1.70	0.75243	1.65500	1.01402	0.92544
1.75	0.76115	1.59795	1.03284	0.91558
1.80	0.77239	1.53685	1.05029	0.90701
1.85	0.78267	1.48615	1.06619	0.89967
1.90	0.79325	1.43962	1.08042	0.89352
1.95	0.80376	1.39790	1.09309	0.88838

TABLA III

βx	Y'	Y''	Z'	Z''
2.00	0.81454	1.35929	1.10409	0.88424
2.05	0.82506	1.32480	1.11387	0.88077
2.10	0.83584	1.29266	1.12208	0.87812
2.15	0.84643	1.26354	1.12871	0.87629
2.20	0.85710	1.23652	1.13394	0.87514
2.25	0.86738	1.21228	1.13829	0.87436
2.30	0.87754	1.18998	1.14097	0.87439
2.35	0.88755	1.16945	1.14299	0.87466
2.40	0.89737	1.15052	1.14360	0.87563
2.45	0.90699	1.13308	1.14358	0.87685
2.50	0.91604	1.11749	1.14267	0.87847
2.55	0.92515	1.10266	1.14090	0.88051
2.60	0.93364	1.08947	1.13880	0.88267
2.65	0.94179	1.07734	1.13586	0.88528
2.70	0.94978	1.06601	1.13260	0.88800
2.75	0.95720	1.04471	1.12881	0.89104
2.80	0.96423	1.04657	1.12473	0.89421
2.85	0.97083	1.03815	1.12038	0.89754
2.90	0.97716	1.03032	1.11578	0.90104
2.95	0.98303	1.02327	1.11118	0.90454
3.00	0.99828	1.00672	1.10634	0.90820
3.10	0.99823	1.00586	1.09646	0.91573
3.20	1.00650	0.99687	1.08665	0.92331
3.30	1.01313	0.98986	1.07717	0.93079
3.40	1.01844	0.98436	1.06779	0.93834
3.50	1.02261	0.98011	1.05897	0.94562
3.60	1.02559	0.97709	1.05070	0.95261
3.70	1.02755	0.97505	1.04318	0.95913
3.80	1.02870	0.97380	1.03616	0.96534
3.90	1.02924	0.97315	1.02986	0.97105
4.00	1.02895	0.97327	1.02423	0.97624
4.10	1.02824	0.97378	1.01930	0.98090
4.20	1.02714	0.97468	1.01480	0.98520
4.30	1.02583	0.97578	1.01094	0.98894
4.40	1.02412	0.97728	1.00750	0.99231
4.50	1.02220	0.97897	1.00450	0.99530
4.60	1.02051	0.98049	1.00230	0.99751
4.70	1.11862	0.98220	1.00012	0.99972
4.80	1.01674	0.98393	0.99853	1.00133
4.90	1.01488	0.98567	0.99715	1.00275
5.00	1.01322	0.98722	0.99616	1.00376

BIBLIOGRAFIA

- ADVANCED STRENGTH OF MATERIALS - Den Hartog
McGraw-Hill, 1952
- RESISTENCIA DE MATERIALES - Timoshenko
Ed. Espasa-Calpe S. A., 1957
- ECUACIONES DIFERENCIALES - Philips
Uteha, 1945
- CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL - Granville, Smith y Longley
Uteha, 1952
- BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION - Hetenyi
University of Michigan Press, 1964
- TRATADO DE RESISTENCIA DE MATERIALES - Courbon
Ed. Aguilar, 1958
- THE ANALYSIS OF STRESS AND DEFORMATION - Housner & Vreeland
MacMillan, 1966.