

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA PURA

APLICACIONES DE LA TEORIA DE DISTRIBUCIONES  
AL ANALISIS DE FLEXION DE VIGAS

TESIS DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE  
LICENCIADO EN MATEMATICA

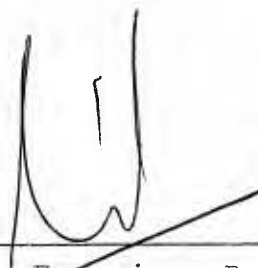
GILBERTH GARBANZO G.

CIUDAD UNIVERSITARIA RODRIGO FACIO

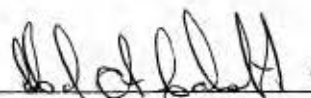
1980

Este trabajo fue aprobado como uno de los requisitos para optar al grado de Licenciado en Matemática

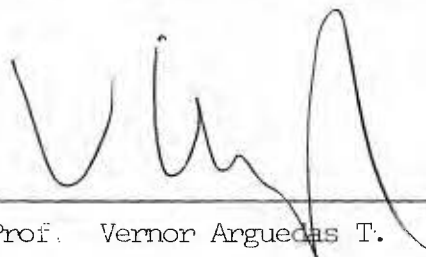
Tribunal examinador integrado por:



Prof. Francisco Ramírez B.  
(Director)



Prof. Manuel A. Calvo H.



Prof. Vernor Arguedas T.



Prof. Jorge Poltronieri V.



Prof. Asdrubal Duarte E.

A Carolina

## INDICE

<u>Introducción</u>	1
<u>CAPITULO I</u> <u>Elementos de la Teoría de Distribuciones</u>	3
Soporte de una función	4
El espacio vectorial $D$	5
Convergencia en $D^m$	9
Definición de distribución	10
La distribución $\delta_{(a)}$	13
Derivada de una distribución	16
Derivada de una función en el sentido de distribuciones	19
Trasladada de una distribución	19
Producto de convolución	20
Algebras de convolución	23
Inversión de operadores diferenciales en $D'$	25
Multiplicación de distribuciones	26
<u>CAPITULO II</u> <u>Fundamentos de Resistencia de Materiales</u>	29
Barras sometidas a fuerzas axiales	30
Esfuerzo cortante $\tau$	32
Deformación por tracción o compresión $\epsilon$	33
Tensiones en vigas	36
Tensiones de flexión en las vigas	45
Ecuación fundamental de la viga elástica	49

<u>CAPITULO III</u>	<u>Aplicación de las distribuciones para la solución</u>	
	<u>de la ecuación de la viga elástica</u>	50
	Aplicación a una viga estáticamente determinada	56
	Cálculo de $(\frac{d^4\delta}{dx^4})^{-1}$	57
	Aplicación a viga estáticamente indeterminada con ambos extremos empotrados	59
	Aplicación a una viga simplemente apoyada sobre tres apoyos con una carga concentrada P	63
	Conclusiones	67
	Bibliografía	68

## Introducción

Los métodos clásicos que se utilizan en el campo de Resistencia de Materiales se apoyan en los recursos del cálculo integral y diferencial, logrando así, por lo general, resolver los problemas planteados.

En este trabajo mostraremos como aplicar la Teoría de Distribuciones a este campo específico, permitiendo enfocar el tema de una manera más elegante, correcta y darle una solución satisfactoria.

En el capítulo I se ha hecho un resumen de los elementos básicos de la Teoría de Distribuciones, únicamente lo necesario a utilizar, para darle continuidad al trabajo y que este forme una unidad.

En el capítulo II se hace un bosquejo de la teoría de Resistencia de Materiales y el modelo planteado para el análisis de la viga elástica es aceptado, ya que las idealizaciones hechas no afectan sensiblemente a la validez real, como lo ha demostrado la práctica.

El capítulo III, muestra una forma más elegante, correcta y rápida para la solución de la ecuación fundamental de la viga elástica, usando Distribuciones. También se obtienen algu

nos resultados al margen como una interpretación física para la distribución  $\delta'$ .

Con este enfoque, resolveremos algunos problemas para las vigas estáticamente determinadas, pero para apreciar la fuerza y belleza del método, analizaremos vigas estáticamente indeterminadas.

Un trabajo completo sobre este tema nos llevaría a escribir todo un tratado sobre Resistencia de Materiales con este enfoque, cosa que no hacemos, pero mostraremos que la Teoría de Distribuciones es la que debe utilizarse para darle solución a los problemas planteados en este campo y sobre todo, correcta desde el punto de vista matemático.

CAPITULO I

ELEMENTOS DE LA TEORIA  
DE DISTRIBUCIONES



## Capítulo I

### El espacio vectorial D

Estudiaremos un subespacio vectorial de las funciones con valores complejos definidas sobre  $\mathbb{R}^n$ ; dicha función de  $x \in \mathbb{R}^n$  es también de  $n$  variables reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

#### 1.1 Definición

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ; se denotará por  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a un elemento de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $A = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \neq 0\}$ . Se llama soporte de  $f$  y se designa por Sop  $f$  al conjunto  $\bar{A}$ .

Obsérvese que la función puede ser nula en algunos puntos del soporte. Es inmediato que en el conjunto complementario del soporte  $f$  es un conjunto abierto, por lo tanto, si  $f(x)$  se anula en un punto  $x$  de este conjunto,  $f$  es idénticamente nula en un entorno del punto.

Naturalmente,  $\bar{A}$  no es el mismo para todas las funciones. Para cada función sop  $f$  es el conjunto cerrado más pequeño, fuera del cual  $f$  es nula.

Definiremos ahora el espacio básico de la teoría, que como se verá luego, es un espacio vectorial.

### 1.2 Definición

Denotaremos por  $D$  el conjunto de las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , infinitamente derivables con soporte acotado (i.e. con soporte compacto).

### 1.3 Proposición

$D \neq \emptyset$

Mostraremos que en  $D$  hay al menos una función.

**Demostración:**

Si  $n = 1$ , la función  $Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$

se observa que su soporte es el intervalo  $|x| \leq 1$  que es un compacto. Es infinitamente derivable para  $|x| > 1$  puesto que ahí la función es nula y para  $|x| < 1$  también por ser la función exponencial. Falta examinar el comportamiento de  $Q$  en la frontera del soporte de  $Q$ . Es decir en  $|x| = 1$ . Mostremos que es derivable en  $x = 1$ .

La derivada por la derecha de  $l$  es 0. Calculemos el límite de la derivada por la izquierda:

$$- \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \frac{2x}{(1-x^2)^2} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}]{} 0$$

En forma análoga se demuestra que  $Q$  es derivable en  $x = -1$ . Generalizando para  $n$  dimensiones se tiene el ejemplo análogo:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } r < 1 \end{cases} \quad \text{donde } r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

como lo designamos al principio,  $D$  denota un subespacio vectorial de las funciones con valores complejos definidas sobre  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.4 Proposición

$D$  es un espacio vectorial.

#### **Demostración:**

Bastará probar que  $D$  es un subespacio del espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) de las funciones indefinidamente derivables de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$ .

De donde resulta que, si  $Q_1, Q_2 \in D$ , entonces  $Q_1 + Q_2 \in D$ , y si  $\lambda \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y  $Q \in D$  entonces  $\lambda Q \in D$ .

Nota 1:

$D$  es incluso un algebra (o un anillo) para la multiplicación puntual puesto que si  $Q_1, Q_2 \in D$ , entonces

$Q_1 \cdot Q_2 \in D$ :

Y puede generalizarse aún más, ya que si  $Q \in D$  y  $\psi$  es una función indefinidamente derivable con soporte no necesariamente acotado, entonces  $Q \cdot \psi \in D$  y el soporte de  $Q \cdot \psi$  está contenido en la intersección de los soportes de  $Q$  y de  $\psi$ .

Otras consideraciones que es conveniente tener presentes son las siguientes:

### 1.5 Proposición

Sean  $Q_1, Q_2 \in D$ ,  $\alpha \neq 0$ .

a)  $\text{Sop}(Q_1 + Q_2) \subset \text{Sop } Q_1 \cup \text{Sop } Q_2$ .

b)  $\text{Sop } \alpha Q_1 = \text{Sop } Q_1$ .

c) Si  $Q \in D(\mathbb{C})$ ,  $\text{Sop } Q' \subset \text{Sop } Q$  i.e.  $(\text{Sop } Q \subset \text{Sop } Q')$ .

**Demostración:**

a) Sea  $A = \{x \in \mathbb{R}^n / (Q_1 + Q_2)(x) \neq 0\}$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(Q_1 + Q_2)(x) \neq 0$

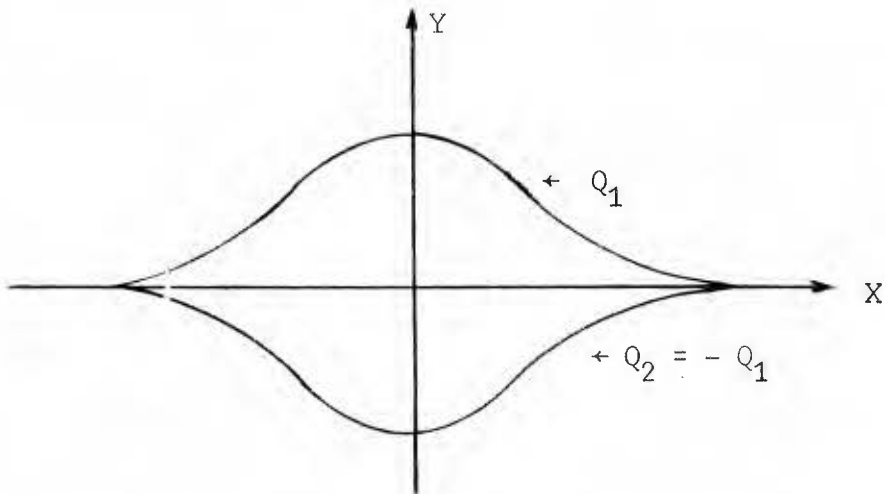
$\implies Q_1(x) + Q_2(x) \neq 0 \implies Q_1(x) \neq 0$  o

$Q_2(x) \neq 0 \implies x \in \text{Sop } Q_1$  o  $x \in \text{Sop } Q_2$

$\implies x \in \text{Sop } Q_1 \cup \text{Sop } Q_2 \therefore \text{Sop } (Q_1 + Q_2) \subset$

$\text{Sop } Q_1 \cup \text{Sop } Q_2.$

En la afirmación anterior no hay igualdad porque si  $Q_1$  tiene soporte finito y  $Q_2 = -Q_1$ , la suma no tiene soporte finito.



b) Sea  $\bar{A} = \text{Sop } Q \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $x \in \text{Sop } \alpha Q$ . Existe

$(x_n)$  tal que  $\alpha Q(x_n) \neq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \iff$

$Q(x_n) \neq 0 \iff x_n \in \text{Sop } Q$  (que es cerrado)  $\iff$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \text{Sop } Q \iff x \in \text{Sop } Q$

$\therefore \text{Sop } \alpha Q = \text{Sop } Q.$

c) Sea  $x \in C \text{ sop } Q \implies x \notin \text{Sop } Q \implies Q(x) = 0$   
 $\implies$  existe  $\xi > 0$  tal que  $\beta(x, \xi) \subset C \text{ sop } Q \implies$   
 para todo  $x \in \beta(x, \xi)$ ,  $Q(x) = 0$ . Sea  $x_0 \in \beta(x, \xi)$

$$Q'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x_0+h) - Q(x_0)}{h}; \quad Q(x_0) = 0.$$

$$Q'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x_0+h)}{h}. \quad \text{Si } x_0 \in \beta(x_0, \xi), \text{ existe}$$

$$h \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \beta(x_0, h) \subset \beta(x_0, \xi) \implies Q(x_0+h) = 0 \implies Q'(x_0) = 0 \implies x \in C \text{ sop } Q'$$

$$\therefore C \text{ sop } Q \subset C \text{ sop } Q'.$$

En la definición 1-2 se dio un espacio básico de la teoría de distribuciones, el cual no es único.

#### 1.6 Definición

Se denota por  $D^m$  el espacio de las funciones complejas definidas en  $\mathbb{R}^n$  con derivadas continuas hasta el orden  $m$  y de soporte compacto.

Se definirá ahora una topología sobre  $D^m$  y  $D$ , i.e., definiremos las sucesiones convergentes en cada uno de estos espacios.

#### 1.7 Definición

a) Se dice que una sucesión de funciones de  $D^m$  converge, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , a una función de  $D^m$  si

- 1) Si todos los soportes de  $Q_n$  están contenidos en un mismo conjunto acotado (independiente de  $n$ ),
  - 2) Si las derivadas de cada orden  $k$ ,  $0 \leq k \leq m$  de las  $Q_n$  convergen uniformemente a las correspondientes derivadas de  $Q$ .
- b) En  $D$ : la misma condición 1), y en 2), se exige la convergencia uniforme de las  $Q_n$  a las correspondientes derivadas de  $Q$ .

### 1.8 Definición

El espacio  $D$  definido anteriormente, se denomina el espacio de las funciones de prueba; el espacio  $D^m$  es el espacio de las funciones de prueba de orden  $m$ .

#### Nota 2:

Obsérvese que tanto en  $D$  o  $D^m$  no se exige la convergencia uniforme a la vez para todos los órdenes de derivación, sino solamente la convergencia uniforme para cada orden de derivación tomado por separado.

### 1.9 Definición

Se llama una distribución  $T$ , a una aplicación lineal continua de  $D$  en  $\mathbb{C}$ . Una distribución de orden  $m$  es por lo tanto una funcional lineal y continua sobre  $D^m$

En otras palabras, una distribución es un elemento del espacio dual  $D^*$  del espacio  $D$ . Esto significa que a todo  $Q \in D$ ,  $T$  le asocia un número complejo  $T(Q)$ , que también se denota por  $\langle T, Q \rangle$ .

Las propiedades básicas de las distribuciones serán, por lo tanto:

a)  $\langle aT + bS, Q \rangle = a \langle T, Q \rangle + b \langle S, Q \rangle$

b) Si  $\lim Q_n = Q$  (en  $D$ ), entonces  $\lim \langle T, Q_n \rangle = \langle T, Q \rangle$  se puede ver que las distribuciones forman en sí un espacio vectorial  $D'$  que a su vez es una parte del espacio  $D^*$ . dual de  $D$ , conjunto de todos los funcionales lineales, continuos o no, sobre  $D$ . Se puede demostrar, usando el axioma de elección, la existencia de funcionales lineales discontinuos sobre  $D$ ; pero no se puede citar explícitamente uno solo, y es poco probable que se presente en la práctica.

Obsérvese que toda distribución de orden  $m$  es distribución de órdenes inferiores.

### 1.10 Ejemplos de distribuciones

I. Una función  $f$  se dice localmente sumable cuando es sumable en cualquier conjunto acotado.



Dada la función  $f$  localmente sumable, definimos la distribución (de orden cero)  $f$  por la relación:

$$\langle T_f, Q \rangle = \langle f, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) Q(x) dx$$

La integral se extiende únicamente sobre el soporte de  $Q$ , en dicho conjunto,  $Q$  es continua y  $f$  es sumable; por lo tanto  $f Q$  es sumable. Es inmediato que la funcional así definida es una funcional lineal de  $Q$ ; también es continua pues si las  $Q_n$  convergen hacia  $Q$  en  $D^0$ , convergen uniformemente hacia  $Q$  en el conjunto  $K$  que contiene todos los soportes, y se tiene para  $n \geq n_0$ :

$$|\langle f, Q \rangle - \langle f, Q_n \rangle| \leq \int_K |f(x)| |Q(x) - Q_n(x)| dx \leq$$

$$\xi \int_K |f(x)| dx = \xi I.$$

Es decir, se cumple  $\langle f, Q \rangle = \lim \langle f, Q_n \rangle$ .

Observemos que dos funciones iguales casi por doquier definen la misma distribución y se puede probar la recíproca: si dos funciones definen la misma distribución, son iguales casi por doquier. Por esta razón y también por el hecho de que existen funciones como la  $x^{-1}$  que no definen distribuciones, vemos que las funciones no son estrictamente

un caso particular de las distribuciones, sino que generalizan el concepto de clases de funciones localmente sumables, dos funciones pertenecen a la misma clase cuando son iguales casi por doquier.

II. Otro ejemplo es la distribución de Dirac  $\delta$  definida por la fórmula:

$$\langle \delta, Q \rangle = Q(0)$$

La distribución  $\delta(a)$  en el punto  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  está definida por:

$$\langle \delta(a), Q \rangle = Q(a)$$

Es inmediato que así se obtiene una funcional lineal y continua sobre  $D^0$ , las distribuciones son, por lo tanto, de orden cero.

## Derivación de distribuciones

Con la generalización hecha por Riemann del concepto de integral, se planteó el problema de saber si subsistía la correspondencia básica entre los conceptos de integral y función primitiva que se obtiene para las funciones continuas, y que es la base del cálculo integral.

El problema de la correspondencia entre integral y primitiva; nos limitaremos a citar dos resultados importantes para las funciones de una variable.

### 1.11 Teorema

Si  $f$  es sumable en  $(a, b)$  y si ponemos  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ,  
 $F(x)$  es continua en todos los puntos de  $(a, b)$  y en dicho intervalo se tiene  $F'(x) = f(x)$  casi por doquier.

### 1.12 Teorema

Si  $f(x)$  es acotada y es la derivada casi por doquier de  $F(x)$  en  $(a, b)$ ,  $f$  es sumable en  $(a, b)$  y se tiene para todo  $x$  de  $(a, b)$ :

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

Tomemos una función  $f(x)$  de una variable que es una integral indefinida. Por el teorema 1.11,  $f(x)$  es continua y su derivada  $f'(x)$  existe casi por doquier, siendo además sumable;  $f$  y  $f'$  son entonces distribuciones y vamos a ver qué relación existen entre ellas.

Apliquemos  $f$  a una función de prueba (ver definición 1.8), como  $Q$  es una función de soporte acotado, aplicándole integración por partes y teniendo en cuenta que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0$  tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) Q(x) dx &= \left[ Q(x) f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Q'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Q'(x) dx \end{aligned}$$

Es decir, tenemos la relación

$$\langle f', Q \rangle = - \langle f, Q' \rangle$$

Pasando ahora al caso de varias variables, aplicando el teorema de Fubini y repitiendo la integración por partes

$$\left\langle \frac{\delta f}{\delta x_i}, Q \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\delta Q}{\delta x_i} \right\rangle$$

que se conserva si en lugar  $f$  ponemos una distribución cualquiera  $T$  lo que nos conduce a adoptar la siguiente definición:

1.13 Definición

La derivada  $\frac{\delta T}{\delta x_i}$  de una distribución  $T$  es la funcional lineal y continua definida mediante la relación

$$\left\langle \frac{\delta T}{\delta x_i}, Q \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\delta Q}{\delta x_i} \right\rangle$$

Hay que probar que esta relación define una funcional lineal y continua.

Cualquiera que sea  $Q$  de  $D$ ,  $\frac{\delta Q}{\delta x_i}$  pertenece también a  $D$ , luego la funcional está definida en todos los puntos del espacio  $D$ ; es inmediato que es lineal; también es continua; en efecto, supongamos que las  $Q_n$  convergen hacia  $Q$  en  $D$ , por la definición de convergencia en  $D$ , también las  $\frac{\delta Q_n}{\delta x_i}$  convergen hacia  $\frac{\delta Q}{\delta x_i}$  en  $D$ , luego los números  $\left\langle T, \frac{\delta Q_n}{\delta x_i} \right\rangle$  convergen hacia  $\left\langle T, \frac{\delta Q}{\delta x_i} \right\rangle$  y, por lo tanto, la sucesión numérica  $\left\langle \frac{\delta T}{\delta x_i}, Q_n \right\rangle$  tiene como límite  $\left\langle \frac{\delta T}{\delta x_i}, Q \right\rangle$ , como las funciones de prueba son infinitamente derivables y admiten también la inversión del orden de sus derivadas tenemos entonces el siguiente teorema.

1.14 Teorema

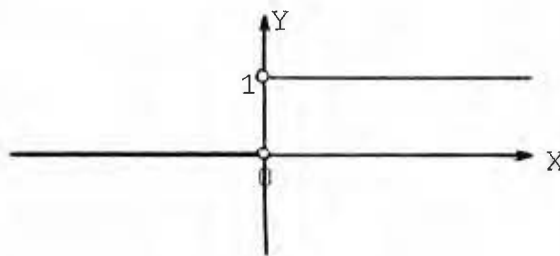
Toda distribución es infinitamente derivable y se puede cambiar el orden de las derivadas.

La propiedad de la derivabilidad, es una de las más importantes entre las propiedades de las distribuciones, en particular, una función es siempre infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones; si es una integral indefinida, la derivada en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada en el sentido de las funciones, pero en general no será así, puede suceder que la derivada en el sentido de las funciones no exista o que exista y sea distinta de la derivada en el sentido de las distribuciones, como puede verse en el caso siguiente.

1.15 Ejemplo

Consideremos como  $T$  la función de Heaviside  $Y$ , igual a cero para  $x < 0$ , a 1 para  $x > 0$ , i.e.

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



tenemos que

$$\langle Y, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) Q(x) dx$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle Y', Q \rangle &= - \langle Y, Q' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) Q'(x) dx = - \int_0^{+\infty} Q'(x) dx = \\ &= - Q(x) \Big|_0^{+\infty} = Q(0). \end{aligned}$$

Luego  $\langle Y', Q \rangle = \langle \delta, Q \rangle$

Generalizando este concepto, llamaremos a  $\sigma_n$  "salto" de la derivada n-ésima para  $x = 0$ , es decir, la diferencia: "límite por la derecha menos el límite por la izquierda". Llamaremos  $f', f'', \dots$ , a las derivadas de  $f$  tomadas en el sentido de las distribuciones; y a  $\{f'\}, \{f''\}, \dots$ , a las distribuciones representadas por las funciones iguales a las derivadas iguales para  $x > 0$  y  $x < 0$  y no definida para  $x = 0$ .

Por ejemplo; si  $f = Y$ ,  $f' = \delta$  y  $\{f'\} = 0$ .

Tomemos a  $f$  en el sentido de las distribuciones y apliquemosle a una función de prueba (ver definición 1.8 )

$$\begin{aligned} \langle f', Q \rangle &= - \langle f, Q' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Q'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 f(x) Q'(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) Q'(x) dx \\ &= - f(0^-) Q(0) + \int_{-\infty}^0 f'(x) Q(x) dx \\ &\quad + f(0^+) Q(0) + \int_0^{+\infty} f'(x) Q(x) dx \\ &= \sigma_0 Q(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) Q(x) dx \end{aligned}$$

$$\therefore f' = \{f'\} + \sigma_0 \delta$$

Se ha demostrado, en parte, el siguiente teorema:

1.16 Teorema

Sea  $f$  una función infinitamente derivable (en el sentido habitual de la teoría de funciones) para  $x < 0$  y para  $x > 0$  tal que cada una de sus derivadas tenga un límite por la derecha y un límite por la izquierda para  $x = 0$ . Entonces:

$$f' = \{f'\} + \sigma_0 \delta$$

$$f'' = \{f''\} + \sigma_0 \delta' + \sigma_1 \delta$$

⋮

$$f^{(n)} = \{f^{(n)}\} + \sigma_0 \delta^{n-1} + \sigma_1 \delta^{n-2} + \dots + \sigma_{n-1} \delta$$

1.17 Ejemplo

En particular tenemos que:

$$Y'(x) = \delta$$

y

$$\langle \delta', Q \rangle = -Q'(0)$$

⋮

$$\langle \delta^{(n)}, Q \rangle = (-1)^n Q^{(n)}(0) .$$

1.18 Definición

Dada una distribución  $T$ , se llama trasladada de  $T$ , por la traslación " $a$ " y se denota por  $t_a T$  a:

$$\langle t_a T, \psi \rangle = \langle T, \psi(x+a) \rangle$$



Definición del producto de convolución

El concepto de producto de convolución (también denominado producto de composición y producto integral) es de gran importancia en el análisis matemático clásico en el que se aplica a dos funciones. Su extensión al caso en que los factores son distribuciones, permite ampliar su alcance y aplicar y simplificar aspectos de la teoría.

Consideremos dos espacios euclídeos, el X de dimensión m y el Y de dimensión n. El espacio producto de X por Y es el espacio Z de dimensión m+n.

Dos funciones f(x) y g(y) definidas respectivamente en los espacios X e Y definen una función h(x,y) = f(x)·g(y) en el espacio Z que se denomina producto tensorial f ⊗ g de las funciones f y g.

1.11 Definición

Se llama producto de convolución de dos funciones f(x) y g(x) definidas en el espacio n-dimensional a la función h(x) definida por la relación

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) dt$$

La igualdad de las dos integrales se establece mediante el cambio vectorial de variable x - t = t, lo que prueba la conmutatividad del producto.

El producto se designa con la notación

$$h(x) = f(x)*g(x)$$

De la definición se deduce que para la existencia de  $h(x)$  no es suficiente que  $f(x)$  y  $g(x)$  sean sumables localmente; es necesario además que la integral sea convergente, lo cual exige relaciones de decrecimiento de los factores en infinito.

También se deduce de la definición que el producto de convolución no alterará si se reemplazan  $f(x)$  y  $g(x)$  por dos funciones iguales c.p.d. Esto nos sugiere la posibilidad de extender el producto de convolución a las distribuciones, aun cuando se puede prever que no será posible para una distribución cualquiera.

Para hacer la extensión vamos a estudiar la forma de la funcional  $\langle f*g, \psi \rangle$ . Se tiene:

$$\langle f*g, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-t)g(t) \psi(x) dx dt$$

El cambio de variable  $x = \xi + \eta$ ,  $t = \eta$  nos da:

$$\begin{aligned} \langle f*g, \psi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\xi) g(\eta) \psi(\xi+\eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g(\eta) \psi(\xi+\eta) d\eta \right] d\xi \\ &= \langle f(\xi) \otimes g(\eta), \psi(\xi+\eta) \rangle \end{aligned}$$

Esta relación nos sugiere la siguiente definición para el producto de convolución de dos distribuciones:

### 1.20 Definición

Se denomina producto de convolución de dos distribuciones S y T a la distribución  $S * T$ , definida por la relación

$$\langle S * T, \psi(x) \rangle = \langle S(\xi) \otimes T(\eta), \psi(\xi + \eta) \rangle$$

Esta relación tendrá sentido y define una funcional lineal y continua en todos los casos en que el soporte de  $S \otimes T$  y el de  $\psi(\xi + \eta)$  tengan como intersección un conjunto acotado.

### 1.21 Proposición

Se tienen las siguientes fórmulas:

$$1) \quad \delta * T = T$$

$$2) \quad \delta_{(a)} * T = t_a T, \quad \delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

$$3) \quad \delta' * T = T', \quad \delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

Demostración:

$$1) \quad \langle \delta * T, \psi \rangle = \langle \delta_\xi \otimes T_\eta, \psi(\xi + \eta) \rangle$$

$$= \langle T_\eta, \langle \delta_\xi, \psi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle T_\eta, \psi(\eta) \rangle = \langle T, \psi \rangle$$

$$2) \quad \langle \delta_{(a)} * T, \psi \rangle = \langle \delta_{(a)} \xi \otimes T_\eta, \psi(\xi + \eta) \rangle$$

$$= \langle T_\eta, \langle \delta_{(a)} \xi, \psi(\xi + \eta) \rangle \rangle$$

$$= \langle T_\eta, \psi(a + \eta) \rangle = \langle t_a T, \psi \rangle$$

Un caso particular de (2) se obtiene poniendo

$$T = \delta_{(a)} \text{ de donde } \delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \langle \delta' * T, \psi \rangle &= \langle \delta'_\xi \otimes T_\eta, \psi(\xi+\eta) \rangle \\
 &= \langle T_\eta, \langle \delta'_\xi, \psi(\xi+\eta) \rangle \rangle \\
 &= \langle T_\eta, -\psi'(\eta) \rangle = -\langle T, \psi' \rangle \\
 &= \langle T', \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Generalizando, se tiene

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

### 1.22 Proposición

Para derivar un producto de convolución, se deriva uno cualquiera de los factores a capricho.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 (S * T)' &= \delta' * (S * T) = (\delta' * S) * T = \\
 &= S' * T
 \end{aligned}$$

y tambien

$$\begin{aligned}
 (S * T)' &= \delta' * (S * T) = S * (\delta' * T) = \\
 &= S * T'
 \end{aligned}$$

nota: la asociatividad de la convolución viene dada por la asociatividad del producto tensorial respectivo.

### 1.23 Algebras de convolución

Recordemos que se denominan álgebras los espacios vectoriales en los que se ha definido una multiplicación interna con las propiedades asociativa y bilineal. El producto de convolución tiene estas dos propiedades; es además con

mutativo y tiene un elemento unidad, la  $\delta$ . Puede tener divisores de cero, ya que, por ejemplo se tiene  $\delta * x = 0$ .

En el espacio  $D'$  no esta siempre definido el producto de convolución; esto nos obliga, para definir algebras, a considerar subconjuntos de ese espacio, que son denominadas por álgebra de convolución.

#### 1.24 Definición

Un álgebra de convolución es un subespacio vectorial del espacio de Distribuciones  $D'$  en el que tiene sentido el producto de dos de sus elementos; debe ser cerrado y finalmente la  $\delta$  debe pertenecer como unidad.

#### 1.25 Ejemplo

El espacio  $E'$  de todas la distribuciones de soporte acotado.

#### 1.26 Definición

En un álgebra de convolución una ecuación es una ecuación de la forma

$$A * X = B$$

en donde tanto el coeficiente  $A$  como el segundo miembro  $B$  y la incógnita  $X$ , tienen que pertenecer al algebra de convolución dada.

#### 1.27 Teorema

Dado un coeficiente  $A$ , para que la ecuación  $A * X = B$  tenga una solución única, cualquiera que sea  $B$ , es necesario y suficiente que  $A$  tenga un inverso en el álgebra, es decir, un elemento  $A^{-1}$  tal que  $A * A^{-1} = \delta$ .

En efecto, si la solución existe siempre, para todo B, existe cuando el segundo miembro es  $\delta$ , luego existe el inverso.

Recíprocamente, si existe el inverso, se ve que la solución es  $A^{-1} * B$  y es única, puesto que  $A * X = A * Y$ , se tiene convolucionando con  $A^{-1}$  que  $X = Y$ .

La validez del teorema exige que se consideren únicamente las distribuciones del álgebra, lo que permite efectuar los productos de convolución y aplicar las propiedades asociativa y conmutativa. Si no se está en un álgebra, el teorema deja de ser cierto.

### 1.28 Teorema

Si D es un operador diferencial de orden m con coeficientes constantes y mónico

$$D = \frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{d}{dx} + a_m$$

$D\delta$  es invertible en  $D'$  y su inversa es el producto de Y (función de Heaviside) por la solución Z de la ecuación homogénea  $DZ = 0$ , verificando la "condiciones iniciales"

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1$$

Demostración:

La función YZ tiene discontinuidades en el origen y su derivada debe calcularse usando 1.16 y 1.22

$$(YZ)' = YZ' + \delta Z(0)$$

$$(YZ)'' = YZ'' + \delta Z'(0) + \delta' Z(0)$$

así sucesivamente

$$(YZ)^{(m-1)} = Y Z^{(m-1)} + \delta Z^{(m-2)} + \dots + \delta^{(m-2)} Z(0)$$

$$(YZ)^{(m)} = Y Z^{(m)} + \delta Z^{(m-1)}(0) + \dots + \delta^{(m-1)} Z(0)$$

evaluando tenemos

$$(YZ)^{(k)} = Y Z^{(k)} \quad \text{con } k \leq m-1$$

$$(YZ)^{(m)} = Y Z^{(m)} + \delta$$

de donde se deduce

$$D \delta * (YZ) = D (YZ) = Y DZ + \delta$$

y como Z es solución de la ecuación homogénea  $DZ = 0$  y se tiene

$$D(YZ) = \delta$$

### 1.29 Multiplicación de distribuciones

La multiplicación ST de dos distribuciones arbitrarias S y T, no es posible. Así, si f es una función localmente sumable, define una distribución; pero no existe ninguna razón para que  $f^2$  sea también localmente sumable.

Ejemplo:

$$\text{para } n = 1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \quad f^2 = \frac{1}{|x|}$$

por lo tanto no definirá una distribución.

Nosotros nos limitaremos a definir el producto cuando uno de los dos factores es una distribución y el otro factor una función infinitamente derivable en el sentido usual.

1.30 Proposición

Existe un producto  $\alpha T$ , donde  $T$  es una distribución arbitra-  
ria y  $\alpha$  una función infinitamente derivable en el sentido  
usual, definido por:

$$\langle \alpha T, \psi \rangle = \langle T, \alpha \psi \rangle$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \langle \alpha T, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha(x) T(x)) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T(x) (\alpha(x) \psi(x)) dx = \langle T, \alpha \psi \rangle \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\langle \alpha T, \psi_1 + \psi_2 \rangle = \langle \alpha T, \psi_1 \rangle + \langle \alpha T, \psi_2 \rangle$$

$$\langle \alpha T, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \alpha T, \psi \rangle$$

Supongamos ahora que  $\psi_j \rightarrow 0$  en  $D$ . Y sea  $\text{Sop } \psi_j \subset K, \forall j$

Mostremos que  $\alpha \psi_j \rightarrow 0$  en  $D$ .

Por Leibnitz: 
$$D^P(\alpha \psi_j) = \sum_{q \leq P} \binom{P}{q} D^q \alpha D^{P-q} \psi_j$$

$$|D^P(\alpha \psi_j)| \leq \sum_{q \leq P} \binom{P}{q} \text{Máx}_k |D^q \alpha| \text{Máx}_k |D^{P-q} \psi_j|$$

y como  $\text{Máx}_k |D^{P-q} \psi_j| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$

se tiene  $\text{Máx}_k |D^P \alpha \psi_j| \xrightarrow{j \rightarrow 0} 0$

Luego  $\alpha \psi_j \rightarrow 0$  en  $D$

Entonces  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \alpha T, \psi_j \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \alpha \psi_j \rangle \rightarrow 0$  ya que  $T \in D'$ .



1.31 Ejemplo

$$\langle \alpha\delta, \psi \rangle = \langle \delta, \alpha\psi \rangle = \alpha(0)\psi(0) = \langle \alpha(0)\delta, \psi \rangle$$

de donde

$$\alpha.\delta = \alpha(0)\delta$$

CAPITULO II

FUNDAMENTOS DE RESISTENCIA  
DE MATERIALES

## Capítulo II

### 2.1 Barras sometidas a fuerzas axiales:

La experiencia enseña que cuando se somete a compresión o tracción una barra, en forma longitudinal, ésta se deforma o se rompe de acuerdo a su resistencia y a su rigidez; estas cualidades dependen de sus propiedades físicas, geométricas, etc.

Es natural pensar que una barra "suficientemente uniforme" distribuye una carga aplicada en uno de sus extremos en forma uniforme de tal manera que la fuerza por unidad de área es una constante que llamaremos tensión específica  $\sigma$ .

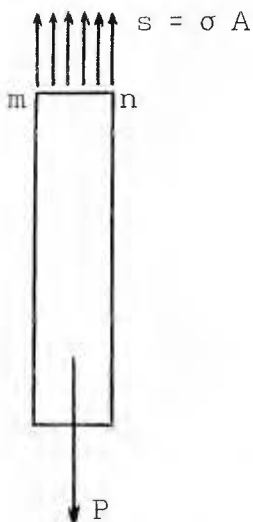
Así,  $\sigma = \frac{P}{A}$ , donde  $P$  es la fuerza aplicada longitudinalmente y  $A$  es el área transversal que se supone igual en cualquier sección de la barra. Se plantea entonces en el estudio de estructuras las dos preguntas:

- 1) ¿Es suficientemente fuerte la viga o barra para resistir la cargada aplicada?
- 2) ¿Es suficientemente rígida para evitar deformaciones excesivas?

A estas dos preguntas nos referiremos a lo largo de este trabajo y, en efecto, son las que motivan el trabajo en forma global.

Si se denota con  $s$  la resultante de las fuerzas internas o resultante de tensiones entre las "fibras" de una barra a la que se le ha aplicado una carga  $P$ , de tal forma que la barra no se ha deformado, es natural que  $s = P$ , o sea,  $\sigma A = s$ .

En una sección cualquiera  $m, n$  de una viga con carga  $p$ , la discusión anterior se representaría por:

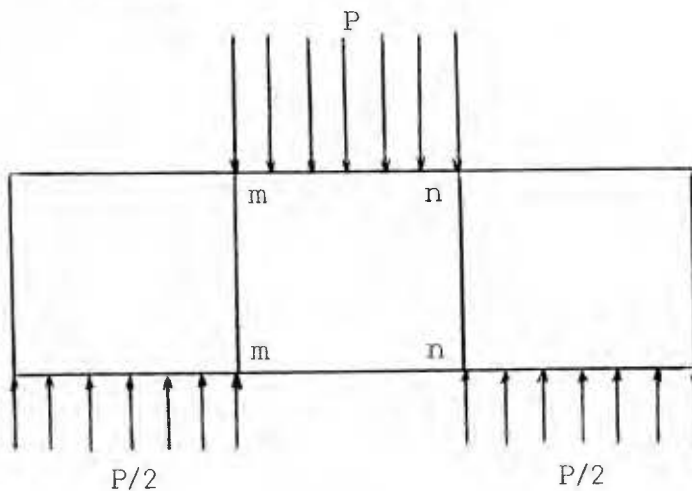


debe notarse que, de nuevo, asumimos homogeneidad de la barra, de tal forma que "todas las fibras de la viga" resisten con igual fuerza (i.e.  $\sigma$  es constante).

Esta observación requiere necesariamente que la fuerza aplicada  $P$  tenga como línea de acción, aquella que pasa por el centro de gravedad de cada sección recta. Para demostrar esto con un poco de generalidad se utiliza el hecho de que  $P$  es constante a lo largo de la barra y que  $\sigma = \frac{P}{A}$  es también constante.

Toda la discusión anterior es tanto aplicable al caso de tracción como al como al de compresión, solamente que en este último se requiere que la sección recta no sea poca, porque hay que evitar las deformaciones.

Consideremos el diagrama siguiente;



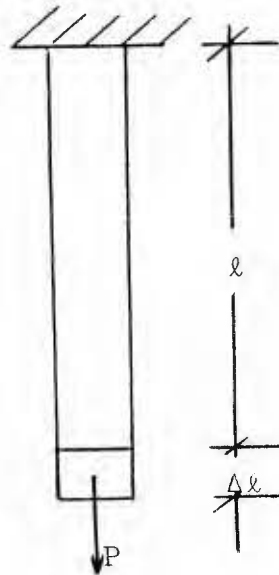
El cual está principalmente sometido a fuerzas que tienden a cortarlo transversalmente en las secciones mn y las llamaremos esfuerzo cortante. Si designamos por  $\tau$  el esfuerzo cortante por unidad de área, es decir, tensión específica cortante media, vemos que la condición de equilibrio obliga que  $\tau \cdot A = P$ , de aquí

$$\tau = \frac{P}{A}$$

donde  $A$  es el área total sometida a esfuerzo cortante.

Por lo general, estas resultantes no son tan simples para su cálculo. Por lo que respecta a diversas estructuras que se encuentran sometidas a tracción, compresión y cortaduras directas los diseñan con dimensiones de modo que puedan resistir económicamente y con un margen de seguridad para las cargas a que son sometidas.

Volvamos al caso de la barra prismática sometida a tracción. Cuando aumentamos la fuerza de tracción  $P$ , necesariamente deberá producirse un ligero estiramiento en la barra que llamaremos  $\Delta l$



De igual forma, si disminuimos gradualmente la carga  $P$ , hasta que llegue a cero, el alargamiento  $\delta$  también tenderá a cero, es decir, la barra tenderá a su longitud inicial. Así, definimos el alargamiento por unidad de longitud de la barra por

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

y se denominará deformación de tracción. Análogamente, para una barra sometida a compresión, la cantidad  $\epsilon$  definirá la reducción por unidad de longitud de la barra o deformación de compresión. Por convención, la primera de éstas se toma positiva mientras que la segunda se toma negativa. Si una barra sometida a tracción recupera completamente su longitud original al hacer tender  $p$  a cero se dice que es un material perfectamente elástico, como por ejemplo: acero, de lo contrario, se dice que es sólo parcialmente elástico.

Experimentos han puesto de manifiesto que diversos materiales sometidos a tracción, dentro del rango de comportamiento elástico del material, que el alargamiento  $\Delta l$  es directamente proporcional a la fuerza de tracción  $p$  y a la longitud de la barra  $l$  e inversamente proporcional al área de la sección recta  $A$  de la barra.

Esto es,

$$\Delta l \propto \frac{P \cdot l}{A}$$

O sea,

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{P \cdot l}{A} = \frac{Pl}{AE}$$

donde  $E$  es una constante de proporcionalidad para cada material y se le llama módulo de elasticidad. A esta última relación expresada se le conoce por Ley de Hooke. Empleando las notaciones:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

La Ley de Hooke puede escribirse

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{o} \quad \sigma = E \epsilon$$

es decir, la tensión es proporcional a la deformación.

El módulo de elasticidad puede ser definido por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\text{tensión}}{\text{alargamiento}}$$

y tiene como unidades las mismas de la tensión  $\text{Kg/cm}^2$  por ser la deformación adimensional.

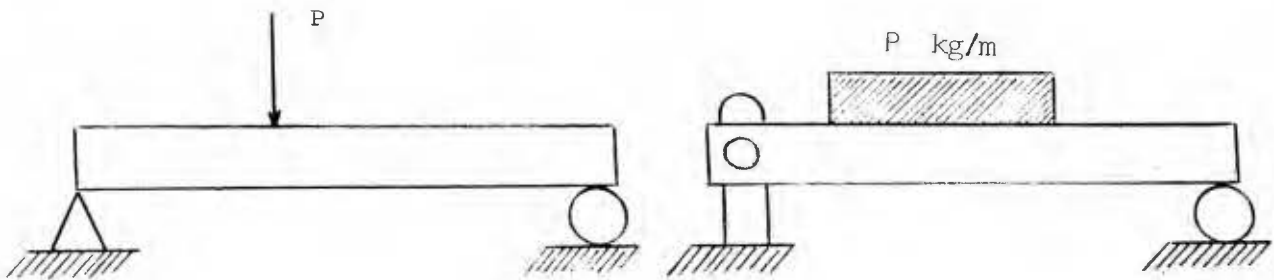


## 2.2 Tensiones en vigas

Una barra que sea razonablemente larga con respecto a sus dimensiones laterales convenientemente soportada y sometida a fuerzas transversales aplicadas, de modo que provocan flexión de la pieza en un plano axial, la denominaremos viga.

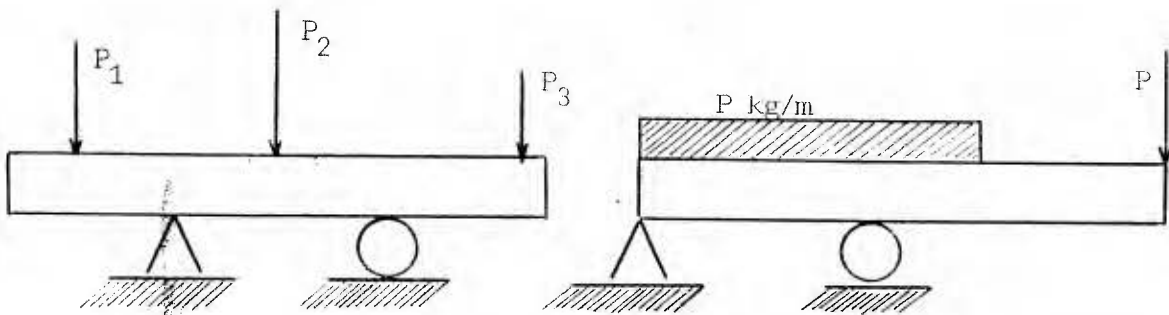
Diremos que una viga está estáticamente determinada cuando se pueden determinar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones del equilibrio estático. Los valores de estas reacciones son independientes de las deformaciones de la viga. Una viga que está apoyada libremente en los dos extremos se llama simplemente apoyada. Este término implica que los apoyos extremos son capaces de ejercer solamente fuerzas y no momentos. Por lo tanto, no existe impedimento al giro de los extremos de la barra en los apoyos cuando flexa bajo las cargas.

### **Ejemplos:**

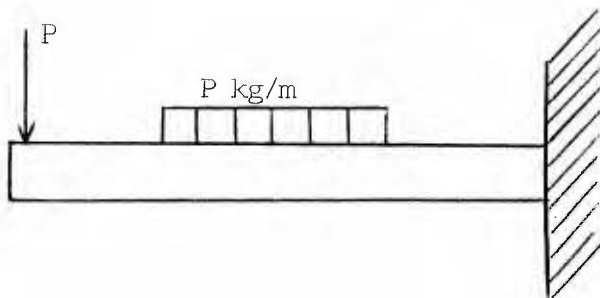


Una viga apoyada libremente en dos puntos y que tiene uno o los dos extremos que continúan más allá de los apoyos se llama viga con voladizos.

**Ejemplos:**



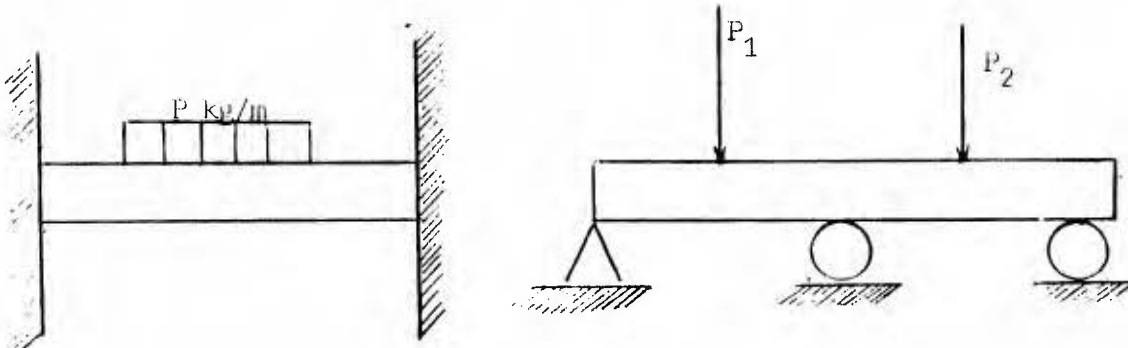
Una viga sujeta solamente en un extremo, de tal manera que su eje no pueda girar en ese punto, se llama viga en voladizo.



Todas éstas, son ejemplos de vigas estáticamente determinadas.

Las vigas estáticamente indeterminadas son aquellas en las cuales el número de reacciones que se ejercen sobre la viga excede del número de ecuaciones del equilibrio estático y hay que suplementar estas ecuaciones con otras basadas en las deformaciones de la viga.

**Ejemplos:**



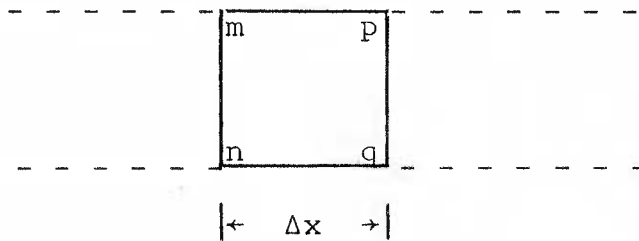
De ahora en adelante, cuando hablemos de vigas estáticamente determinadas, se sobreentenderá que estamos tratando aquellas en las cuales el número de reacciones del equilibrio estático se obtienen mediante las ecuaciones:

$$\sum x_i = 0 \qquad \sum y_i = 0 \qquad \sum M_i = 0$$

con las cuales pueden ser calculadas fácilmente la fuerza normal  $N_x$ , la fuerza cortante  $Q_x$  y el momento  $M_x$  respectivamente.

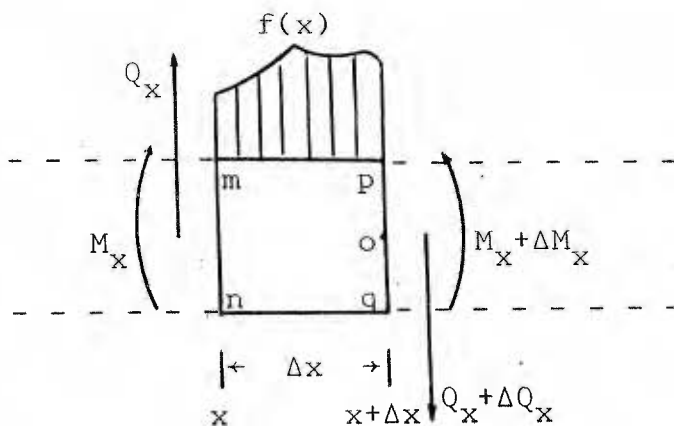
Veamos ahora que relación existe entre el esfuerzo cortante y el momento flector en una sección recta cualquiera de una viga cargada transversalmente.

Consideremos un elemento segregado de la viga por dos secciones rectas adyacentes  $mn$  y  $pq$ , separadas la distancia  $\Delta x$ .



En la cara izquierda de este elemento representamos el esfuerzo cortante  $Q_x$  y el momento flector  $M_x$ .

Si existe una carga  $f$  sumable repartida entre  $mn$  y  $pq$



Tendríamos la siguiente ecuación para la suma algebraica para los momentos de todas las fuerzas con respecto al punto o:

$$- M_x + (M_x + \Delta M_x) + \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)(x + \Delta x - t) dt}{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt +$$

$$- Q_x \Delta x = 0$$

Aplicando el teorema de la media

$$\Delta M_x + f(\xi) \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - t) dt - Q_x \Delta x = 0 \quad \text{con } x \leq \xi \leq x+\Delta x$$

integrando:

$$\Delta M_x + f(\xi) \frac{(\Delta x)^2}{2} - Q_x \Delta x = 0$$

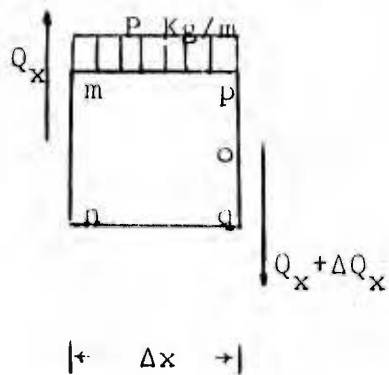
de donde

$$\frac{\Delta M_x}{\Delta x} = Q_x - f(\xi) \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( Q_x - f(\xi) \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{dM_x}{dx} = Q_x$$

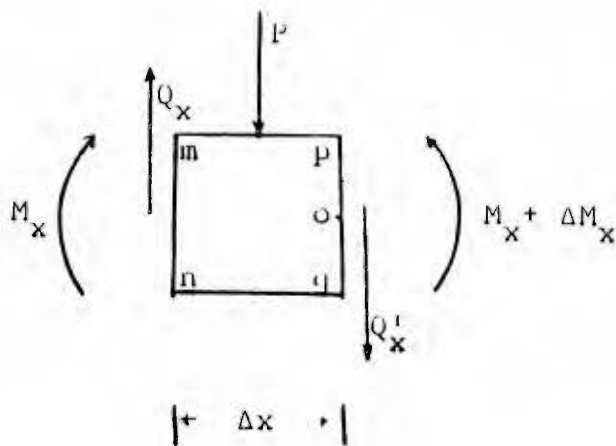
Consideremos ahora una carga uniformemente distribuida P entre las secciones mn y pq:



Tenemos entonces que:

$$\frac{dQ_x}{dx} = -P$$

Si hay una carga concentrada  $P$  en la viga entre las secciones  $m$  y  $p$



Igualando a cero la suma algebraica de las fuerzas verticales que actúan sobre el elemento, obtenemos

$$Q'_x = Q_x - P$$

en cuyo caso hay una variación brusca del esfuerzo cortante en la longitud  $\Delta x$ . En consecuencia, podemos deducir de la ecuación

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x$$

que habrá una discontinuidad en la derivada  $\frac{dM_x}{dx}$  en el punto de aplicación de una carga concentrada  $P$  sobre la viga.

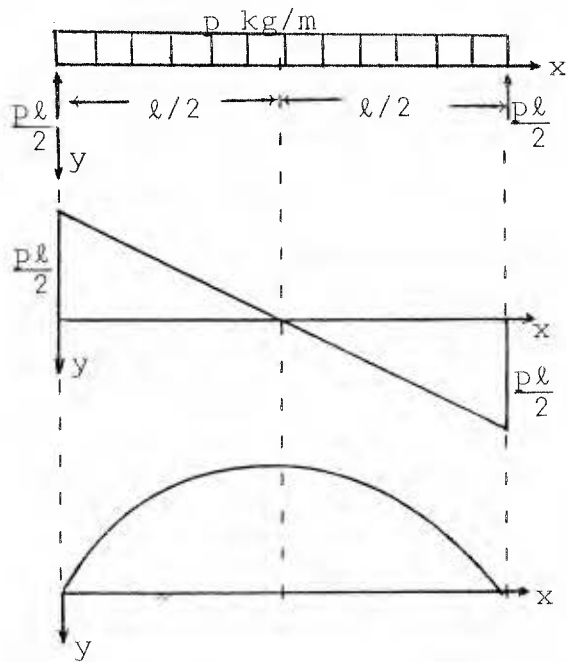
Este es uno de los problemas que resolveremos aplicando la teoría de distribuciones ya que éstas se pueden considerar como una distribución y como tales, es derivable.

### **Ejemplos de diagramas del esfuerzo cortante y del momento flector:**

Para esta representación gráfica tomaremos como abscisa la distancia que define la situación de la sección y como ordenada el valor correspondiente del esfuerzo cortante o del momento flector.

#### Ejemplo 1:

Una viga simplemente apoyada con distribución uniforme de carga transversal de intensidad  $p$ .

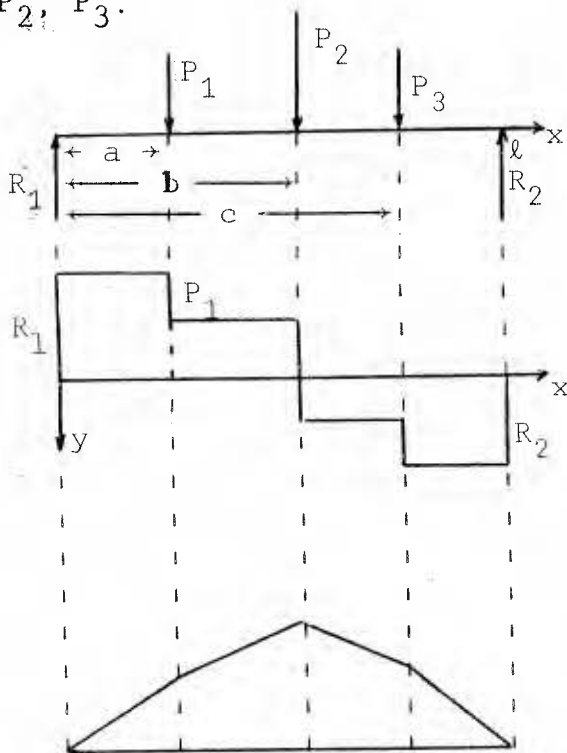


$$Q_x = \frac{p\ell}{2} - px ; 0 \leq x \leq \ell$$

$$M_x = \frac{p\ell x}{2} - \frac{px^2}{2}; 0 \leq x \leq \ell$$

Ejemplo 2:

Una viga simplemente apoyada con tres cargas puntuales  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ .



$$Q_x = \begin{cases} R_1 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ R_1 - P_1 & \text{si } a < x \leq b \\ R_1 - P_1 - P_2 & \text{si } b < x \leq c \\ R_1 - P_1 - P_2 - P_3 & \text{si } c < x \leq \ell \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} R_1 x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ (R_1 - P_1)x & \text{si } a \leq x \leq b \\ (R_1 - P_1 - P_2)x & \text{si } b \leq x \leq c \\ (R_1 - P_1 - P_2 - P_3)x & \text{si } c \leq x \leq \ell \end{cases}$$

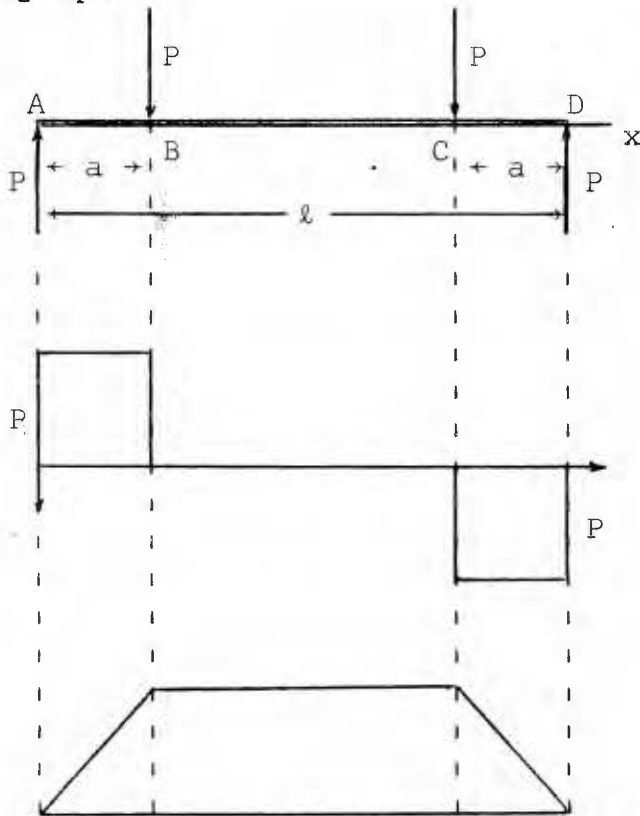


Obsérvese que tanto el esfuerzo cortante  $Q_x$  como el momento flector  $M_x$  no es derivable en los puntos de aplicación de las cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ .

### 2.3 Tensiones de flexión en las vigas

Una viga sometida a fuerzas que produzcan un esfuerzo cortante nulo y un momento flector constante en alguna de sus secciones se llama flexión pura.

Ejemplo:



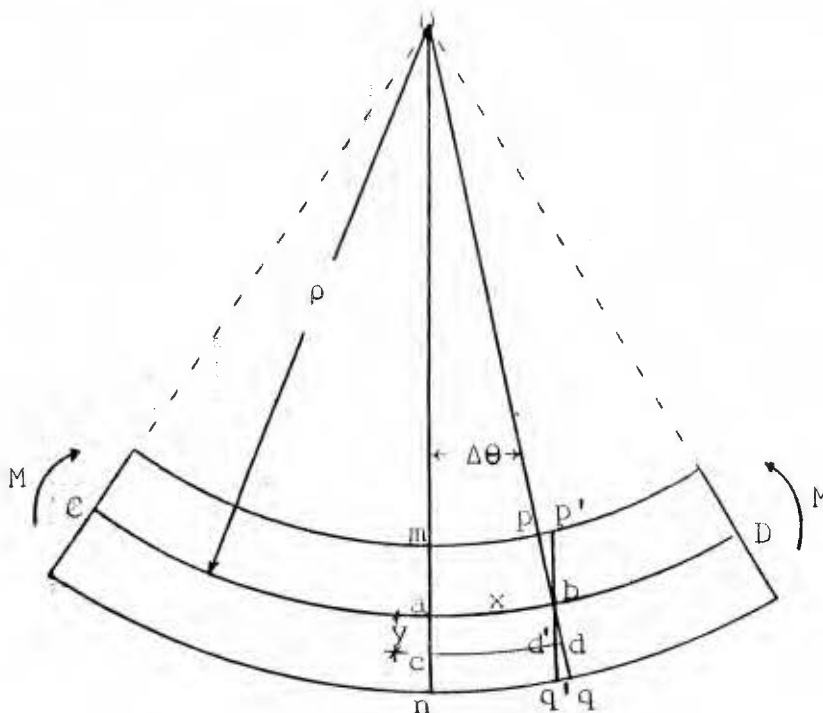
$$Q_x = \begin{cases} P & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq l-a \\ -P & \text{si } l-a \leq x \leq l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} Px & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \text{constante} & \text{si } a \leq x \leq l-a \\ -Px & \text{si } l-a \leq x \leq l \end{cases}$$

Ahora estudiaremos el estado de tensiones internas producidas por flexión pura. Para ello debemos examinar la deformación que tiene lugar en el interior del material.

Supondremos que la viga es prismática y que tiene un plano axial de simetría, el cual se toma como plano  $xy$ , en el cual actúan las fuerzas. Suponemos además que el materia es homogéneo y que obedece la ley de Hooke.

Puesto que el momento flector es constante para una flexión pura, es razonable admitir que la deformación por flexión es también uniforme, es decir, tomará la forma de un arco circular.



Como consecuencia de la deformación, las fibras de la cara convexa se alargan ligeramente mientras las de la cara cóncava se acortan, respecto a la media aritmética de estos dos extremos que llamaremos superficie neutra la intersección de esta superficie neutra con el plano axial de simetría se denomina eje neutro de la viga. Después de la deformación, los planos de las

dos secciones transversales adyacentes mn y pq se intersecan en O. Designamos por  $\Delta\theta$  el ángulo formado por estos dos planos; por x la distancia  $ab = cd'$ , y por  $\Delta x$  la distancia d'd. Tenemos que el triángulo abO es semejante al triángulo d'db por el teorema de Thales, de donde se obtiene la relación:

$$\frac{d'd}{ab} = \frac{d'b}{aO}$$

O sea

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{y}{\rho}$$

pero  $\frac{\Delta x}{x}$  es la deformación unitaria  $\epsilon$  (ver definición en la página 33) que por la ley de Hooke es proporcional al esfuerzo unitario  $\sigma$  (ver definición en la página 35) siendo su constante de proporcionalidad el inverso del módulo de elasticidad ( $\frac{1}{E}$ ).

$$\sigma = E \frac{\Delta x}{x}$$

luego

$$\sigma = \frac{y E}{\rho}$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo en cada punto de la sección transversal A de la viga.

Multiplicando por y ambos lados de la igualdad e integrando sobre A tenemos:

$$\int_A y \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

o sea

$$M = \frac{E}{\rho} I$$

$$M = \int_A y \sigma dA$$

de donde

donde

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I}$$

$$I = \int_A y^2 dA$$

Nota: este momento va ha ser igual al momento producido por las fuerzas externas para que la viga este en equilibrio.

En geometría analítica se demuestra que en coordenadas cartesianas, la curvatura de una línea se define por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

donde x localiza un punto en la alástica de una viga flexionada y y es la deflexión.

Sustituyendo el término  $\frac{1}{\rho}$  por  $\frac{M}{E I}$  tenemos la ecuación diferencial exacta de la elástica. Puesto que son muy pequeñas las deflexiones que se permiten en la gran mayoría de las estructuras de ingeniería, tambien lo es la pendiente  $y'$  de la elástica. Por lo tanto, el cuadrado de la pendiente  $y'$  es una cantidad depreciable comparada con la unidad y la ecuación anterior se simplifica en:

$$\frac{1}{\rho} \approx y''$$

cuando la curva es cóncava hacia abajo, el momento flector

es negativo y  $y''$  es positiva. Cuando es concava hacia arriba, los signos serían los contrarios.

De modo que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{E I}$$

ecuación que se conoce con el nombre de ecuación diferencial de la viga elástica.

Esta ecuación tiene tres limitaciones a consecuencia de los supuestos establecidos para su deducción:

- a) la ecuación está deducida para flexión pura, no comprende deformaciones por cizalladura del material,
- b) la relación mutua entre el momento y la curvatura implica que el esfuerzo es proporcional a la deformación, o sea, es aplicable la ley de Hooke, y
- c) puesto que las aproximaciones se justifican para curvas de deformación muy suaves, esta ecuación está limitada a flexiones muy pequeñas.

### CAPITULO III

APLICACION DE LAS DISTRIBUCIONES  
PARA LA SOLUCION DE LA VIGA ELASTICA

### CAPITULO III

#### Aplicación de las distribuciones para la solución de la viga elástica.

En el capítulo anterior se estableció la ecuación fundamental para la viga elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E I} \quad (\text{ecuación 3.1})$$

sin embargo, es muy conveniente establecer esta ecuación en función de la carga que opera sobre la viga.

Para el caso en que la función de carga sea una función  $Q$ , mostramos en el capítulo II que

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = Q(x)$$

en cuyo caso la ecuación 3.1 toma la forma

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{Q(x)}{E I} \quad (\text{ecuación 3.2})$$

sin embargo, si la función momento no es derivable, no podemos obtener esta relación.

Vamos a mostrar que cuando este sea el caso, derivando la función de momento en el sentido de distribuciones obtenemos una forma de la ecuación 3.2 que nos permite resolver el problema de la viga elástica de una forma más general.



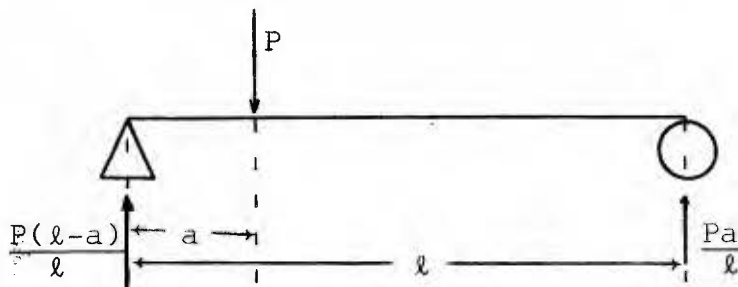
### 3.1 Funciones de carga para los casos más usuales

I Si la función de carga es una función continua

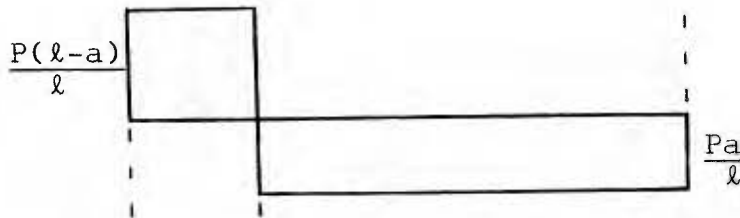
En el caso en que la función de carga sea una función continua, tenemos que todo el análisis para la viga elástica se hace de la forma usual, es decir, queda igual.

II Si la función de carga es concentrada

Lo haremos para una viga estáticamente bien determinada



El diagrama del esfuerzo cortante es



Puesto que  $Q(x)$  es la derivada (en el sentido de distribuciones) de la función esfuerzo cortante, definida por la siguiente relación:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{P(l-a)}{l} & \text{si } 0 \leq x < a \\ -\frac{Pa}{l} & \text{si } a \leq x \end{cases}$$

Esta derivada debe ser tomada en el sentido de distribucio-  
nes debido al salto del esfuerzo cortante  $V$  en el punto  $x = a$ .  
Para ello tomemos una función de prueba  $\psi$  cualesquiera, y  
recordando que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$  tenemos:

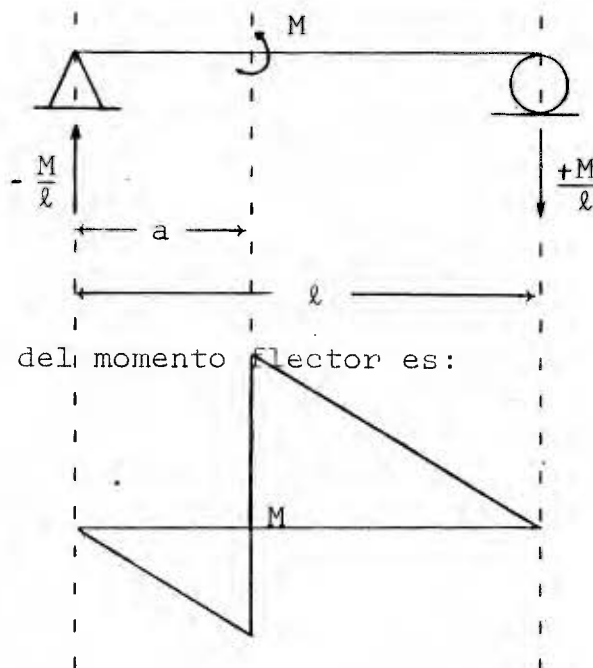
$$\begin{aligned} \langle V', \psi \rangle &= -\langle V, \psi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) \psi'(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^a V(x) \psi'(x) dx - \int_a^{+\infty} V(x) \psi'(x) dx \\ &= \frac{-P(l-a)}{l} \int_{-\infty}^a \psi'(x) dx + \frac{Pa}{l} \int_a^{+\infty} \psi'(x) dx \\ &= \frac{-P(l-a)}{l} (\psi(a) - 0) + \frac{Pa}{l} (0 - \psi(a)) \\ &= -P \psi(a) = \langle -P \delta(a), \psi \rangle \end{aligned}$$

de donde

$$Q(x) = -P \delta(a)$$

Consideremos ahora una viga estáticamente bien determinada,  
en la cual se ha producido un momento en el punto  $x = a$ .

Ver diagrama en la página siguiente:



El diagrama del momento flector es:

Puesto que  $V(x)$  es la derivada (en el sentido de distribuciones) de la función momento que tiene como función:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{M}{l} x & \text{si } 0 \leq x < a \\ -\frac{M}{l} x + M & \text{si } a < x \leq l \end{cases}$$

De nuevo, esta derivada debe ser tomada en el sentido de las distribuciones debido al salto del momento flector en el punto  $x = a$ .

Sea  $\psi$  una función de prueba cualesquiera

$$\begin{aligned} \langle M', \psi \rangle &= -\langle M(x), \psi'(x) \rangle \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} M(x) \psi'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^a M(x) \psi'(x) dx - \int_a^{+\infty} M(x) \psi'(x) dx \\
&= - \frac{M}{\ell} \int_{-\infty}^a x \psi'(x) dx - \frac{M}{\ell} \int_a^{+\infty} x \psi'(x) dx + \\
&+ M \int_a^{+\infty} \psi'(x) dx \\
&= - \frac{M}{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi'(x) dx + M \int_a^{+\infty} \psi'(x) dx \\
&= - \langle \frac{M}{\ell} x, \psi' \rangle - M \psi(a) \\
&= \langle (\frac{M}{\ell} x)', \psi \rangle - M \langle \delta(a), \psi \rangle
\end{aligned}$$

de donde

$$V(x) = \{ (\frac{M}{\ell} x)' \} - M \delta(a)$$

o sea:

$$V(x) = \{ \frac{M}{\ell} \} - M \delta(a)$$

entonces, por el teorema 1.16

$$V'(x) = \{ (\frac{M}{\ell})' \} + \sigma_0 \delta'_{(a)} + \sigma_1 \delta_{(a)}$$

de donde

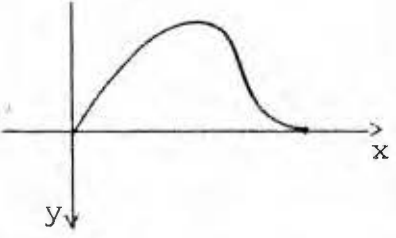
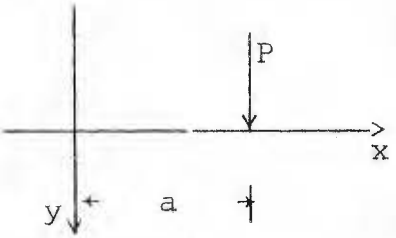
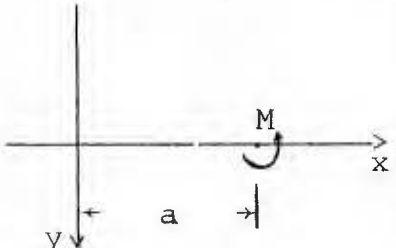
$$Q(x) = \sigma_0 \delta'_{(a)} + \sigma_1 \delta_{(a)}$$

puesto que el salto  $\sigma_1 = 0$

$$Q(x) = \sigma_0 \delta'_{(a)} = M \delta'_{(a)}$$

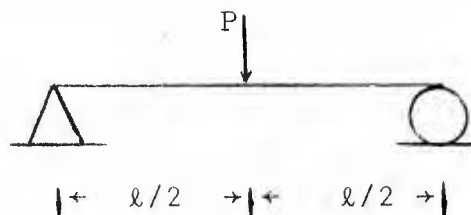
por lo que podemos concluir, un momento tiene una interpretación de la primera derivada de  $\delta$ .

3.2 En resumen

	tipo de carga	distribución
	si la carga es una función continua $f$	$f$
	si la carga se reduce a una carga concentrada $P$ aplicada en el punto $(a, 0)$	$P \delta(a)$
	si la carga es un momento $M$ aplicado en el punto $(a, 0)$	$M \delta'(a)$

3.3 Ejemplo

Cálculo de la ecuación de deformación de una viga, estáticamente bien determinada y sometida a una carga concentrada  $P$



hay que resolver la ecuación (en el sentido de distribuciones) siguiente:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P \delta(\ell/2)$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = y(\ell) = 0$$

$$y''(0) = y''(\ell) = 0$$

### 3.4 Nota:

Tenemos para el operador diferencial  $D = \frac{d^4}{dx^4}$  que  $D \delta$  es invertible en  $D'$  y su inversa es el producto de la función de Heaviside por la solución  $Z$  de la ecuación homógena  $DZ = 0$  que satisface las condiciones iniciales:

$$Z(0) = Z'(0) = Z''(0) = 0, \quad Z'''(0) = 1$$

de donde tenemos que

$$Z = \frac{x^3}{6}$$

luego

$$(D\delta)^{-1} = Y(x) \frac{x^3}{6}$$

Solución:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P \delta(\ell/2)$$

convolucionando con  $\delta$

$$\delta * EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \delta * P \delta(\ell/2)$$

aplicando 1.22 y 1.21.1 tenemos

$$E I \left( \frac{d^4 \delta}{dx^4} * y \right) = P \delta(\ell/2)$$

de donde

$$\begin{aligned} E I y &= \left( Y(x) \frac{x^3}{6} \right) * \left( P \delta(\ell/2) \right) \text{ por 1.28} \\ &= P \left( \delta(\ell/2) * Y(x) \frac{x^3}{6} \right) \\ &= P \left( t_{(\ell/2)} Y(x) \frac{x^3}{6} \right) \text{ por 1.21} \\ &= P Y(x - \ell/2) \frac{(x - \ell/2)^3}{6} \text{ por 1.18} \end{aligned}$$

por lo que tenemos una solución particular

$$y = \frac{P}{E I} Y(x - \ell/2) \frac{(x - \ell/2)^3}{6}$$

la solución general será de la forma

$$y = \frac{P}{E I} Y(x - \ell/2) \frac{(x - \ell/2)^3}{6} + \sum_{k=0}^3 c_k x^k.$$

Cálculo de las constantes  $c_k$

$$y(0) = 0 = c_0$$

$$y(\ell) = 0 = \frac{P}{E I} \frac{(\ell/2)^3}{6} + c_1 \ell + c_2 \ell^2 + c_3 \ell^3$$

derivando

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{P}{E I} \delta(\ell/2) \frac{(x - \ell/2)^3}{6} + \frac{P}{E I} Y(x - \ell/2) \frac{(x - \ell/2)^2}{2} \\ &+ c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2 \end{aligned}$$

pero

$$\delta_{(l/2)} \frac{(x-l/2)^3}{6} = 0 \quad \text{por 1.31}$$

simplificando  $y'$ :

$$y'(x) = \frac{P}{E I} Y(x-l/2) \frac{(x-l/2)^2}{2} + c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2$$

derivando

$$y''(x) = \frac{P}{E I} Y(x-l/2) (x-l/2) + 2 c_2 + 6 c_3 x$$

evaluando

$$y''(0) = 0 = c_2$$

$$y''(l) = 0 = \frac{P}{E I} (l/2) + 6 c_3 l$$

de donde

$$c_3 = \frac{-P}{12 EI} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{3 Pl^2}{48 EI}$$

por lo tanto, la solución será

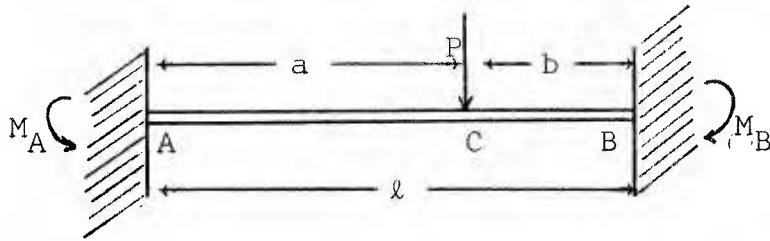
$$y(x) = \frac{P}{EI} Y(x-l/2) \frac{(x-l/2)^3}{6} + \frac{3 Pl^2}{48 EI} x - \frac{P}{12 EI} x^3$$

### 3.5 Ejemplo

Para apreciar mejor la benevolencia del método, apliquemos lo a una viga estáticamente indeterminada.

Consideremos la viga que tiene ambos extremos empotrados y soporta una carga concentrada o puntual  $P$  en  $x = a$ .





utilizando el resumen 3.2, tenemos que

$$Q(x) = \begin{cases} M_A \delta'(0) & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < l; x \neq a \\ P \delta(a) & \text{si } x = a \\ -M_B \delta'(l) & \text{si } x = l \end{cases}$$

Para calcular la ecuación de deformación de la viga hay que resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$E I \frac{d^4 y}{dx^4} = M_A \delta'(0) - M_B \delta'(l) + P \delta(a)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) &= \frac{M_A}{EI} \\ y'(0) = y'(l) = 0, \quad y''(l) &= -\frac{M_B}{EI} \end{aligned}$$

Solución:

convolucionando con  $\delta$  la ecuación

$$\delta * E I \frac{d^4 y}{dx^4} = \delta * (M_A \delta'(0) - M_B \delta'(l) + P \delta(a))$$

usando 1.22 y 1.21 tenemos

$$E I \left( \frac{d^4 \delta}{dx^4} * y \right) = M_A \delta'(0) - M_B \delta'(l) + P \delta(a)$$

usando la nota 3.4

$$\begin{aligned}
EI y &= \left( Y(x) \frac{x^3}{6} \right) * \left( M_A \delta'(0) - M_B \delta'(l) + P \delta(a) \right) \\
&= M_A \left( Y(x) \frac{x^3}{6} \right)' - M_B \left( Y(x) \frac{x^3}{6} \right) * \delta'(l) + \\
&+ P t_a \left( Y(x) \frac{x^3}{6} \right) \\
&= M_A Y(x) \frac{x^2}{2} - M_B Y(x-l) \frac{(x-l)^2}{2} + P Y(x-a) \frac{(x-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

de donde , una solución particular es

$$y_p = \frac{M_A}{EI} Y(x) \frac{x^2}{2} - \frac{M_B}{EI} Y(x-l) \frac{(x-l)^2}{2} + \frac{P}{EI} Y(x-a) \frac{(x-a)^3}{6}$$

la solución general será de la forma

$$y = y_p + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

Cálculo de las constantes , utilizando las condiciones iniciales dadas:

$$y(0) = 0 = c_0$$

$$y(l) = 0 = \frac{M_A}{EI} \frac{l^2}{2} + \frac{P}{EI} \frac{(l-a)^3}{6} + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 \quad (1)$$

derivando y:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{M_A}{EI} Y(x) x - \frac{M_B}{EI} Y(x-l) (x-l) + \frac{P}{EI} Y(x-a) \frac{(x-a)^2}{2} \\
&+ c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2
\end{aligned}$$

evaluando en el punto  $x = 0$

$$y'(0) = 0 = c_1$$

evaluando en el punto  $x = l$

$$y'(\ell) = 0 = \frac{M_A}{EI} \ell + \frac{P}{EI} \frac{b^2}{2} + c_1 + 2 c_2 \ell + 3 c_3 \ell^2 \quad (2)$$

derivando  $y'$  tenemos

$$y'' = \frac{M_A}{EI} Y(x) - \frac{M_B}{EI} Y(x-\ell) + \frac{P}{EI} Y(x-a)(x-a) + \\ + 2 c_2 + 6 c_3 x$$

evaluando  $y''$  en  $x = 0$

$$y''(0) = \frac{M_A}{EI} = \frac{M_A}{EI} + 2 c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = 0$$

evaluando  $y''$  en  $x = \ell$

$$y''(\ell) = -\frac{M_A}{EI} + \frac{P}{EI} b + 6 c_3 \ell = -\frac{M_B}{EI} \quad (3)$$

del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ec. (1) : } \frac{M_A}{2EI} \ell^2 + \frac{P}{EI} \frac{b^3}{6} + c_3 \ell^3 = 0 \\ \text{c. (2) : } \frac{M_A}{EI} \ell + \frac{P}{EI} \frac{b^2}{2} + 3 c_3 \ell^2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$M_A = \frac{Pab^2}{\ell^2}$$

sustituyendo en la ecuación (1):

$$c_3 = -\frac{Pb^2(3a+b)}{6EI\ell^3}$$

y de la ecuación (3):

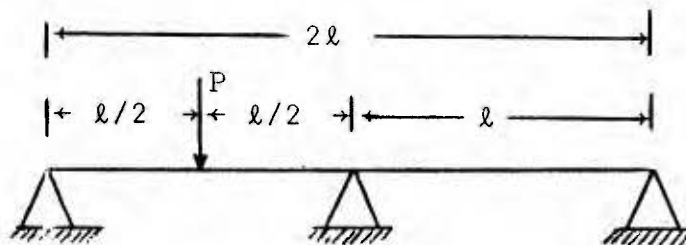
$$M_B = -\frac{P a^2 b}{\ell^2}$$

sustituyendo en la ecuación general las constantes encontradas, tenemos la solución del problema planteado:

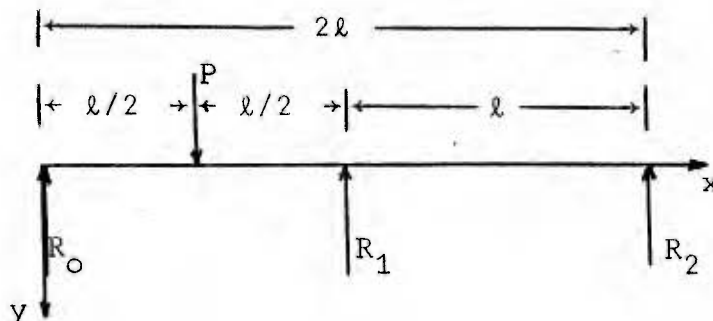
$$y(x) = \frac{Pab^2}{EI\ell^2} Y(x) \frac{x^2}{2} + \frac{Pa^2b}{EI\ell^2} Y(x-\ell) \frac{(x-\ell)^2}{2} + \frac{P}{EI} Y(x-a) \frac{(x-a)^3}{6} - \frac{Pb^2(3a+b)}{6EI\ell^3} x^3$$

### 3.6 Ejemplo

Por último, analicemos el caso de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada  $P$  en el punto medio del primer tramo como se representa en la figura siguiente:



el diagrama de fuerzas correspondiente es



para encontrar la ecuación de la curva de deflexión, la ecuación diferencial a resolver será:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P \delta_{(l/2)} - R_1 \delta_{(l)}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = y(l) = y(2l) = 0$$

$$y''(0) = y''(2l) = 0$$

usando 1.22, 1.21 y la nota 3.4 tenemos

$$EI y_p = PY(x-l/2) \frac{(x-l/2)^3}{6} - R_1 Y(x-l) \frac{(x-l)^3}{6}$$

la solución general será de la forma

$$EI y = y_p + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

evaluando en las condiciones iniales

$$EI y(0) = 0 = c_0$$

$$\text{ec. (1)} \quad EI y(l) = \frac{Pl^3}{48} + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 = 0$$

$$\text{ec. (2)} \quad EI y(2l) = \frac{27Pl^3}{48} - R_1 \frac{l^3}{6} + 2c_1 l + 4c_2 l^2 + 8c_3 l^3 = 0$$

derivando dos veces tenemos

$$EI y'' = PY(x-l/2)(x-l/2) - R_1 Y(x-l)(x-l) + \\ + 2c_2 + 6c_3 x$$

evaluando en las condiciones iniciales:

$$EIy''(0) = 0 = 2c_2$$

ec. (3) 
$$EIy''(2l) = \frac{3Pl}{2} - R_1l + 12c_3l = 0$$

de las ecuaciones (1) y (2)

$$Pl^2 + 48c_1 + 48c_3l^2 = 0$$

$$27Pl^2 - 8R_1l^2 + 96c_1 + 384c_3l^2 = 0$$

eliminando  $c_1$ :

ec. (4) 
$$25Pl^2 - 8R_1l^2 + 288c_3l^2 = 0$$

de las ecuaciones (3) y (4)

$$25P - 8R_1 + 288c_3 = 0$$

$$3P - 2R_1 + 24c_3 = 0$$

resolvemos para  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{11P}{16}$$

y para  $c_3$ :

$$c_3 = \frac{-13P}{192}$$

sustituyendo en la ecuación (1) los correspondientes valores

de  $R_1$  y  $c_3$  tenemos:

$$c_1 = \frac{3P\ell^2}{64}$$

Luego, la solución general es:

$$y = \frac{5 P}{16 EI} Y(x-\ell/2) \frac{(x-\ell/2)^3}{6} + \frac{3P\ell^2}{64EI}x - \frac{13 P}{192EI}x^3$$

NOTA:

Todos los resultados obtenidos han sido cotejados, ya sean las flechas o los momentos, con los que se obtienen por los métodos clásicos.





BIBLIOGRAFIA

- Balanzat, M. Teoría de Distribuciones. Ediciones de la Biblioteca. Caracas, 1966.
- Byars, E. F. y Snyder, R. D. Mecánica de cuerpos deformables. Representaciones y servicios de ingeniería, S. A. México, 1978.
- Horvath, J. Topological Vector Spaces and Distributions. Addison Wesley, Massachusetts, 1966
- Popov, E. P. Introducción a la mecánica de sólidos. Editorial Limusa, México, 1976.
- Schwartz, L. Métodos matemáticos para las ciencias físicas. Selecciones Científicas. Madrid, 1969.
- Timoshenko, S. Elementos de Resistencia de Materiales. Montaner y Simón, S. A. Barcelona, 1966.